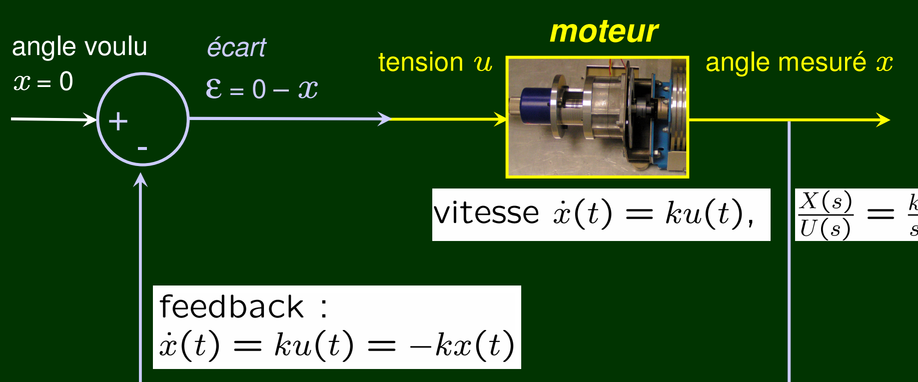
1ère partie :

Particularités

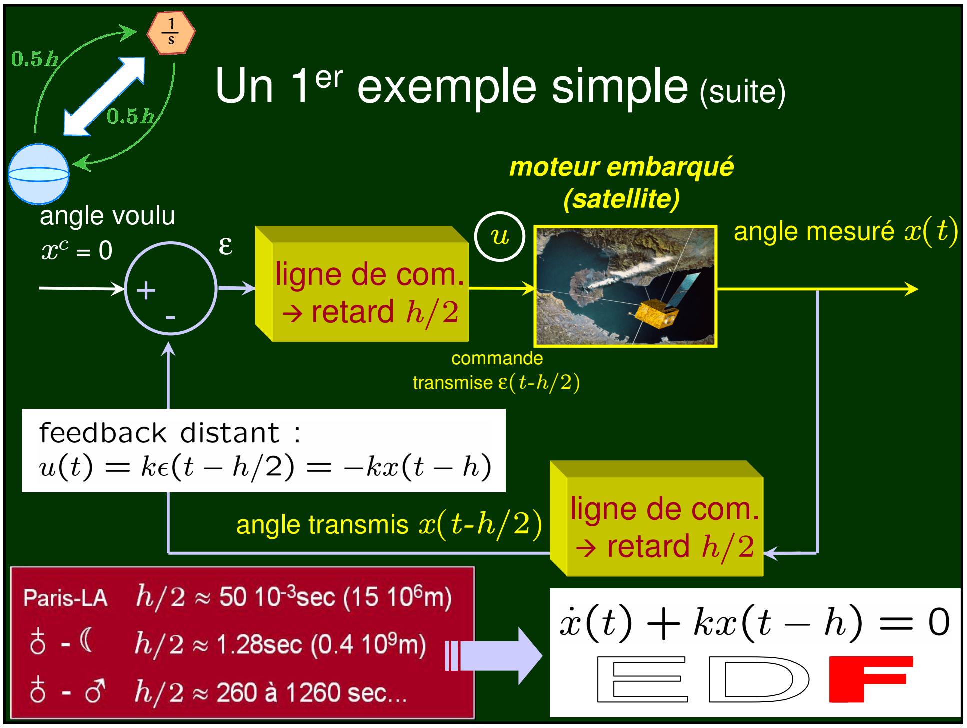
Jean-Pierre Richard, Ecole Centrale de Lille
Ecole d'Automne d'Automatique « La commande numérique des procédés industriels », Douz, Tunisie, 5-8 novembre 2006

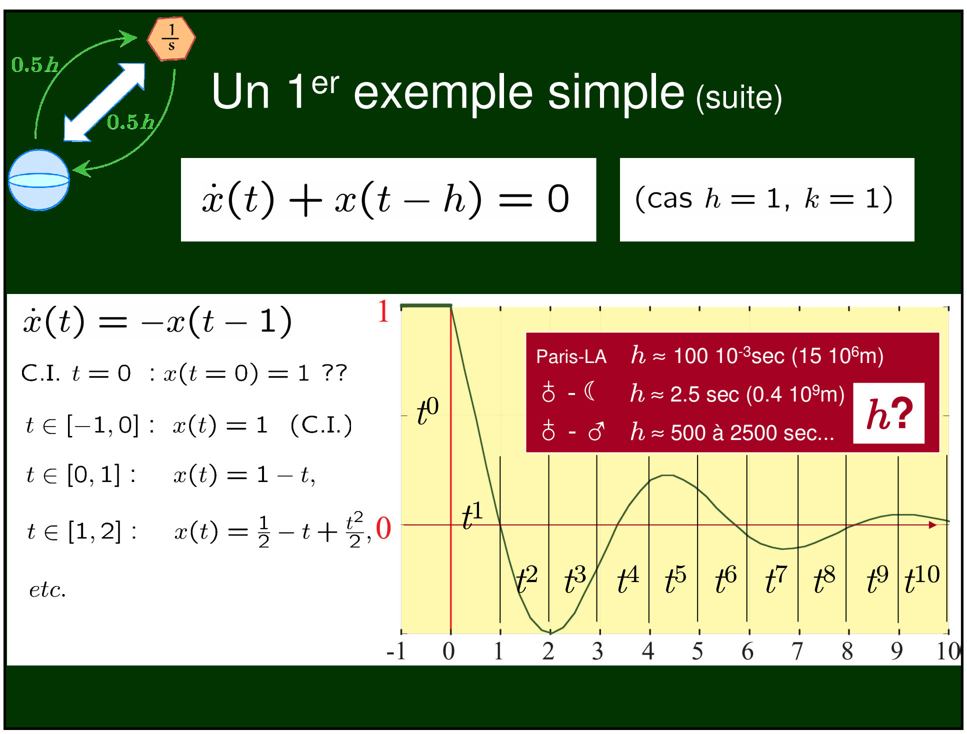
Un 1er exemple simple

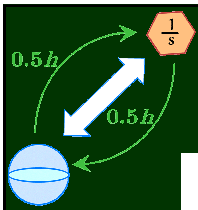


$$\dot{x}(t) + kx(t) = 0$$

EDO


Un 1er exemple simple (suite)
$0.5h$
$\frac{1}{s}$
$0.5h$
angle voulu
$x^c = 0$
ε
+
-
ligne de com.
→ retard $h/2$
u
moteur embarqué
(satellite)
angle mesuré $x(t)$
commande
transmise $\varepsilon(t\text{-}h/2)$
feedback distant :
$u(t) = k\epsilon(t-h/2) = -kx(t-h)$
angle transmis $x(t\text{-}h/2)$
ligne de com.
→ retard $h/2$
Paris-LA $h/2 \approx$ 50 10^{-3}sec (15 10^6m)
♁ - ☾ $h/2 \approx$ 1.28sec (0.4 10^9m)
♁ - ♂ $h/2 \approx$ 260 à 1260 sec...
$\dot{x}(t) + kx(t-h) = 0$
EDF


Un 1er exemple simple (suite)
$0.5h$
$\frac{1}{s}$
$0.5h$
$\dot{x}(t) + x(t-h) = 0$
(cas $h=1$, $k=1$)
$\dot{x}(t) = -x(t-1)$
C.I. $t=0$: $x(t=0) = 1$??
$t \in [-1,0]$: $x(t) = 1$ (C.I.)
$t \in [0,1]$: $x(t) = 1-t,$
$t \in [1,2]$: $x(t) = \frac{1}{2} - t + \frac{t^2}{2},$
etc.
1
0
t^0 t^1 t^2 t^3 t^4 t^5 t^6 t^7 t^8 t^9 t^{10}
-1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
Paris-LA $h \approx$ 100 10^{-3}sec (15 10^6m)
♁ - ☾ $h \approx$ 2.5 sec (0.4 10^9m)
♁ - ♂ $h \approx$ 500 à 2500 sec...
h?



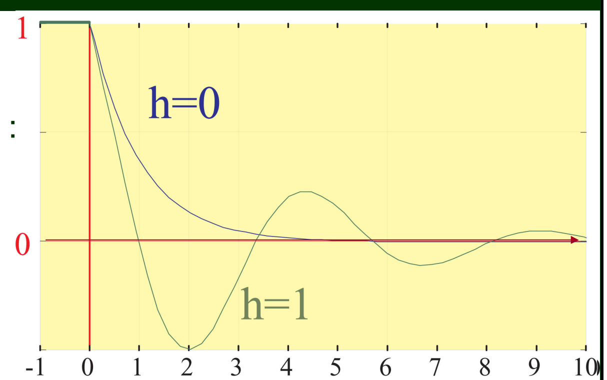
Un 1er exemple simple (suite)

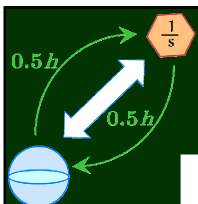
$\dot{x}(t) + x(t-h) = 0$ selon h ?

$\dot{x}(t) + x(t-1) = 0$

à comparer avec (h=0) :

$\dot{x}(t) + x(t) = 0$



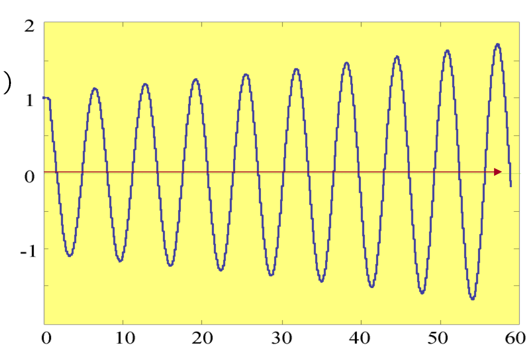


Un 1er exemple simple (suite)

$\dot{x}(t) + x(t-h) = 0$ $h = 1.6$

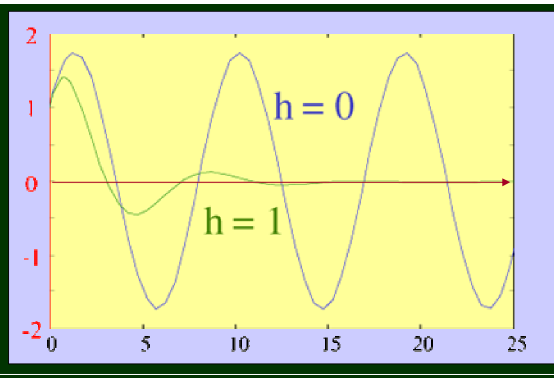
$\dot{x}(t) + x(t-1.6) = 0$

$t \in [-1, 0]$: $x(t) = 1$ (même C.I.)



(parenthèse...)

$$\ddot{y}(t) + y(t) - \frac{1}{2}y(t-h) = 0$$



le retard peut aussi avoir un effet stabilisant

ici, effet de dérivée : $y(t-h) \approx y(t) - h\dot{y}(t)$

Retour au 1er exemple simple...

$$\dot{x}(t) + x(t-h) = 0 \qquad h = \frac{\pi}{2}$$

$$\dot{x}(t) + x(t - \frac{\pi}{2}) = 0$$

$$\frac{d}{dt}x(t) = -x(t-\frac{\pi}{2}) = 0$$

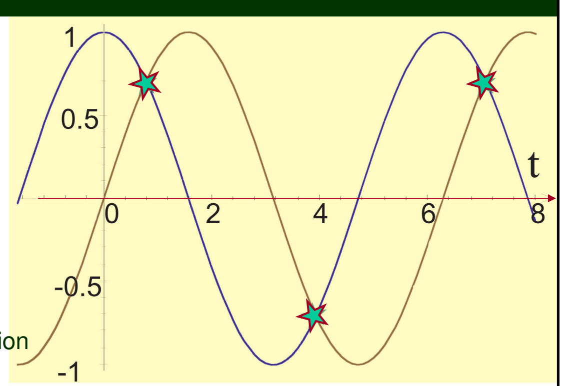
$x(t) = \cos\ t,$

$x(t) = \sin\ t,$

...

→ notion d' « état » ?

variable $\boldsymbol{X}(t)$ générant une solution unique à partir de l'instant t

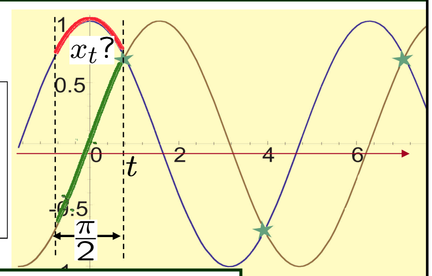


Un 1er exemple simple (suite)

$$\dot{x}(t) + x(t-h) = 0 \qquad h = \frac{\pi}{2}$$

(notation de Shimanov, 1960)

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f\,(x_t, t, u_t)\,, && t \geq t_0, \\ x_t(\theta) &= x(t+\theta), && -h \leq \theta \leq 0, \\ u_t(\theta) &= u(t+\theta), && -h \leq \theta \leq 0, \\ x(\theta) &= \varphi(\theta), && t_0 - h \leq \theta \leq t_0, \end{aligned}$$



→ notion d' « **état** » ?

variable $X(t)$ générant une solution unique à partir de l'instant t

fonction $x_t =$ état à l'instant t
vecteur $x(t) = x_t(0)$ solution à t

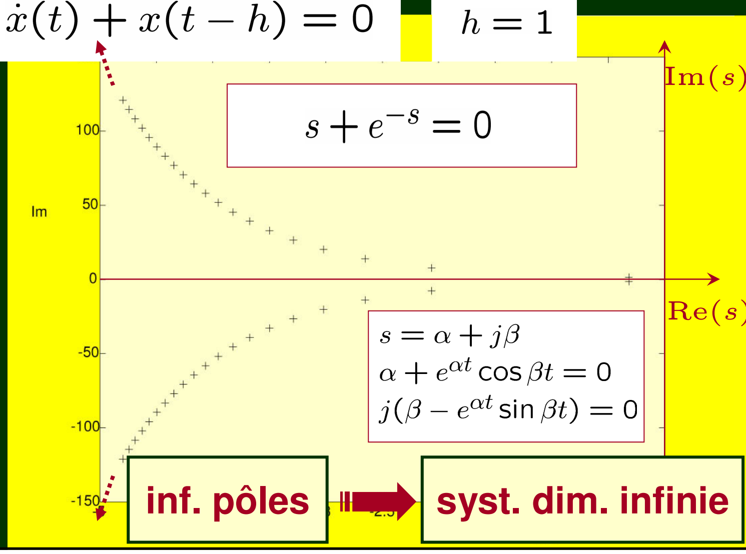
⇒ fonction x_t EDF ⇒ **syst. dim. infinie**

Un 1er exemple simple (suite)

$$\dot{x}(t) + x(t-h) = 0 \qquad h = 1$$

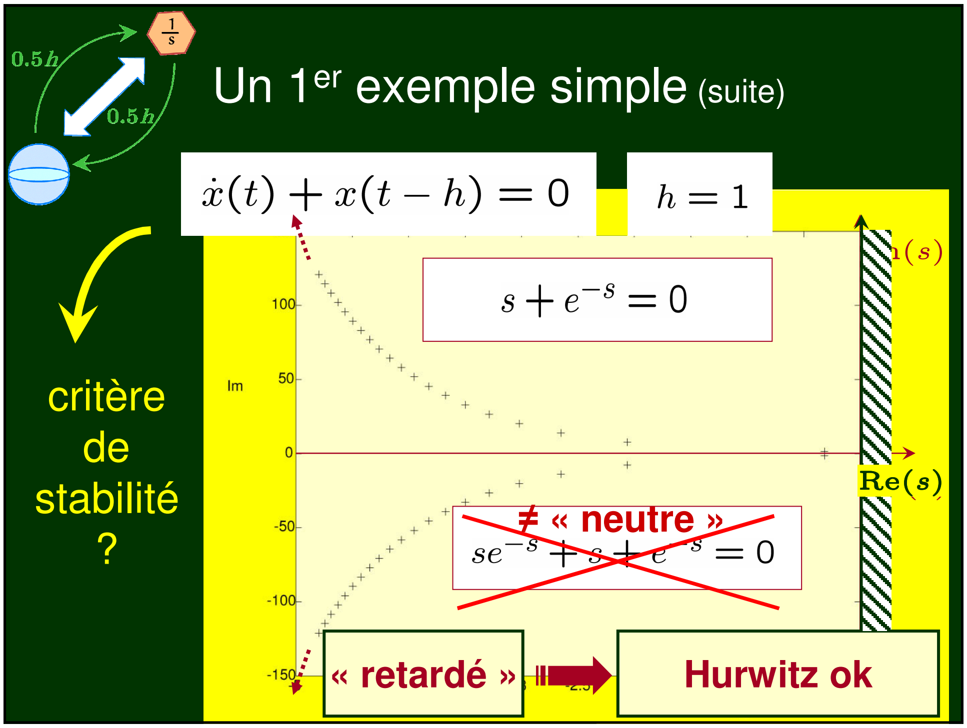
pôles?

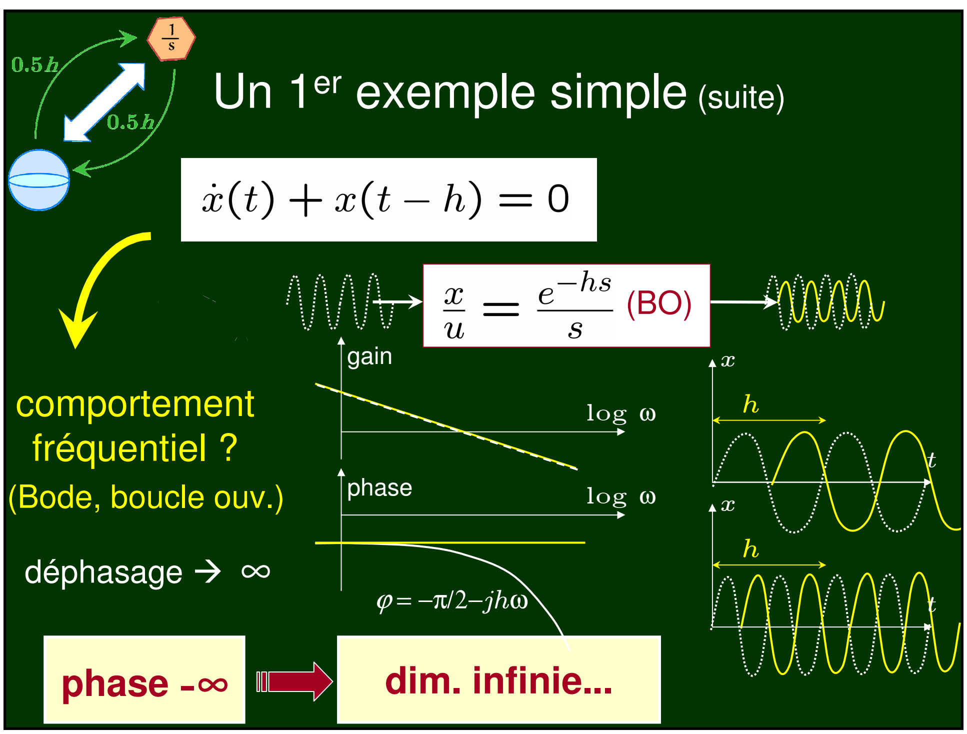
$$s + e^{-s} = 0$$

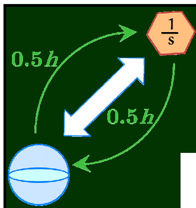


$$\begin{aligned} &s = \alpha + j\beta \\ &\alpha + e^{\alpha t}\cos\beta t = 0 \\ &j(\beta - e^{\alpha t}\sin\beta t) = 0 \end{aligned}$$

inf. pôles ⇒ **syst. dim. infinie**


Un 1er exemple simple (suite)
$\dot{x}(t) + x(t-h) = 0$
$h = 1$
$s + e^{-s} = 0$
critère de stabilité ?
Im
100
50
0
-50
-100
-150
Re(s)
≠ « neutre »
$se^{-s} + s + e^{-s} = 0$
« retardé »
Hurwitz ok
0.5h


Un 1er exemple simple (suite)
$\dot{x}(t) + x(t-h) = 0$
$\frac{x}{u} = \frac{e^{-hs}}{s}$ (BO)
comportement fréquentiel ?
(Bode, boucle ouv.)
gain
log ω
phase
log ω
$\varphi = -\pi/2 - jh\omega$
déphasage → ∞
x
h
t
phase -∞
dim. infinie...
0.5h



Un 1er exemple simple (fin!)

$$\dot{x}(t) + x(t-h) = 0$$

Résumons-nous...

retard $\Rightarrow$ forte influence sur la stabilité
état fonctionnel
nombre de pôles infini (Hurwitz OK, Routh non)
déphasage important (→ –∞)

et, jusqu'ici, c'était assez simple

retard constant
système linéaire « 1er ordre »

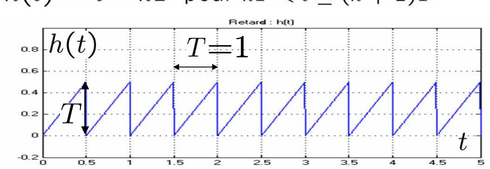
pareil pour retards variables $h(t)$?

un contre-exemple...

2ème (contre-)exemple à retard variable

$$\dot{x}(t) = -ax(t) - bx(t-h(t)) \qquad (1)$$

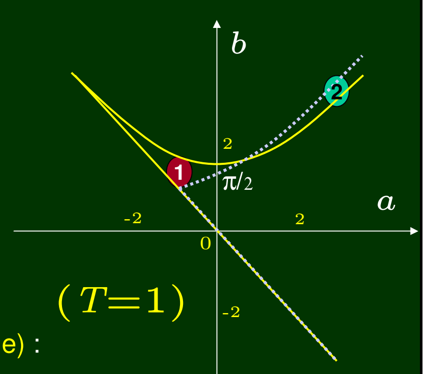
$h(t) = t - kT$ pour $kT < t \leq (k+1)T$



est asymptotiquement stable ssi (zone jaune) :

$$\left|(1+\tfrac{b}{a})e^{-aT} - \tfrac{b}{a}\right| < 1 \qquad \text{si } a \neq 0$$
$$|1 - bT| < 1 \qquad \text{si } a = 0$$

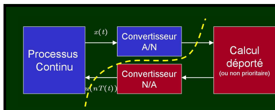
et, pour $h =$ cste ∈ [0,1] ssi (zone grise)



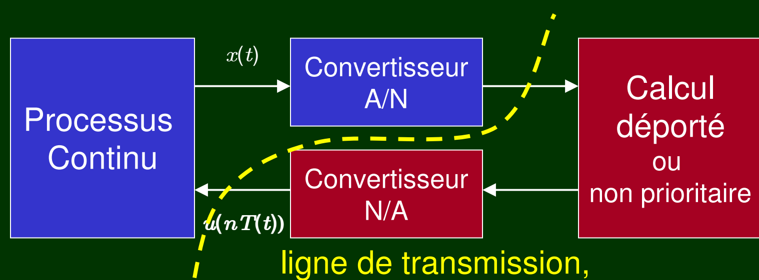
1 stable $h(t)$<1 - instable h=cte<1

2 instable $h(t)$<1 - stable h=cte<1

OK, mais ce type de $h(t)$ est-il réaliste ? un autre exemple...



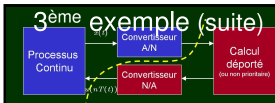
3ème exemple : échantillonnage apériodique



transformée en z, tout va bien, etc.

$$u(t) = g(x(nT(t)))$$

3ème exemple (suite)



Position du problème

Stabilisation d'un système *via* une commande de la forme :

$$\boxed{u(t) = u_d(t_k), \quad t \in [t_k, t_{k+1}[}$$

où (t_k) est une suite strictement croissante : en général,

$$\boxed{t_k \neq kT}$$

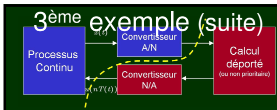
Types de systèmes considérés

Linéaires : $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu_d(t_k)$

Linéaires saturés : $\dot{x}(t) = Ax(t) + B \ \mathrm{sat}[u_d(t_k)]$

Retour d'état (+simple) : $u = Kx(t)$

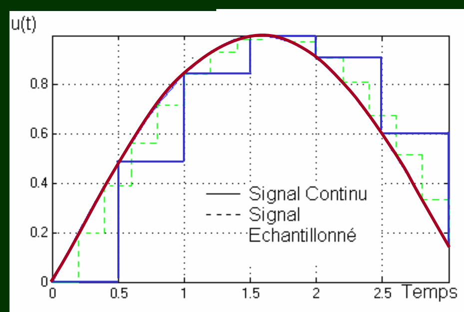
3ème exemple (suite)

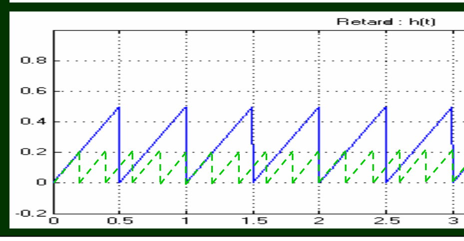


Une idée intéressante…

Mikheev et al. 88, Sobolev et al. 89. Aström et al. 92

Fridman, Seuret, Richard - *Automatica* 2004





Signal échantillonné bloqué

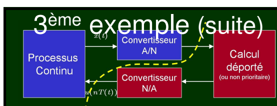
(ici, à période constante)

⇕

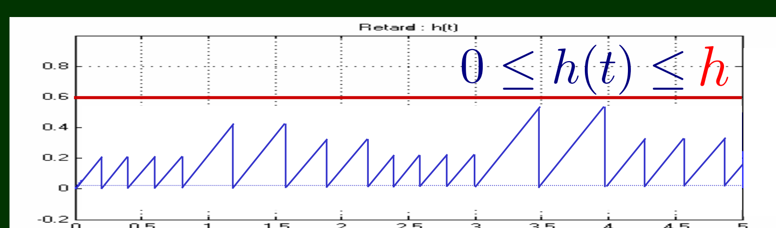
Signal retardé par $h(t)$ variable

$$u(t) = u_d(t_k) = u_d(t - [t - t_k]) = u(t - h(t))$$

3ème exemple (suite)

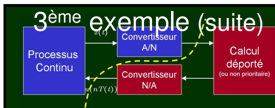


Re-formulation du problème



- influence de la période *maxi* d'échantillonnage h
- application du critère de E. Fridman $\dot{h}(t) \leq 1$

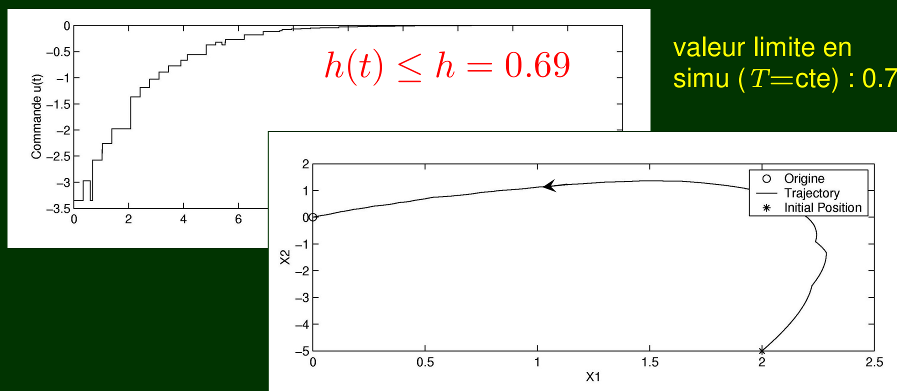
3ème exemple (suite)



Cas 1 : $A = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

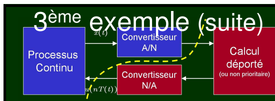
instable → glob. asympt. stable

Le théorème montre que ce système est stabilisable par un retour d'état échantillonné dont la période maximale est inférieure à 0.69. Aussi pour $\boxed{h = 0.69}$ la matrice $\boxed{K \text{ du retour d'état est égale à } \begin{bmatrix} -1.048 & 0.2511 \end{bmatrix}}$ pour $\varepsilon = 0.34$. En simulation le système est stabilisé pour toute valeur de h inférieure à 0.7.



valeur limite en simu (T=cte) : 0.7

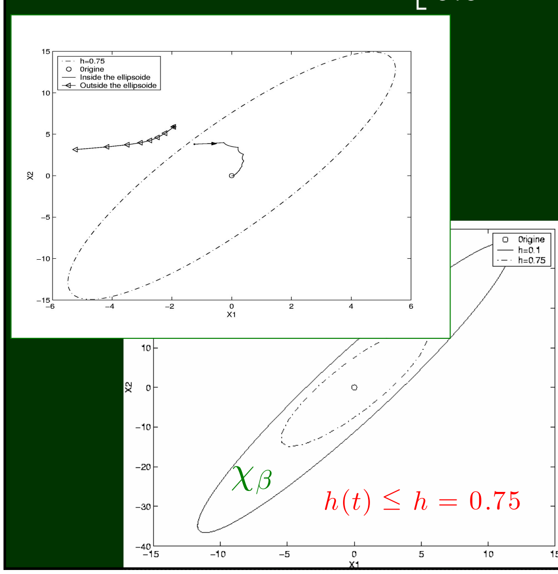
3ème exemple (suite)

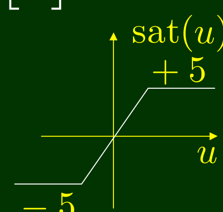


Cas 2 : saturation (stab. locale)

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1.1 & -0.6 \\ 0.5 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \mathrm{sat}(u(t_k))$$

instable → local. as. stable





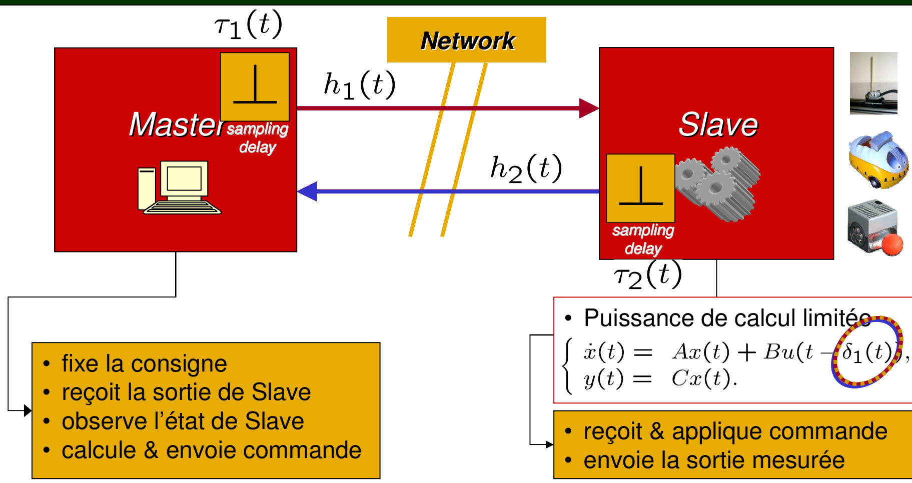
En appliquant le théorème, on détermine un gain K qui stabilise le système pour tout échantillonnage de période maximale $h < 0.75$.

Le volume de l'ellipse augmente quand on diminue la valeur de h .

h=0.75 => K=[-1.7, 0.5]

4ème exemple : Networked Control Systems

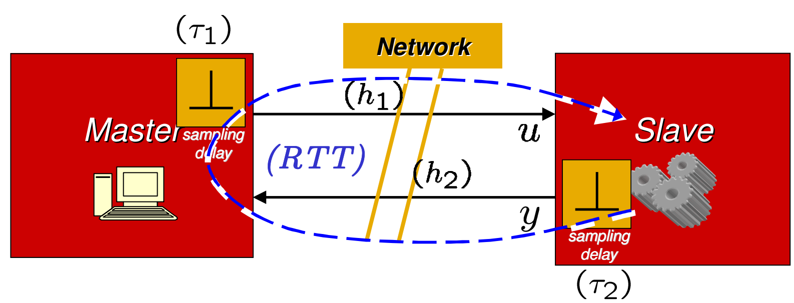
Seuret *et al.* - *ACC* 2006



$h_i + \tau_i = \delta_i$ ⇨ formulation homogène «retard»

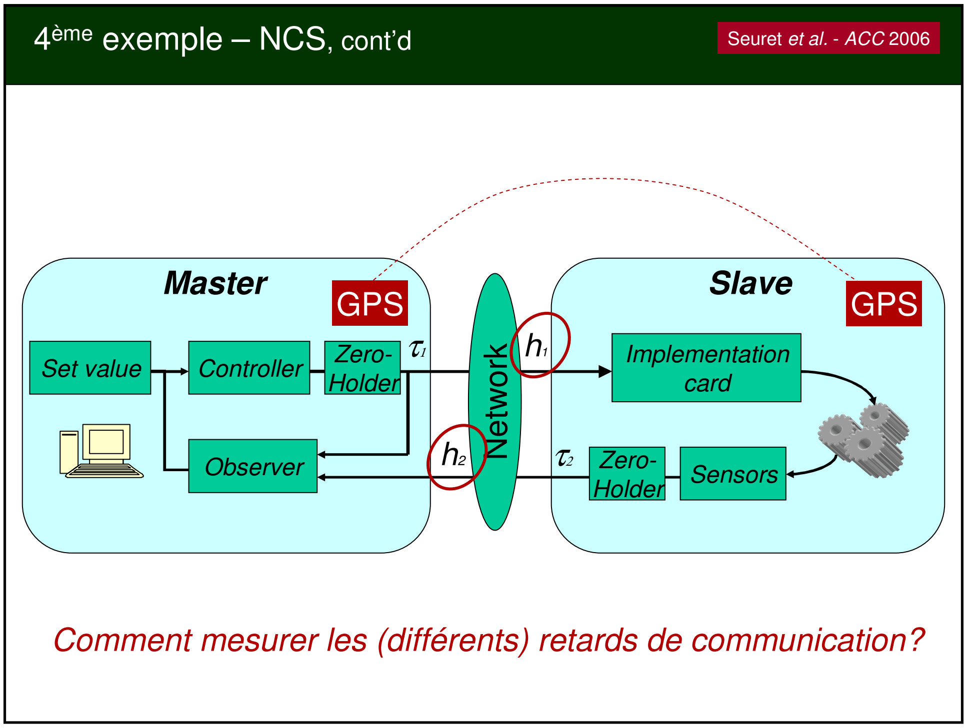
4ème exemple – NCS, cont'd

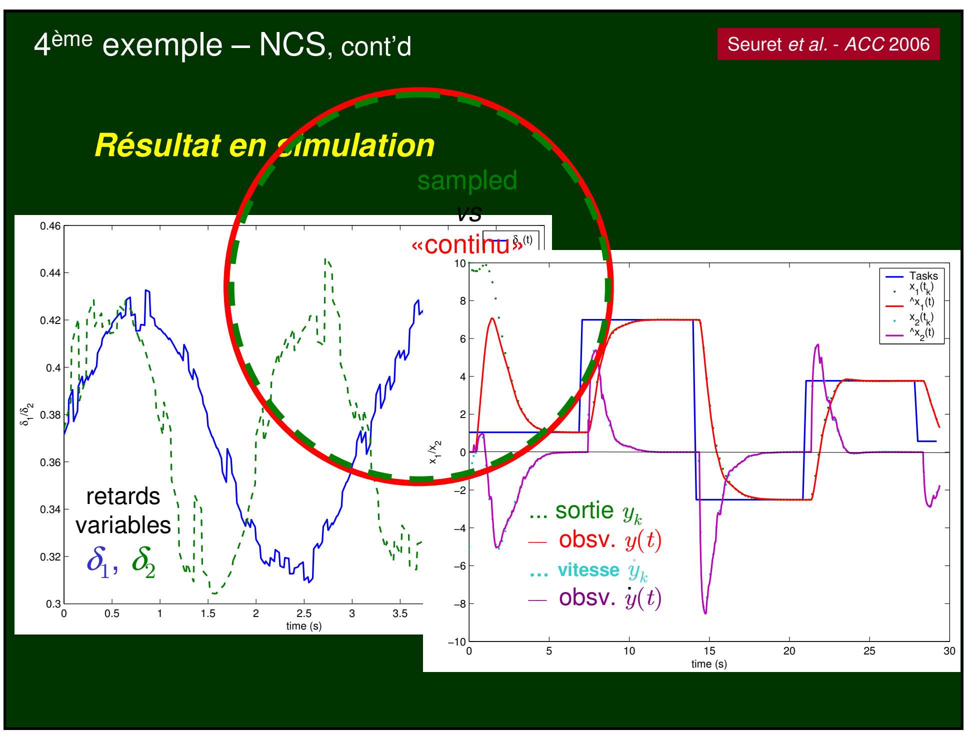
Seuret *et al.* - *ACC* 2006



$$u = Ky(t_{k'} - RTT(t_{k'}))...?$$

Besoin d'un contrôle spécifique :
- basé observateur,
- tenant compte des retards.


4ème exemple – NCS, cont'd
Seuret et al. - ACC 2006
Master
GPS
Set value
Controller
Zero-Holder
τ1
Observer
h2
Network
h1
Slave
GPS
Implementation card
τ2
Zero-Holder
Sensors
Comment mesurer les (différents) retards de communication?


4ème exemple – NCS, cont'd
Seuret et al. - ACC 2006
Résultat en simulation
sampled
vs
«continu»
retards
variables
δ1, δ2
time (s)
Tasks
... sortie y_k
— obsv. $y(t)$
... vitesse $\dot{y}_k$
— obsv. $\dot{y}(t)$
time (s)