Stabilité et stabilisation des systèmes à retards

Michel Dambrine

Université de Valenciennes et du Hainaut-Cambrésis - ENSIAME
LAMIH UMR CNRS 8530
michel.dambrine@univ-valenciennes.fr

EAA 2006, Douz

Plan

1ère partie : analyse de la stabilité

Plan

2e partie : commandes stabilisantes

Première partie I

Analyse de la stabilité des systèmes à retards

Contenu

Notions de stabilité

$x(t; t_0, \varphi)$: solution de l'EDF

$$(S) \quad \dot{x}(t) = F(t, x_t) \text{ avec } x_{t_0} = \varphi \in \mathcal{C}$$

Mêmes définitions de la stabilité que pour les EDO mais avec

la norme de la convergence uniforme pour les C.I. :

$$\|\varphi\|_{\mathcal{C}} = \sup_{-\tau \leq \theta \leq 0} \{\|\varphi(\theta)\|\}$$

Notions de stabilité

Définitions : La solution $x = 0$ de (S) est dite

- *stable* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(t_0, \varepsilon)$ t.q. $\|\varphi\|_{\mathcal{C}} < \delta \Rightarrow \|x(t; t_0, \varphi)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0$
- *asymptotiquement stable* si, de plus, il existe $\eta = \delta(t_0)$ t.q. $\|\varphi\|_{\mathcal{C}} < \eta \Rightarrow \lim_{t\to\infty} x(t; t_0, \varphi) = 0$
- *exponentiellement stable* s'il existe $\alpha, \beta, \gamma > 0$ t.q. $\|\varphi\|_{\mathcal{C}} < \gamma \Rightarrow \|x(t; t_0, \varphi)\| \leq \beta \|\varphi\|_{\mathcal{C}} \, e^{-\alpha(t-t_0)}$, $\forall t \geq t_0$

Notions de stabilité

Définitions : La solution $x = 0$ de (S) est dite

- *stable* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(t_0, \varepsilon)$ t.q. $\|\varphi\|_{\mathcal{C}} < \delta \Rightarrow \|x(t; t_0, \varphi)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0$
- *asymptotiquement stable* si, de plus, il existe $\eta = \delta(t_0)$ t.q. $\|\varphi\|_{\mathcal{C}} < \eta \Rightarrow \lim_{t\to\infty} x(t; t_0, \varphi) = 0$
- *exponentiellement stable* s'il existe $\alpha, \beta, \gamma > 0$ t.q. $\|\varphi\|_{\mathcal{C}} < \gamma \Rightarrow \|x(t; t_0, \varphi)\| \leq \beta \|\varphi\|_{\mathcal{C}} \; e^{-\alpha(t-t_0)}$, $\forall t \geq t_0$

Notions de stabilité

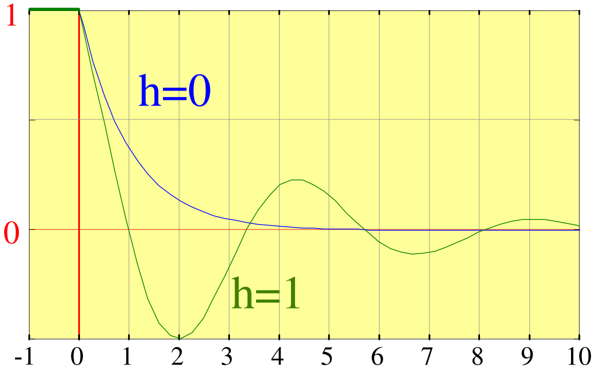
Définitions : La solution $x = 0$ de (S) est dite

- *stable* si, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta = \delta(t_0, \varepsilon)$ t.q. $\|\varphi\|_{\mathcal{C}} < \delta \Rightarrow \|x(t; t_0, \varphi)\| < \varepsilon, \forall t \geq t_0$
- *asymptotiquement stable* si, de plus, il existe $\eta = \delta(t_0)$ t.q. $\|\varphi\|_{\mathcal{C}} < \eta \Rightarrow \lim_{t\to\infty} x(t; t_0, \varphi) = 0$
- *exponentiellement stable* s'il existe $\alpha, \beta, \gamma > 0$ t.q. $\|\varphi\|_{\mathcal{C}} < \gamma \Rightarrow \|x(t; t_0, \varphi)\| \leq \beta \|\varphi\|_{\mathcal{C}} \ e^{-\alpha(t-t_0)}$, $\forall t \geq t_0$

Influence d'un retard sur la stabilité

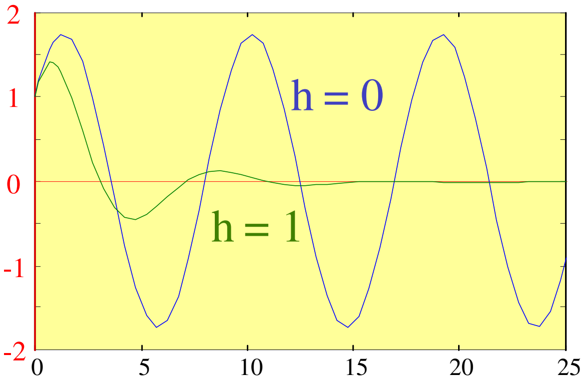
- L'effet déstabilisant des retards est bien connu :

$$\dot{x}(t) = -x(t-h)$$



- *Mais*, ils peuvent aussi avoir un effet stabilisant :

$$\ddot{y}(t) + y(t) - \frac{1}{2}y(t-h) = 0$$



Contenu

Cas des systèmes linéaires stationnaires

Équation et fonction caractéristiques

Recherche des solutions exponentielles :
$x(t) = \exp(st)x_0$ est une solution de

$$(S) \qquad \dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-\tau)$$

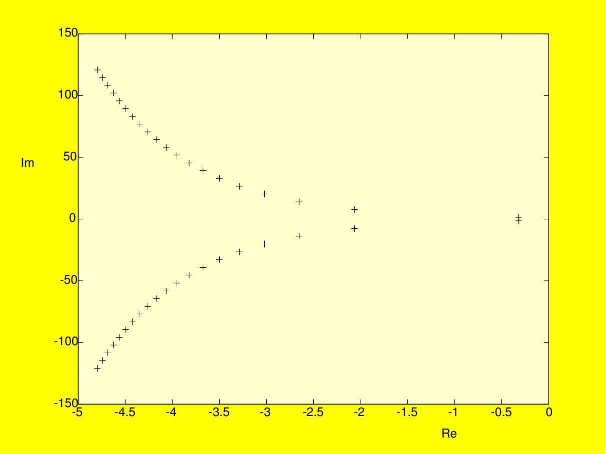
si s est solution de l'équation caractéristique

$$\underbrace{\det\left[sI_n - A_0 - A_1 \exp(-\tau s)\right]}_{p(s,\tau)} = 0$$

- $p(s,\tau) \to$ fonction caractéristique
  c'est un *quasi-polynôme* :
  $p(s,\tau) = D_0(s) + \sum_{i=1}^{n} D_i(s)\exp(-i\tau s)$
  avec
  - $\deg(D_0(s)) > \deg(D_i(s))$ (cas retardé), ou
  - $\deg(D_0(s)) \geq \deg(D_i(s))$ (cas neutre)
- zéros de $p(s,\tau) \to$ racines caractéristiques.

L'équation caractéristique est transcendantale : il existe un nombre infini de racines

Exemple : racines caractéristiques de $\dot{x}(t) = -x(t-1)$ solutions de $s + e^{-s} = 0$:



Propriétés (pour système de type retardé) :

- $p(s,\tau)$ est une fonction entière de s :
  il ne peut y avoir qu'un nombre fini de zéros dans un ensemble borné de $\mathbb{C}$
- Soit $(s_i)_{i\geq 1}$ une suite infinie de racines caract. t.q. $|s_1| \leq |s_2| \leq \ldots$ alors
  1. $|s_i| \to +\infty$ lorsque $i \to \infty$,
  2. $\mathrm{Re}(s_i) \to -\infty$ lorsque $i \to \infty$
- Pour un α donné, il n'existe qu'un nombre fini de racines s t.q. $\mathrm{Re}(s) > \alpha$.

Propriétés (pour système de type retardé) :

- $p(s,\tau)$ est une fonction entière de s :
  il ne peut y avoir qu'un nombre fini de zéros dans un ensemble borné de $\mathbb{C}$
- Soit $(s_i)_{i\geq 1}$ une suite infinie de racines caract. t.q. $|s_1| \leq |s_2| \leq \ldots$ alors
  1. $|s_i| \to +\infty$ lorsque $i \to \infty$,
  2. $\mathrm{Re}(s_i) \to -\infty$ lorsque $i \to \infty$
- Pour un α donné, il n'existe qu'un nombre fini de racines s t.q. $\mathrm{Re}(s) > \alpha$.

Propriétés (pour système de type retardé) :

- $p(s, \tau)$ est une fonction entière de s :
  il ne peut y avoir qu'un nombre fini de zéros dans un ensemble borné de $\mathbb{C}$
- Soit $(s_i)_{i \geq 1}$ une suite infinie de racines caract. t.q. $|s_1| \leq |s_2| \leq \ldots$ alors
  1. $|s_i| \to +\infty$ lorsque $i \to \infty$,
  2. $\mathrm{Re}(s_i) \to -\infty$ lorsque $i \to \infty$
- Pour un α donné, il n'existe qu'un nombre fini de racines s t.q. $\mathrm{Re}(s) > \alpha$.

Propriétés (pour système de type retardé) :

- $p(s,\tau)$ est une fonction entière de s :
  il ne peut y avoir qu'un nombre fini de zéros dans un ensemble borné de $\mathbb{C}$
- Soit $(s_i)_{i\geq 1}$ une suite infinie de racines caract. t.q. $|s_1| \leq |s_2| \leq \ldots$ alors
  1. $|s_i| \to +\infty$ lorsque $i \to \infty$,
  2. $\mathrm{Re}(s_i) \to -\infty$ lorsque $i \to \infty$
- Pour un α donné, il n'existe qu'un nombre fini de racines s t.q. $\mathrm{Re}(s) > \alpha$.

Propriétés (pour système de type retardé) :

- $p(s, \tau)$ est une fonction entière de s :
il ne peut y avoir qu'un nombre fini de zéros dans un ensemble borné de $\mathbb{C}$
- Soit $(s_i)_{i \geq 1}$ une suite infinie de racines caract. t.q. $|s_1| \leq |s_2| \leq \ldots$ alors
  1. $|s_i| \to +\infty$ lorsque $i \to \infty$,
  2. $\mathrm{Re}(s_i) \to -\infty$ lorsque $i \to \infty$
- Pour un α donné, il n'existe qu'un nombre fini de racines s t.q. $\mathrm{Re}(s) > \alpha$.

Développement asymptotique de la solution $x(t)$

$$x(t) = \sum_{i:\mathrm{Re} s_i > \alpha} Q_i(t) e^{s_i t} + O(e^{\alpha t}),$$

$Q_i(t) =$ polynômes en t, $\alpha \in \mathbb{R}$ t.q. $\mathrm{Re}(s_i) \neq \alpha, \forall i$

Développement asymptotique de la solution $x(t)$

$$x(t) = \sum_{i:\mathrm{Re}s_i>\alpha} Q_i(t)e^{s_i t} + O(e^{\alpha t}),$$

$Q_i(t) =$ polynômes en t, $\alpha \in \mathbb{R}$ t.q. $\mathrm{Re}(s_i) \neq \alpha, \forall i$

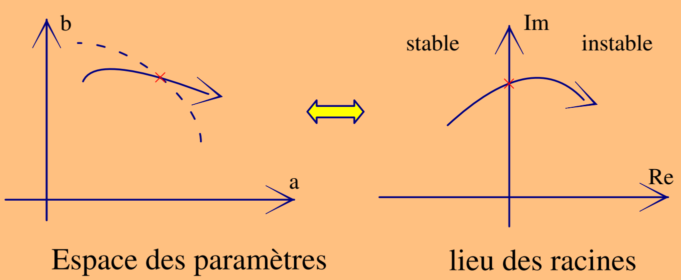
$\Longrightarrow$

Condition de stabilité exponentielle :

(S) est exponentiellement stable ssi toutes les racines caractéristiques sont à Re < 0.

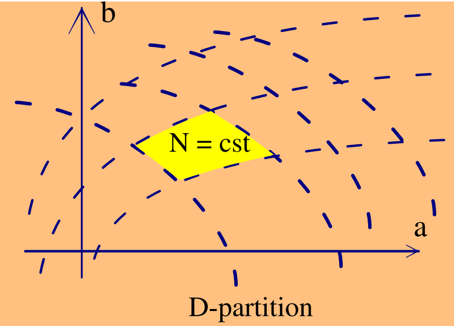
Technique de la D-partition

Idée : Continuité des zéros de la fonction caractéristique $p(s, \tau, a, b)$ par rapport à ses paramètres a, b



Hypersurfaces $= \{(a, b) : p(j\omega, a, b, \tau) = 0,\ \omega \in \mathbb{R}\}$

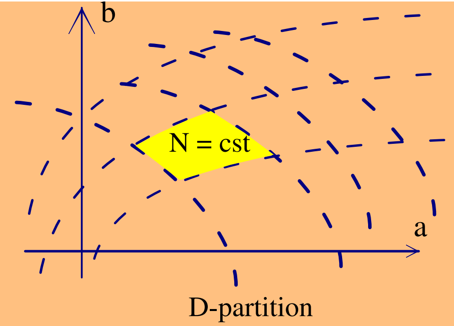
$\Rightarrow$ Partition de l'espace des paramètres



N = nombre de racines caract. instables.

Hypersurfaces $= \{(a,b) : p(j\omega, a, b, \tau) = 0,\ \omega \in \mathbb{R}\}$

$\Rightarrow$ Partition de l'espace des paramètres



N = nombre de racines caract. instables.

$\Rightarrow$ Localiser pour quelles régions $N = 0$.

Exemple : $\dot{x}(t) = -ax(t) - bx(t-1)$

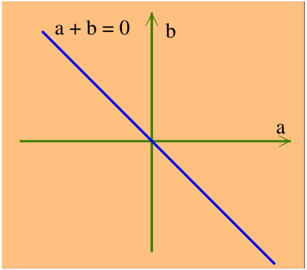
- $p(0, a, b) = 0 \Longrightarrow a + b = 0$
- $p(j\omega, a, b) = 0$
  $$\Longrightarrow \begin{cases} a + b\cos\omega = 0 \\ \omega - b\sin\omega = 0 \end{cases}$$
- Si $b = 0$ et $a > 0$, alors $N = 0$

Exemple : $\dot{x}(t) = -ax(t) - bx(t-1)$
Équation caractéristique : $p(s, a, b) = s + a + be^{-s}$

- $p(0, a, b) = 0 \Longrightarrow a + b = 0$
- $p(j\omega, a, b) = 0$
$$\Longrightarrow \begin{cases} a + b\cos\omega = 0 \\ \omega - b\sin\omega = 0 \end{cases}$$
- Si $b = 0$ et $a > 0$, alors $N = 0$

Exemple : $\dot{x}(t) = -ax(t) - bx(t-1)$

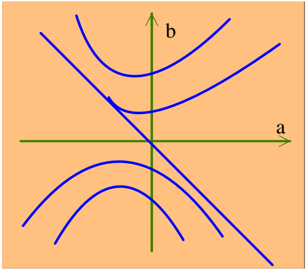
Équation caractéristique : $p(s, a, b) = s + a + be^{-s}$



- $p(0, a, b) = 0 \Longrightarrow a + b = 0$
- $p(j\omega, a, b) = 0$
$$\Longrightarrow \begin{cases} a + b\cos\omega = 0 \\ \omega - b\sin\omega = 0 \end{cases}$$
- Si $b = 0$ et $a > 0$, alors $N = 0$

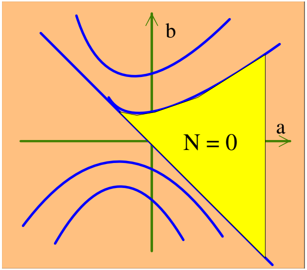
Exemple : $\dot{x}(t) = -ax(t) - bx(t-1)$

Équation caractéristique : $p(s, a, b) = s + a + be^{-s}$



- $p(0, a, b) = 0 \Longrightarrow a + b = 0$
- $p(j\omega, a, b) = 0$
$$\Longrightarrow \begin{cases} a + b\cos\omega = 0 \\ \omega - b\sin\omega = 0 \end{cases}$$
- Si $b = 0$ et $a > 0$, alors $N = 0$

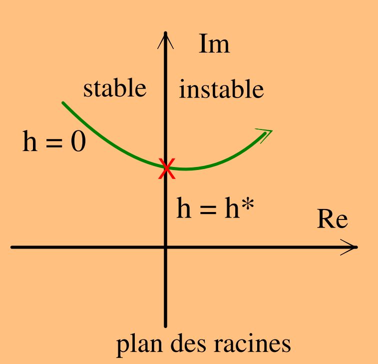
Exemple : $\dot{x}(t) = -ax(t) - bx(t-1)$
Équation caractéristique : $p(s, a, b) = s + a + be^{-s}$



- $p(0, a, b) = 0 \Longrightarrow a + b = 0$
- $p(j\omega, a, b) = 0$
$$\Longrightarrow \begin{cases} a + b\cos\omega = 0 \\ \omega - b\sin\omega = 0 \end{cases}$$
- Si $b = 0$ et $a > 0$, alors $N = 0$

Méthode de Walton et Marshall

Idée : Stabilité en fonction de la valeur du retard.



Cas simple : $p(s,\tau) = n(s) + d(s)e^{-\tau s}$
Hyp. : $d^\circ n(s) > d^\circ d(s)$.

Cas simple : $p(s,\tau) = n(s) + d(s)e^{-\tau s}$
Hyp. : $d^\circ n(s) > d^\circ d(s)$.
Détermination des valeurs de τ pour lesquelles il existe une racine caractéristique $s = j\omega$?

Cas simple : $p(s,\tau) = n(s) + d(s)e^{-\tau s}$
Hyp. : $d^\circ n(s) > d^\circ d(s)$.
Détermination des valeurs de τ pour lesquelles il existe une racine caractéristique $s = j\omega$?

$$p(s,\tau) = 0 \Leftrightarrow \bar{p}(s,\tau) = 0,$$

c'est-à-dire : $\begin{cases} n(j\omega) + d(j\omega)e^{-j\omega\tau} = 0 \\ n(-j\omega) + d(-j\omega)e^{j\omega\tau} = 0 \end{cases}$

Cas simple : $p(s,\tau) = n(s) + d(s)e^{-\tau s}$
Hyp. : $d^\circ n(s) > d^\circ d(s)$.
Détermination des valeurs de τ pour lesquelles il existe une racine caractéristique $s = j\omega$?

$$p(s,\tau) = 0 \Leftrightarrow \bar{p}(s,\tau) = 0,$$

c'est-à-dire : $\begin{cases} n(j\omega) + d(j\omega)e^{-j\omega\tau} = 0 \\ n(-j\omega) + d(-j\omega)e^{j\omega\tau} = 0 \end{cases}$

Élimination du terme exponentiel $\Rightarrow$ équation polynomiale

$$W(\omega^2) \triangleq n(j\omega)n(-j\omega) - d(j\omega)d(-j\omega) = 0$$

$\Rightarrow$ solutions en nombre fini !

Procédure :

1. Stabilité (pôles) pour $\tau = 0$.
2. Calcul du polynôme $W(\omega^2)$.
3. Recherche des zéros $\omega_i^2 \geq 0$ de $W(\omega^2)$
4. Si pas de zéros > 0 de $W(x) = 0$, stabilité du système $=$ stabilité pour $\tau = 0$. Sinon, analyse de l'évolution du lieu des racines au voisinage des points $s = j\omega_i$:
   $\mathit{signe}\ \mathrm{Re}\frac{ds}{d\tau}\Big|_{s=j\omega_i} = \mathit{signe}\ W'(\omega_i^2)$
5. Détermination des valeurs de τ pour lesquelles $s = j\omega_i$ est une racine caractéristique :
   $e^{j\omega_i\tau} = -\frac{n(-j\omega_i)}{d(-j\omega_i)}$

Procédure :

1. Stabilité (pôles) pour $\tau = 0$.
2. Calcul du polynôme $W(\omega^2)$.
3. Recherche des zéros $\omega_i^2 \geq 0$ de $W(\omega^2)$
4. Si pas de zéros > 0 de $W(x) = 0$, stabilité du système $=$ stabilité pour $\tau = 0$. Sinon, analyse de l'évolution du lieu des racines au voisinage des points $s = j\omega_i$:
   $signe\ \mathrm{Re}\frac{ds}{d\tau}\Big|_{s=j\omega_i} = signe\ W'(\omega_i^2)$
5. Détermination des valeurs de τ pour lesquelles $s = j\omega_i$ est une racine caractéristique :
   $e^{j\omega_i\tau} = -\frac{n(-j\omega_i)}{d(-j\omega_i)}$

Procédure :

1. Stabilité (pôles) pour $\tau = 0$.
2. Calcul du polynôme $W(\omega^2)$.
3. Recherche des zéros $\omega_i^2 \geq 0$ de $W(\omega^2)$
4. Si pas de zéros > 0 de $W(x) = 0$, stabilité du système = stabilité pour $\tau = 0$. Sinon, analyse de l'évolution du lieu des racines au voisinage des points $s = j\omega_i$:
   $\mathit{signe}\ \mathrm{Re}\frac{ds}{d\tau}\Big|_{s=j\omega_i} = \mathit{signe}\ W'(\omega_i^2)$
5. Détermination des valeurs de τ pour lesquelles $s = j\omega_i$ est une racine caractéristique :
   $e^{j\omega_i\tau} = -\frac{n(-j\omega_i)}{d(-j\omega_i)}$

Procédure :

1. Stabilité (pôles) pour $\tau = 0$.
2. Calcul du polynôme $W(\omega^2)$.
3. Recherche des zéros $\omega_i^2 \geq 0$ de $W(\omega^2)$
4. Si pas de zéros > 0 de $W(x) = 0$, stabilité du système $=$ stabilité pour $\tau = 0$. Sinon, analyse de l'évolution du lieu des racines au voisinage des points $s = j\omega_i$
   $$signe \ \mathrm{Re} \frac{ds}{d\tau}\Big|_{s=j\omega_i} = signe \ W'(\omega_i^2)$$
5. Détermination des valeurs de τ pour lesquelles $s = j\omega_i$ est une racine caractéristique :
   $$e^{j\omega_i\tau} = -\frac{n(-j\omega_i)}{d(-j\omega_i)}$$

Procédure :

1. Stabilité (pôles) pour $\tau = 0$.
2. Calcul du polynôme $W(\omega^2)$.
3. Recherche des zéros $\omega_i^2 \geq 0$ de $W(\omega^2)$
4. Si pas de zéros > 0 de $W(x) = 0$, stabilité du système = stabilité pour $\tau = 0$ .Sinon, analyse de l'évolution du lieu des racines au voisinage des points $s = j\omega_i$
   $signe \; \mathrm{Re} \frac{ds}{d\tau}\Big|_{s=j\omega_i} = signe \; W'(\omega_i^2)$
5. Détermination des valeurs de τ pour lesquelles $s = j\omega_i$ est une racine caractéristique :
   $e^{j\omega_i\tau} = -\frac{n(-j\omega_i)}{d(-j\omega_i)}$

Procédure :

1. Stabilité (pôles) pour $\tau = 0$.
2. Calcul du polynôme $W(\omega^2)$.
3. Recherche des zéros $\omega_i^2 \geq 0$ de $W(\omega^2)$
4. Si pas de zéros > 0 de $W(x) = 0$, stabilité du système $=$ stabilité pour $\tau = 0$ .Sinon, analyse de l'évolution du lieu des racines au voisinage des points $s = j\omega_i$
   $signe\ \mathrm{Re}\frac{ds}{d\tau}\Big|_{s=j\omega_i} = signe\ W'(\omega_i^2)$
5. Détermination des valeurs de τ pour lesquelles $s = j\omega_i$ est une racine caractéristique :
   $e^{j\omega_i\tau} = -\frac{n(-j\omega_i)}{d(-j\omega_i)}$

Exemple 1

$$p(s,\tau) = (s+2)^2 - \frac{1}{4}e^{-\tau s} = 0$$

Stabilité en fonction de τ ?

1. $\tau = 0$: $\quad p(s,0) = (s+2)^2 - \frac{1}{4} = \left(s+\frac{5}{2}\right)\left(s+\frac{3}{2}\right)$

   2 pôles stables.

2. calcul de W :
$$\begin{aligned} W(\omega^2) &= (j\omega+2)^2(-j\omega+2)^2 - \frac{1}{4^2} \\ &= (\omega^2+4)^2 - \frac{1}{4^2} \\ &= (\omega^2+\frac{15}{4})(\omega^2+\frac{17}{4}) \end{aligned}$$

3. W n'a pas de racine positive $\Longrightarrow$ Stabilité asymptotique $\forall\tau$.

Exemple 1

$$p(s,\tau) = (s+2)^2 - \frac{1}{4}e^{-\tau s} = 0$$

Stabilité en fonction de τ ?

1. $\tau = 0$: $\quad p(s,0) = (s+2)^2 - \frac{1}{4} = \left(s+\frac{5}{2}\right)\left(s+\frac{3}{2}\right)$

   2 pôles stables.

2. calcul de W : $$\begin{aligned} W(\omega^2) &= (j\omega+2)^2(-j\omega+2)^2 - \frac{1}{4^2} \\ &= (\omega^2+4)^2 - \frac{1}{4^2} \\ &= (\omega^2+\frac{15}{4})(\omega^2+\frac{17}{4}) \end{aligned}$$

3. W n'a pas de racine positive $\Longrightarrow$ Stabilité asymptotique $\forall\tau$.

Exemple 1

$$p(s,\tau) = (s+2)^2 - \frac{1}{4}e^{-\tau s} = 0$$

Stabilité en fonction de τ ?

1. $\tau = 0$: $\quad p(s,0) = (s+2)^2 - \frac{1}{4} = \left(s+\frac{5}{2}\right)\left(s+\frac{3}{2}\right)$

   2 pôles stables.
2. calcul de W : $$\begin{aligned} W(\omega^2) &= (j\omega+2)^2(-j\omega+2)^2 - \frac{1}{4^2} \\ &= (\omega^2+4)^2 - \frac{1}{4^2} \\ &= (\omega^2+\frac{15}{4})(\omega^2+\frac{17}{4}) \end{aligned}$$
3. W n'a pas de racine positive $\Longrightarrow$ Stabilité asymptotique $\forall\tau$.

Exemple 1

$$p(s,\tau) = (s+2)^2 - \frac{1}{4}e^{-\tau s} = 0$$

Stabilité en fonction de τ ?

1. $\tau = 0$: $\quad p(s,0) = (s+2)^2 - \frac{1}{4} = \left(s+\frac{5}{2}\right)\left(s+\frac{3}{2}\right)$

   2 pôles stables.
2. calcul de W : $$\begin{aligned} W(\omega^2) &= (j\omega+2)^2(-j\omega+2)^2 - \frac{1}{4^2} \\ &= (\omega^2+4)^2 - \frac{1}{4^2} \\ &= (\omega^2+\frac{15}{4})(\omega^2+\frac{17}{4}) \end{aligned}$$
3. W n'a pas de racine positive $\Longrightarrow$ Stabilité asymptotique $\forall\tau$.

Exemple 2 $$p(s,\tau) = s^3 + s^2 + 2s + 1 + e^{-\tau s}$$

Stabilité en fonction de τ ?

1. $\tau = 0$: $\quad p(s,0) = s^3 + s^2 + 2s + 2 = (s+1)(s^2+2)$
   1 racine stable (-1) & 2 racines imaginaires pures $(\pm j\sqrt{2})$
2. calcul de W
3. Trois zéros réels positifs : $s = 0$, $s = \pm j\sqrt{2}$ et $s = \pm j$
4. Évolution des racines
   - $s = \pm j\sqrt{2} \quad : W'(2) > 0 \Rightarrow \mathrm{Re}\frac{ds}{d\tau}\Big|_{\pm j\sqrt{2}} > 0$
     Sens déstabilisant
   - $s = \pm j \quad : W'(1) < 0 \Rightarrow \mathrm{Re}\frac{ds}{d\tau}\Big|_{\pm j} < 0$
     Sens stabilisant

Exemple 2 $\quad p(s,\tau) = s^3 + s^2 + 2s + 1 + e^{-\tau s}$

Stabilité en fonction de τ ?

1. $\tau = 0$: $\quad p(s,0) = s^3 + s^2 + 2s + 2 = (s+1)(s^2+2)$
   1 racine stable (-1) & 2 racines imaginaires pures $(\pm j\sqrt{2})$
2. calcul de W
3. Trois zéros réels positifs : $s = 0$, $s = \pm j\sqrt{2}$ et $s = \pm j$
4. Évolution des racines
   - $s = \pm j\sqrt{2}$: $W'(2) > 0 \Rightarrow \mathrm{Re}\frac{ds}{d\tau}\Big|_{\pm j\sqrt{2}} > 0$
     Sens déstabilisant
   - $s = \pm j$: $W'(1) < 0 \Rightarrow \mathrm{Re}\frac{ds}{d\tau}\Big|_{\pm j} < 0$
     Sens stabilisant

Exemple 2 $$p(s,\tau) = s^3 + s^2 + 2s + 1 + e^{-\tau s}$$

Stabilité en fonction de τ ?

1. $\tau = 0$: $\quad p(s,0) = s^3 + s^2 + 2s + 2 = (s+1)(s^2+2)$
   1 racine stable (-1) & 2 racines imaginaires pures $(\pm j\sqrt{2})$
2. calcul de W

$$\begin{aligned} W(\omega^2) &= \left|-j\omega^3 + 2j\omega - \omega^2 + 1\right|^2 - 1 \\ &= \omega^2(\omega^2 - 1)(\omega^2 - 2) \end{aligned}$$

3. Trois zéros réels positifs : $s = 0$, $s = \pm j\sqrt{2}$ et $s = \pm j$
4. Évolution des racines
   - $s = \pm j\sqrt{2}$: $W'(2) > 0 \Rightarrow \mathrm{Re}\left.\frac{ds}{d\tau}\right|_{\pm j\sqrt{2}} > 0$
     Sens déstabilisant

Exemple 2 $\quad p(s,\tau) = s^3 + s^2 + 2s + 1 + e^{-\tau s}$

Stabilité en fonction de τ ?

1. $\tau = 0$: $\quad p(s,0) = s^3 + s^2 + 2s + 2 = (s+1)(s^2+2)$
   1 racine stable (-1) & 2 racines imaginaires pures $(\pm j\sqrt{2})$
2. calcul de $W \quad = \omega^2(\omega^2-1)(\omega^2-2)$
3. Trois zéros réels positifs : $s = 0$, $s = \pm j\sqrt{2}$ et $s = \pm j$
   0 n'est pas une racine caract. $\Rightarrow$ à ignorer
4. Évolution des racines
   - $s = \pm j\sqrt{2} \quad : W'(2) > 0 \Rightarrow \mathrm{Re}\frac{ds}{d\tau}\Big|_{\pm j\sqrt{2}} > 0$
     Sens déstabilisant

Exemple 2 $\quad p(s,\tau) = s^3 + s^2 + 2s + 1 + e^{-\tau s}$

Stabilité en fonction de τ ?

1. $\tau = 0$: $\quad p(s,0) = s^3 + s^2 + 2s + 2 = (s+1)(s^2+2)$
   1 racine stable (-1) & 2 racines imaginaires pures $(\pm j\sqrt{2})$
2. calcul de $W \quad = \omega^2(\omega^2-1)(\omega^2-2)$
3. Trois zéros réels positifs :$s = 0$, $s = \pm j\sqrt{2}$ et $s = \pm j$
4. Évolution des racines
   - $s = \pm j\sqrt{2} \quad : W'(2) > 0 \Rightarrow \mathrm{Re}\frac{ds}{d\tau}\Big|_{\pm j\sqrt{2}} > 0$
     Sens déstabilisant
   - $s = \pm j \quad : W'(1) < 0 \Rightarrow \mathrm{Re}\frac{ds}{d\tau}\Big|_{\pm j} < 0$
     Sens stabilisant

Exemple 2 $\quad p(s,\tau) = s^3 + s^2 + 2s + 1 + e^{-\tau s}$

Stabilité en fonction de τ ?

1. $\tau = 0$: $\quad p(s,0) = s^3 + s^2 + 2s + 2 = (s+1)(s^2+2)$
   1 racine stable (-1) & 2 racines imaginaires pures $(\pm j\sqrt{2})$
2. calcul de $W \quad = \omega^2(\omega^2-1)(\omega^2-2)$
3. Trois zéros réels positifs : $s = 0$, $s = \pm j\sqrt{2}$ et $s = \pm j$
4. Évolution des racines
   - $s = \pm j\sqrt{2} \quad : W'(2) > 0 \Rightarrow \mathrm{Re}\frac{ds}{d\tau}\Big|_{\pm j\sqrt{2}} > 0$
     Sens déstabilisant
   - $s = \pm j \quad : W'(1) < 0 \Rightarrow \mathrm{Re}\frac{ds}{d\tau}\Big|_{\pm j} < 0$
     Sens stabilisant

5. Valeur des retards critiques :

- $s = \pm j\sqrt{2} : p(j\sqrt{2}, \tau) = 0 \Leftrightarrow e^{-j\tau\sqrt{2}} = 1$
  $\Leftrightarrow \tau = k\pi\sqrt{2}, \quad k = 1, 2, \ldots$
- $s = \pm j : p(j, \tau) = 0 \Leftrightarrow e^{-j\tau} = -j$
  $\Leftrightarrow \tau = (2k + \frac{1}{2})\pi, \quad k = 1, 2, \ldots$

Asymptotiquement stable ssi

$$\frac{\pi}{2} < \tau < \pi\sqrt{2} \quad \text{ou} \quad \frac{5\pi}{2} < \tau < 2\pi\sqrt{2}$$

5. Valeur des retards critiques :

- $s = \pm j\sqrt{2} : p(j\sqrt{2}, \tau) = 0 \Leftrightarrow e^{-j\tau\sqrt{2}} = 1$
  $\Leftrightarrow \tau = k\pi\sqrt{2}, \quad k = 1, 2, \dots$
- $s = \pm j : p(j, \tau) = 0 \Leftrightarrow e^{-j\tau} = -j$
  $\Leftrightarrow \tau = (2k + \frac{1}{2})\pi, \quad k = 1, 2, \dots$

Asymptotiquement stable ssi

$$\frac{\pi}{2} < \tau < \pi\sqrt{2} \quad \text{ou} \quad \frac{5\pi}{2} < \tau < 2\pi\sqrt{2}$$

5. Valeur des retards critiques :
   - $s = \pm j\sqrt{2} : p(j\sqrt{2}, \tau) = 0 \Leftrightarrow e^{-j\tau\sqrt{2}} = 1$
     $\Leftrightarrow \tau = k\pi\sqrt{2}, \quad k = 1, 2, \ldots$
   - $s = \pm j : p(j, \tau) = 0 \Leftrightarrow e^{-j\tau} = -j$
     $\Leftrightarrow \tau = (2k + \frac{1}{2})\pi, \quad k = 1, 2, \ldots$

Asymptotiquement stable ssi

$$\frac{\pi}{2} < \tau < \pi\sqrt{2} \quad \text{ou} \quad \frac{5\pi}{2} < \tau < 2\pi\sqrt{2}$$

Possibilité d'étendre la technique aux cas des systèmes à retards commensurables

annexes

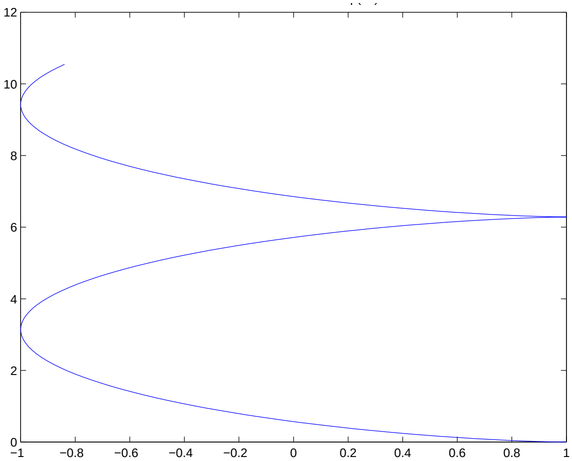
Autres méthodes possibles

Le principe de l'argument s'applique aussi pour les systèmes à retards :
$\Longrightarrow$ critère de Nyquist (idem cas sans retard)
$\Longrightarrow$ critère de Mikhailov :

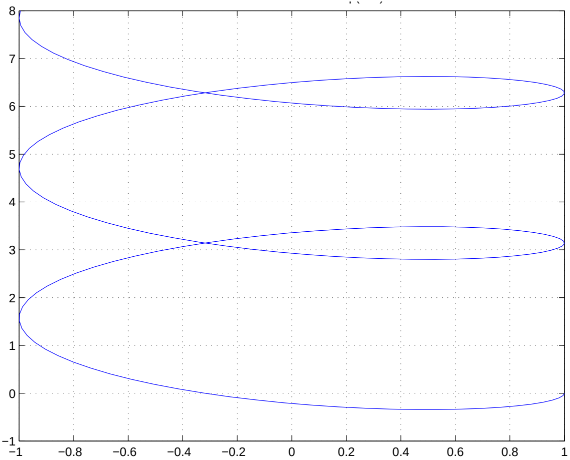
Théorème

Un système linéaire stationnaire retardé d'ordre n et de fonction caractéristique $p(s)$ est asymptotiquement stable si la variation de l'argument (détermination principale) de la fonction $p(j\omega)$ lorsque ω varie de 0 à $+\infty$ est égale à $n\pi/2$ et $\forall \omega \geq 0$, $p(j\omega) \neq 0$ (c-à-d : pas de racine caractéristique imaginaire pure)

Exemple : lieu de Mikhailov de $s + e^{-s}$



Exemple : lieu de Mikhailov de $s + e^{-2s}$



Contenu

Seconde méthode de Lyapunov

Insuffisance de la théorie classique

- Système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) - x_1(t)x_2^2(t-\tau_1) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) - x_2(t)x_1^2(t-\tau_2) \end{cases}$$

- Fonction de Lyapunov : $V(x) = x_1^2 + x_2^2$
- Dérivée le long des solutions :

$$\frac{dV}{dt}(x(t)) = -2\left[x_1^2(t)x_2^2(t-\tau_1) + x_2^2(t)x_1^2(t-\tau_2)\right] \leq 0$$

Seconde méthode de Lyapunov

Insuffisance de la théorie classique

- Système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) - x_1(t)x_2^2(t-\tau_1) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) - x_2(t)x_1^2(t-\tau_2) \end{cases}$$

- Fonction de Lyapunov : $V(x) = x_1^2 + x_2^2$
- Dérivée le long des solutions :

$$\frac{dV}{dt}(x(t)) = -2\left[x_1^2(t)x_2^2(t-\tau_1) + x_2^2(t)x_1^2(t-\tau_2)\right] \leq 0$$

Seconde méthode de Lyapunov

Insuffisance de la théorie classique

- Système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) - x_1(t)x_2^2(t-\tau_1) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) - x_2(t)x_1^2(t-\tau_2) \end{cases}$$

- Fonction de Lyapunov : $V(x) = x_1^2 + x_2^2$
- Dérivée le long des solutions :

$$\frac{dV}{dt}(x(t)) = -2\left[x_1^2(t)x_2^2(t-\tau_1) + x_2^2(t)x_1^2(t-\tau_2)\right] \leq 0$$

Seconde méthode de Lyapunov

Insuffisance de la théorie classique

- Système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) - x_1(t)x_2^2(t-\tau_1) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) - x_2(t)x_1^2(t-\tau_2) \end{cases}$$

- Fonction de Lyapunov : $V(x) = x_1^2 + x_2^2$
- Dérivée le long des solutions :

$$\frac{dV}{dt}(x(t)) = -2\left[x_1^2(t)x_2^2(t-\tau_1) + x_2^2(t)x_1^2(t-\tau_2)\right] \leq 0$$

$\Rightarrow x = 0$ est stable.

Problème

Valable uniquement pour une classe restreinte de systèmes ! ! !

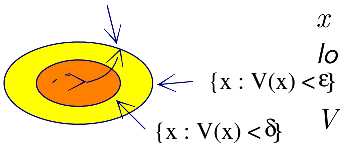
Solutions

Extensions de la 2^{nde} méthode de Lyapunov :

- approche de Razumikhin,
- approche de Krasovskii.

Fonctions de Lyapunov-Razumikhin : Principe

Évolution des trajectoires vues dans $\mathbb{R}^n \Rightarrow$ F. de Lyapunov classique $V(t,x)$,
mais $\dot{V}(x(t)) \leq 0$ exigée seulement pour certaines trajectoires :



Théorème (Razumikhin, 1956)

$x = 0$ est stable si $\dot{V}(x(t)) \leq 0$ le long de toute solution $x(t)$ telle que

$$V(x(t+s)) \leq V(x(t)), \forall s \in [-\tau, 0].$$

CS de stabilité asymptotique uniforme

Théorème (Krasovskii 1956, Hale 1977)

S'il existe une fonction $V(t,x)$ telle que

- $u(\|x\|) \leq V(t,x) \leq v(\|x\|), \quad \forall t \geq t_0, \forall x \in \mathbb{R}^n$ *où* u *et* $v > 0$,
- $\dot{V}(t,\varphi) \leq -w(\|\varphi(0)\|)$, *pour tout* $\varphi \in \mathcal{C}$ *tel que*

$$V(t+s,\varphi(s)) \leq p(V(t,\varphi(0))), \quad \forall s \in [-\tau, 0]$$

où p *et* w *sont des fonctions positives, croissantes t.q., pour* $s > 0$, $w(s) > 0$ *et* $p(s) > s$,

alors, $x = 0$ *de (S) est U.A.S.*
G.U.A.S. si $u(s) \to \infty$ *lorsque* $s \to \infty$.

Exemple

$$\dot{x}(t) = -ax(t) - bx(t-\tau), \quad x(t) \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow V(x) = x^2$

Exemple

$$\dot{x}(t) = -ax(t) - bx(t-\tau), \quad x(t) \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow V(x) = x^2$$

$$\dot{V}(x(t)) = 2x(t)\left[-ax(t) - bx(t-\tau)\right]$$

Exemple

$$\dot{x}(t) = -ax(t) - bx(t-\tau), \quad x(t) \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow V(x) = x^2$

$$\dot{V}(x(t)) = 2x(t)\left[-ax(t) - bx(t-\tau)\right]$$

Avec $p(s) = q^2 s$ et $q > 1$.
Si

$$V(x(t-\tau)) \leq p(V(x(t))),$$
$$\Longleftrightarrow |x(t-\tau)| \leq q\,|x(t)|\,,$$

alors $$\dot{V}(x(t)) \leq -2(a - q\,|b|)\,x^2(t).$$

Exemple

$$\dot{x}(t) = -ax(t) - bx(t-\tau), \quad x(t) \in \mathbb{R}$$

$\Rightarrow V(x) = x^2$

$$\dot{V}(x(t)) = 2x(t)\left[-ax(t) - bx(t-\tau)\right]$$

Avec $p(s) = q^2 s$ et $q > 1$.
Si

$$V(x(t-\tau)) \leq p(V(x(t))),$$
$$\Longleftrightarrow |x(t-\tau)| \leq q\,|x(t)|\,,$$

alors $\dot{V}(x(t)) \leq -2(a - q\,|b|)\,x^2(t).$

$\Rightarrow$ si $a > |b| \Rightarrow x = 0$ est U.A.S i.d.r.

Approche de Lyapunov-Krasovskii

Évolution des trajectoires vues dans $\mathcal{C}$: $\Rightarrow V(t,x)$ n'est plus une fonction mais une fonctionnelle $\mathcal{V}(t,x_t)$.
$\mathcal{V}(t,\varphi)$ doit posséder les propriétés suivantes :

1. être définie positive :

$$\mathcal{V}(t,\varphi) \geq u(\|\varphi\|_{\mathcal{C}}), \forall \varphi \in \mathcal{C},\ t \geq t_0$$

   (avec $u(.)$ continue et définie positive)

2. tendre uniformément vers 0 lorsque $\varphi \to 0$:

$$\mathcal{V}(t,\varphi) \leq v(\|\varphi\|_{\mathcal{C}}), \forall \varphi \in \mathcal{C},\ t \geq t_0$$

CNS de stabilité asymptotique uniforme

Théorème

La solution $x = 0$ est U.A.S. si, et seulement si, il existe une fonctionnelle $\mathcal{V}$ vérifiant les 2 propriétés précédentes et telle que

$$\dot{\mathcal{V}}(t, x_t) \leq -w(\|x_t\|_{\mathcal{C}}),$$

où w continue et définie positive, alors Si, de plus, u et v sont non bornées, la propriété de stabilité est globale.

où

$$\dot{\mathcal{V}}(t, x_t) \triangleq \lim_{\varepsilon \to 0^+} \sup \frac{\mathcal{V}(t+\varepsilon, x_{t+\varepsilon}) - \mathcal{V}(t, x_t)}{\varepsilon}$$

Condition pratique de stabilité asymptotique uniforme

Résultat purement théorique :
En pratique, on utilisera le résultat suivant

Théorème

S'il existe une fonctionnelle $\mathcal{V}$ telle que :

- $u(\|\varphi(0)\|) \leq \mathcal{V}(t,\varphi) \leq v(\|\varphi\|_{\mathcal{C}}), \forall \varphi \in \mathcal{C},\ t \geq t_0$, *et*
- $\dot{\mathcal{V}}(t,x_t) \leq -w(\|x(t)\|)$,

alors la solution $x = 0$ est U.A.S.

Exemple simple

$$\dot{x}(t) = -ax(t) - bx(t-\tau)$$

$\Rightarrow \mathcal{V}(\varphi) = \varphi^2(0) + |b| \int_{-\tau}^{0} \varphi^2(t+s)\,\mathrm{d}s$

Exemple simple

$$\dot{x}(t) = -ax(t) - bx(t-\tau)$$

$\Rightarrow \mathcal{V}(\varphi) = \varphi^2(0) + |b| \int_{-\tau}^{0} \varphi^2(t+s)\,\mathrm{d}s$
Conditions 1) et 2) remplies :

$$\varphi^2(0) \leq \mathcal{V}(\varphi) \leq (1 + |b|\,\tau)\,\|\varphi\|^2$$

Exemple simple

$$\dot{x}(t) = -ax(t) - bx(t-\tau)$$

$\Rightarrow \mathcal{V}(\varphi) = \varphi^2(0) + |b| \int_{-\tau}^{0} \varphi^2(t+s)\,\mathrm{d}s$
Conditions 1) et 2) remplies :

$$\varphi^2(0) \leq \mathcal{V}(\varphi) \leq (1 + |b|\,\tau)\,\|\varphi\|^2$$

Expression de la dérivée $\dot{\mathcal{V}}$:

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}}(x_t) &= -2x(t)\left[ax(t) + bx(t-\tau)\right] \\ &\quad + |b|\left[x^2(t) - x^2(t-\tau)\right] \\ \dot{\mathcal{V}}(x_t) &\leq -2(a - |b|)x^2(t) \end{aligned}$$

$\Rightarrow x = 0$ est U.A.S i.d.r. si $a > |b|$.

Généralisation

$$(S) \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau), \text{ avec } x(t) \in \mathbb{R}^n.$$

Fonctionnelle : $\mathcal{V}(\varphi) = \varphi^T(0)P\varphi(0) + \int_{-\tau}^{0} \varphi^T(s)S\varphi(s)\,\mathrm{d}s$
avec $P,\ S \succ 0$.

Généralisation

$$(S) \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau), \text{ avec } x(t) \in \mathbb{R}^n.$$

Fonctionnelle : $\mathcal{V}(\varphi) = \varphi^T(0)P\varphi(0) + \int_{-\tau}^{0} \varphi^T(s)S\varphi(s)\,\mathrm{d}s$
avec $P,\ S \succ 0$.

$$\Rightarrow \quad \boxed{\dot{\mathcal{V}}(x_t) = y^T(t)Qy(t)}$$

$$\text{avec } Q = \begin{bmatrix} A^TP + PA + S & PB \\ B^TP & -S \end{bmatrix} \text{ et } y(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t-\tau) \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ Stabilité asymptotique i.d.r. si $Q \prec 0$ (LMI)

Quelques mots sur les LMI
Définition

LMI : Linear Matrix Inequality

Condition de la forme :

$$F(x) = F_0 + x_1 F_1 + \cdots + x_n F_n \prec 0$$

où

- $x = [x_1 \ldots x_n]^T \in \mathbb{R}^n$
- $F_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $F_i = F_i^T$, $i = 0, \ldots, n$

Remarque : Un ensemble de LMI $F_1(x) \prec 0, \ldots, F_m(x) \prec 0$ peut être mis sous la forme d'une unique LMI $F(x) \prec 0$ en posant $F(x) = diag\,(F_1(x), \ldots, F_m(x))$

Quelques mots sur les LMI (suite)
LMI avec variables matricielles

Exemple
Trouver $P \prec 0$ t.q.

$$A^T P + PA \prec 0$$

LMI ?

☞ Soit $(P_1, \ldots P_m)$ une base de l'ens. des matrices symétriques

$$P = x_1 P_1 + \cdots + x_m P_m \Rightarrow A^T P + PA = x_1 F_1 + \cdots + x_m F_m$$

avec

$$F_i = A^T P_i + P_i A$$

On parle alors de LMI en P

Quelques mots sur les LMI (suite)

Quelques résultats utiles

Théorème (Congruence)

Si X est une matrice régulière, alors $X^T M X \succ 0 \Leftrightarrow T \succ 0$

Quelques mots sur les LMI (suite)

Quelques résultats utiles

Théorème (Congruence)

Si X est une matrice régulière, alors $X^T M X \succ 0 \Leftrightarrow T \succ 0$

Théorème (Complément de Schur)

Soient $Q(x) = Q^T(x)$, $R(x) = R^T(x)$, $S(x)$ 3 matrices affines en x , alors

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S^T(x) & R(x) \end{bmatrix} \succ 0 \Leftrightarrow \begin{cases} R(x) \succ 0 \\ Q(x) - S(x)R^{-1}(x)S^T(x) \succ 0 \end{cases}$$

Quelques mots sur les LMI (suite)

Quelques résultats utiles

Théorème (Congruence)

Si X *est une matrice régulière, alors* $X^TMX \succ 0 \Leftrightarrow T \succ 0$

Théorème (Complément de Schur)

Soient $Q(x) = Q^T(x)$, $R(x) = R^T(x)$, $S(x)$ *3 matrices affines en* x *, alors*

$$\begin{bmatrix} Q(x) & S(x) \\ S^T(x) & R(x) \end{bmatrix} \succ 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} R(x) \succ 0 \\ Q(x) - S(x)R^{-1}(x)S^T(x) \succ 0 \end{array} \right.$$

Généralisation :

$$\begin{bmatrix} Q & S & U \\ S^T & R & 0 \\ U^T & 0 & T \end{bmatrix} \succ 0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} Q - SR^{-1}S^T - UT^{-1}U^T \succ 0 \\ R, S \succ 0 \end{array} \right.$$

Quelques mots sur les LMI (fin)
Deux inégalités utiles

Théorème (inégalité classique)

Si $X \succ 0$, *alors*, $\forall a, b \in \mathbb{R}^n$

$$\pm 2a^T b \leq a^T X a + b_T X^{-1} b$$

Preuve : Développer $(a + X^{-1}b)^T X (a + X^{-1}b)$

Quelques mots sur les LMI (fin)

Deux inégalités utiles

Théorème (inégalité classique)

Si $X \succ 0$, *alors*, $\forall a, b \in \mathbb{R}^n$

$$\pm 2a^T b \leq a^T X a + b_T X^{-1} b$$

Preuve : Développer $(a + X^{-1}b)^T X (a + X^{-1}b)$

Théorème (inégalité de Park)

Si $X, M \in \mathbb{R}^{n\times n}$, *avec* $X \succ 0$,*alors*, $\forall a, b \in \mathbb{R}^n$

$$\pm 2a^T b \leq (a + Mb)^T X (a + Mb) + b^T (X^{-1} + 2M) b$$

Preuve : Remplacer a par $a + Mb$ dans le Th. précédent.

Prise en compte de la valeur du retard

Hyp. : (S) asymp. stable pour $\tau = 0 \Rightarrow \mathcal{A} = A + B$ Hurwitz

Problème

Chercher une borne τ^* t.q. stab. asympt. $\forall \tau \leq \tau^*$.

Prise en compte de la valeur du retard

Hyp. : (S) asymp. stable pour $\tau = 0 \Rightarrow \mathcal{A} = A + B$ Hurwitz

Problème

Chercher une borne τ^* t.q. stab. asympt. $\forall \tau \leq \tau^*$.

Idée

Transformation du modèle à l'aide de la formule de Leibniz-Newton :

$$x(t) - x(t-\tau) = \int_{-\tau}^{0} \dot{x}(t+s)\,\mathrm{d}s$$

(S)$\Rightarrow$

$$\dot{x}(t) = (A+B)x(t) - B\int_{t-\tau}^{t} (Ax(s) + Bx(s-\tau))\,\mathrm{d}s$$

Fonctionnelle (exemple)

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(\varphi) &= \varphi^T(0)P\varphi(0) + \int_{-\tau}^{0} \varphi^T(s)S\varphi(s)\,\mathrm{d}s \\ &+ \int_{-\tau}^{0}\int_{s}^{0} \varphi^T(u)R_1\varphi(u)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}s \\ &+ \int_{-2\tau}^{-\tau}\int_{s}^{0} \varphi^T(u)R_2\varphi(u)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}s\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \dot{\mathcal{V}}(x_t) = x^T(t)Qx(t) + \text{ termes negatifs}$$

(s) est asympt. stable si $Q = Q(A, B, P, S, R_1, R_2, \tau) \prec 0$.
$\Rightarrow$ peut être testé par la réalisabilité d'une LMI

$$\begin{bmatrix} X & \tau^* PBA & \tau^* PB^2 \\ \tau^* A^T B^T P & -\tau^* R_1 & 0 \\ \tau^* B^{2T} P & 0 & -\tau^* R_2 \end{bmatrix} \prec 0$$

avec $X = A^T P + PA + S + \tau^*(R_1 + R_2)$

Approche systèmes singuliers (E. Fridman)

$$\dot{x}(t) = y(t)$$
$$y(t) = Ax(t) + A_d x(t-\tau) = (A + A_d)x(t) - A_d \int_{t-\tau}^{t} y(s)\,\mathrm{d}s$$

Fonctionnelle de Lyapunov-Krasovskii :

$$\mathcal{V}(x_t) = \mathcal{X}^T(t)EP\mathcal{X}(t) + \int_{-\tau}^{0}\int_{t+\theta}^{t} y^T(s)Ry(s)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}\theta$$

avec $\mathcal{X} = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$, $E = diag(I_n, 0)$, $P = \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ P_2 & P_3 \end{bmatrix}$, et
$P_1, R > 0 \Rightarrow$ condition de stabilité

$$\begin{bmatrix} A_T^T P_2 + P_2^T A_T & P_1 - P_2^T + A_T^T P_3 & \tau P_2^T A_d \\ P_1 - P_2 + P_3^T A_T & -P_3 - P_3^T + \tau R & \tau P_3^T A_d \\ \tau A_d^T P_2 & \tau A_d P_3 & -\tau R \end{bmatrix} < 0$$

avec $A_T = A + A_d$

Critères “conservatifs” ! $\exists\mathcal{V}$ donnant des C.N.S de stabilité ?

Critères "conservatifs" ! $\exists\mathcal{V}$ donnant des C.N.S de stabilité ? $\Rightarrow$ Oui (Infante & Castelan, 1978), mais ...

Critères "conservatifs" ! $\exists\mathcal{V}$ donnant des C.N.S de stabilité ?$\Rightarrow$ Oui (Infante & Castelan, 1978), mais ... fonctionnelle du type :

$$\mathcal{V}(\varphi) = \varphi^T(0)\left[M + Q(0)\right]\varphi(0) + e^{\delta\tau}\int_{-\tau}^{0}\varphi^T(s)e^{2\delta s}R\varphi(s)\,ds$$
$$+2\varphi^T(0)\int_{-\tau}^{0}Q(s+\tau)e^{\delta(s+\tau)}B\varphi(s)\,ds$$
$$+2\int_{-\tau}^{0}\int_{\alpha}^{0}\varphi^T(s)B^TQ(u-s)e^{\delta(s+u+2\tau)}\varphi(u)\,du\,ds$$

où $\delta \in \mathbb{R}$, M, $R \succ 0$ et $Q(\alpha)$ pour $\alpha \in [0,\tau]$ t.q.

$$Q'(\alpha) = (A^T + \delta I)Q(\alpha) + e^{\delta\tau}B^TQ^T(\tau-\alpha)$$

avec $Q(0) = Q_0$ arbitraire mais symétrique.
Stabilité asymptotique ssi $\mathcal{V}$ est définie positive.

Méthode de K. Gu (1997) : Discrétisation

Principe

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(\varphi) &= \varphi^T(0)P\varphi(0) + \int_{-\tau}^{0} \varphi^T(s)S(s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s \\ &+2\varphi^T(0)\int_{-\tau}^{0} Q(s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s \\ &+\int_{-\tau}^{0}\int_{-r}^{0} \varphi^T(s)R(s,u)\varphi(u)\,\mathrm{d}u\mathrm{d}s\end{aligned}$$

S, Q et R matrices constantes par morceaux

$\Rightarrow$ paramétrisation en dim. finie de $\mathcal{V}$.

Conditions de stabilité exprimées en terme de LMI.

Contenu

Définitions

Cas des systèmes linéaires stationnaires

Équation et fonction caractéristiques

Technique de la D-partition

Méthode de Walton et Marshall

Autres méthodes

Seconde méthode de Lyapunov

Méthode des fonctions de Lyapunov-Razumikhin

Méthode des fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii

Principe de comparaison

Systèmes de comparaison

Idée

Analyser la stabilité d'un système complexe (A) via un autre plus simple (B).

Exemple (Systèmes de comparaison scalaires)

$V(x)$ fonction définie positive t.q. le long des solutions de (A)

$$\dot{V}(x(t)) \leq r(t, V(x(t)))$$

alors $V(x(t)) \leq y(t)$ solution de

$$(B) \quad \dot{y}(t) = r(t, y(t)), \quad \text{avec } y(0) \geq V(x(0))$$

Stabilité (asympt.) de (B) $\Rightarrow$ stabilité (asympt.) de (A).

Systèmes de comparaison

Idée

Analyser la stabilité d'un système complexe (A) via un autre plus simple (B).

Exemple (Systèmes de comparaison scalaires)

$V(x)$ fonction définie positive t.q. le long des solutions de (A)

$$\dot{V}(x(t)) \leq r(t, V(x(t)))$$

alors $V(x(t)) \leq y(t)$ solution de

$$(B) \quad \dot{y}(t) = r(t, y(t)), \quad \text{avec } y(0) \geq V(x(0))$$

Stabilité (asympt.) de (B) $\Rightarrow$ stabilité (asympt.) de (A).

Systèmes de comparaison vectoriels

Soit $V(x) = [V_1(x), \ldots, V_k(x)]^T$ telle que

- $V_i(x) \geq 0, \, \forall x,$
- $\|V(x)\|$ soit déf. positive.

$$(S) : \dot{x}(t) = F(t, x_t) \xrightarrow{y(t)=V(x(t))} \dot{y}(t) \leq G(t, y_t)$$

Si

$$V(x(t)) \leq z(t), \text{ pour } t \in [t_0-\tau, t_0] \Rightarrow V(x(t)) \leq z(t), \quad \forall t \geq t_0$$

Alors, $\dot{z}(t) = G(t, z_t)$ est un *système de comparaison* de (S)

Conditions sur (G) = *principe de comparaison*

Systèmes de comparaison vectoriels

Soit $V(x) = [V_1(x), \ldots, V_k(x)]^T$ telle que

- $V_i(x) \geq 0$, $\forall x$,
- $\| V(x) \|$ soit déf. positive.

$$(S) : \dot{x}(t) = F(t, x_t) \xrightarrow{y(t)=V(x(t))} \dot{y}(t) \leq G(t, y_t)$$

Si

$$V(x(t)) \leq z(t), \text{ pour } t \in [t_0-\tau, t_0] \Rightarrow V(x(t)) \leq z(t), \quad \forall t \geq t_0$$

Alors, $\dot{z}(t) = G(t, z_t)$ est un *système de comparaison* de (S)

Conditions sur (G) = *principe de comparaison*

Systèmes de comparaison vectoriels

Soit $V(x) = [V_1(x), \ldots, V_k(x)]^T$ telle que

- $V_i(x) \geq 0, \forall x,$
- $\| V(x) \|$ soit déf. positive.

$$(S) : \dot{x}(t) = F(t, x_t) \xrightarrow{y(t)=V(x(t))} \dot{y}(t) \leq G(t, y_t)$$

Si

$$V(x(t)) \leq z(t), \text{ pour } t \in [t_0 - \tau, t_0] \Rightarrow V(x(t)) \leq z(t), \quad \forall t \geq t_0$$

Alors, $\dot{z}(t) = G(t, z_t)$ est un *système de comparaison* de (S)

Conditions sur (G) = *principe de comparaison*

Principes de comparaison

Hypothèses :

$$G(t, z_t) = g(t, z(t), z(t-\tau)), \quad \text{ou} \quad G(t, z_t) = g(t, z(t), \bar{z}(t))$$

avec $\bar{z}_i(t) = \sup_{-\tau \le s \le 0} z_i(t+s)$.
Si

1. g est croissante en y :
   $y_j^1 \le y_j^2$ $(j = 1, \dots, k) \Rightarrow g_i(t, x, y^1) \le g_i(t, x, y^2)$
2. g est quasi-monotone croissante en x :
   $x_j^1 \le x_j^2$ (pour $j = 1, \dots, k$) et $x_i^1 = x_i^2$
   $\Rightarrow g_i(t, x^1, y) \le g_i(t, x^2, y)$

alors $\dot{z}(t) = G(t, z_t)$ est tel que toute solution de

$$\dot{y}(t) \le G(t, y_t)$$

vérifie

$$y(t) \le z(t), \quad t_0 - \tau \le t \le t_0 \Rightarrow y(t) \le z(t) \quad \forall t \ge t_0$$

Exemples de systèmes de comparaison

Système :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t-\tau)$$

☞ $V(x) = ||x|| \Rightarrow$
système de comparaison

$$\dot{z}(t) = \mu(A)z(t) + ||B||z(t-\tau)$$

Stabilité asymptotique si $\mu(A) + \|B\| < 0$
où

$$\mu(A) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \frac{\|I + \varepsilon A\| - 1}{\varepsilon}$$

(mesure de la matrice A associée à la norme $\| \ . \ \|$).

$$\mu_1(A) = \max_k \left(\mathrm{Re}(a_{kk}) + \sum_{i \neq k} |a_{ik}| \right)$$

$$\mu_\infty(A) = \mu_1(A^T), \quad \mu_2(A) = \frac{1}{2}\lambda_{\max}(A + A^*)$$

☞ $V(x) = [|x_1|, \ldots, |x_n|]^T \Rightarrow$ système de comparaison :

$$\dot{z}(t) = Mz(t) + Nz(t-\tau),$$

où

$$\begin{aligned} M &= \{m_{ij}\} : m_{ij} = \begin{cases} m_{ii} = a_{ii} \\ m_{ij} = |a_{ij}| & \text{if } j \neq i \end{cases} \\ N &= \{n_{ij}\} : n_{ij} = |b_{ij}| \end{aligned}$$

Stabilité asymptotique si $M + N =$ –M-matrice

☞ $V(x) = [|x_1|, \dots, |x_n|]^T \Rightarrow$
système de comparaison :

$$\dot{z}(t) = Mz(t) + Nz(t-\tau),$$

où

$$\begin{aligned} M &= \{m_{ij}\} : m_{ij} = \begin{cases} m_{ii} = a_{ii} & \\ m_{ij} = |a_{ij}| & \text{if } j \neq i \end{cases} \\ N &= \{n_{ij}\} : n_{ij} = |b_{ij}| \end{aligned}$$

Stabilité asymptotique si $M + N =$ –M-matrice

Définition (M-Matrice)

A est une M-matrice si $a_{ij} \leq 0$ pour $i \neq j$, et

$$a_{11} > 0, \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots, \det(A) > 0$$

Deuxième partie II

Synthèse d'une commande stabilisante

Contenu de la 2e partie

Introduction

Prédicteur de Smith et extensions

Approche algébrique

Contenu

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=0}^{q} A_i x(t-ih) + \sum_{i=0}^{q} B_i u(t-ih) \\ y(t) = \sum_{i=0}^{q} C_i x(t-ih) \end{cases}$$

Trouver un retour de sortie (dynamique) ou d'état $u(t)$ t.q. le système bouclé soit asympt. stable
2 méthodes :

- Approximation en dim. finie
  $\exp(-hs) \to \frac{N(s)}{D(s)}$ ex. approximants de Padé
  $$\frac{1-\frac{h}{2}s}{1+\frac{h}{2}s} = 1 - hs + \frac{h^2}{2}s^2 - \frac{h^3}{4}s^3 + O(s^4)$$
- conserver le système de dim. infinie

Première approche :

Problème :

$\Rightarrow$ syst. de grande dimension $\Rightarrow$ contrôleurs complexes

Ordre de l'approximation, stabilité numérique des algorithmes ?

Seconde approche :

- Besoin d'outils spécifiques
- Régulateurs de dimension infinie
  $\Rightarrow$ Implantation / approximation ?

Stabilisation : approches classiques

- Approche fréquentielle : D-partition : simple si peu de paramètres.
- Approche de Lyapunov : choix de la fonctionnelle ?

Exemple

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + A_d x(t-\tau) + Bu(t)$$

Retour stabilisant $u(t) = -Kx(t)$

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = [A - BK]x(t) + A_d x(t-\tau)$$

Avec LKF $\mathcal{V}(\varphi) = \varphi^T(0)P\varphi(0) + \int_{-\tau}^{0} \varphi^T(s)S\varphi(s)\,\mathrm{d}s$
Stabilité si

$$Q = \begin{bmatrix} (A-BK)^T P + P(A-BK) + S & PA_d \\ A_d^T P & -S \end{bmatrix} \prec 0$$

Difficile à résoudre : pas une LMI

$$diag(P^{-1}, P^{-1})\,Q\,diag(P^{-1}, P^{-1}) \Rightarrow$$

Condition de stabilité :

$$\begin{bmatrix} AQ + QA^T + BW + W^T B^T + Y & A_d^T Q \\ QA_d & -Y \end{bmatrix} \prec 0$$

avec $X = P^{-1},\ Y = P^{-1}SP^{-1},\ W = KP^{-1}$

LMI !

Existence de ce retour : $(A, B\ )$ commandable (nécessité ?)

Remarques : Performances ?

exemple

$$\dot{x}(t) = x(t) + u(t-1)$$

n'est pas stabilisable avec $u(t) = -kx(t)$

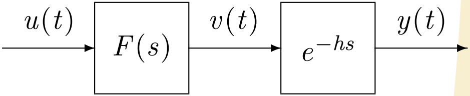
Structure de la commande ?

$\Rightarrow$ Besoin de connaître les propriétés structurelles du système.

Contenu

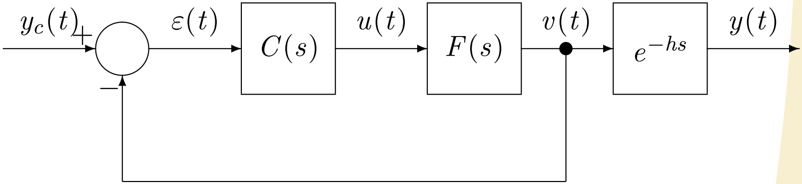
Prédicteur de Smith : approche E/S

Exemple : cas d'un système à retard sur le capteur



Prédicteur de Smith : approche E/S

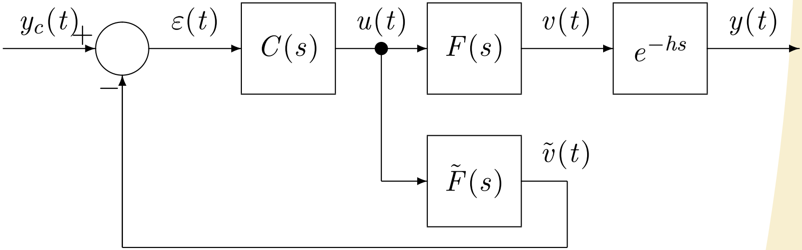
Exemple : cas d'un système à retard sur le capteur



Si on dispose d'un autre capteur non retardé : commande classique

Prédicteur de Smith : approche E/S

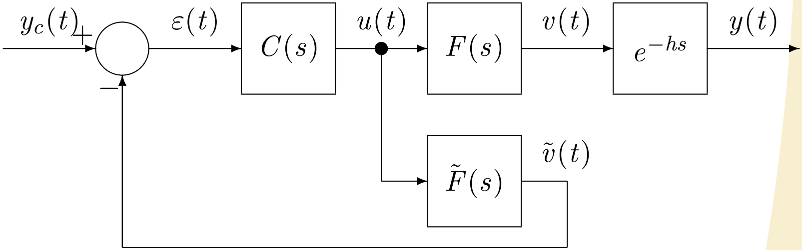
Exemple : cas d'un système à retard sur le capteur



On estime $v(t)$ à l'aide de $u(t)$ et du modèle

Prédicteur de Smith : approche E/S

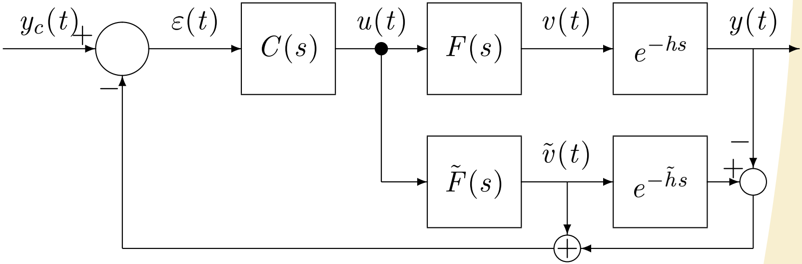
Exemple : cas d'un système à retard sur le capteur



Problème : pas de rétro-action (commande BO)

Prédicteur de Smith : approche E/S

Exemple : cas d'un système à retard sur le capteur



Fonction de transfert en BF

Modèle parfait ($F = \tilde{F}$, $h = \tilde{h}$),

$$\frac{Y(s)}{Y_c(s)} = \frac{CF}{1 + CF} e^{-hs}$$

sinon :

$$\frac{Y(s)}{Y_c(s)} = \frac{CF}{1 + C\tilde{F} + C(Fe^{-hs} - \tilde{F}e^{-\tilde{h}s})} e^{-hs}$$

Analyse de la stabilité en BF : cas d'un 1er ordre

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) + u(t) \\ y(t) = x(t-1) \end{cases} \qquad + \text{ régulateur P : } \quad C(s) = K.$$

Equations syst. BF :

$$\begin{array}{rcl} \dot{x}(t) & = & ax(t) + Kr(t) - Kx(t-1) - K\hat{v}(t) + K\hat{v}(t-1) \\ d\hat{v}/dt(t) & = & a\hat{v}(t) + Kr(t) - Kx(t-1) - K\hat{v}(t) + K\hat{v}(t-1) \end{array}$$

Equation caractéristique :

$$\det \begin{bmatrix} s - a + Ke^{-s} & K - Ke^{-s} \\ Ke^{-s} & s - a + K - Ke^{-s} \end{bmatrix} = (s-a)(s-a+K) = 0.$$

instable pour un système instable en BO !

Prédicteur de Smith : approche état

Système $$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t-\tau),$$

Idée : $$u(t) = -Kx(t+\tau) \Rightarrow \dot{x}(t) = (A - BK)x(t)$$

mais commande non causale !

$\Rightarrow$ prédiction non dynamique de $x(t+\tau)$:

$$\begin{aligned} x(t+\tau) &= e^{A\tau}x(t) + \int_t^{t+\tau} e^{A(t+\tau-s)}Bu(s-\tau)\,\mathrm{d}s \\ &= e^{A\tau}x(t) + \int_{-\tau}^{0} e^{-A\theta}Bu(t+\theta)\,\mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

$$\Rightarrow u(t) = -Ke^{A\tau}x(t) - K\int_{-\tau}^{0} e^{-A\theta}Bu(t+\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

(équation de Volterra de seconde espèce)
pôles BF $=$ valeurs propres de $A - BK$

Transformations équivalentes

Cas des systèmes avec retard sur l'entrée

Système :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - \tau),$$

Changement de variables :

$$z(t) = x(t) + \int_{t-\tau}^{t} e^{-A(s+\tau-t)} Bu(s)\,\mathrm{d}s$$

$$\Rightarrow \dot{z}(t) = Az(t) + e^{-A\tau} Bu(t).$$

(Kwon & Pearson 80, Artstein 82)
placement de pôles $\Longleftrightarrow$ $(A, e^{-A\tau}B)$ commandable (équivalent ici à (A, B) commandable.)

Systèmes à retards sur l'état

Système :

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-\tau) + B_0 u(t) + B_1 u(t-h),$$

Changement de variable

$$z(t) = x(t) + \int_{t-\tau}^{t} e^{A(t-\tau-\theta)} A_1 x(\theta)\, d\theta + \int_{t-h}^{t} e^{A(t-h-\theta)} B_1 u(\theta)\, d\theta$$

$$\Rightarrow \quad \dot{z}(t) = Az(t) + \left[B_0 + e^{-hA} B_1\right] u(t) - \left[A - A_0 - e^{-\tau A} A_1\right] x(t)$$

Si $\left\{ \begin{array}{l} A = A_0 + e^{-\tau A} A_1 \\ B \triangleq B_0 + e^{-hA} B_1 \end{array} \right. \Rightarrow \quad \dot{z}(t) = Az(t) + Bu(t)$

Résolution de « l' équation caractéristique matricielle »

$$A = A_0 - e^{-\tau A} A_1$$

basée sur la connaissance de n racines caractéristiques et leurs vecteurs propres à gauche

Fait :

$\sigma(A) \subset \Sigma \triangleq \{s \in \mathbb{C} : \det(sI - A_0 - e^{-\tau s} A_1) = 0\}$

$$A^T v = \lambda v \Rightarrow (A_0 + e^{-\tau\lambda} A_1)^T v = \lambda v$$

Supposons qu'il existe un ensemble

$$\Lambda = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_p, \bar{\sigma}_1, \ldots, \bar{\sigma}_p, \sigma_{2p+1} \ldots, \sigma_n\} \subset \Sigma$$

symétrique, contenant tous les pôles instables de (S) et que les σ_k soient tous de multiplicité 1.
Définissons

$$\begin{aligned} J &= diag(D_1, \ldots, D_p, \sigma_{2p+1} \ldots, \sigma_n) \\ Q &= [\mathrm{Re}(v_1)\ \mathrm{Im}(v_1) \ldots \mathrm{Im}(v_p)\ v_{2p+1} \ldots v_n] \end{aligned}$$

où $D_k = \begin{bmatrix} \mathrm{Re}(\sigma_k) & -\mathrm{Im}(\sigma_k) \\ \mathrm{Re}(\sigma_k) & \mathrm{Im}(\sigma_k) \end{bmatrix}$ pour $k = 1, \ldots, p$
v_k vecteur propre à gauche associé à σ_k
Alors, une solution de l'ECM est

$$A = Q^{-1} J Q$$

Contenu

Approche algébrique : modèles sur anneau

Système (Σ) à *retards commensurables*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=0}^{q} A_i x(t-ih) + \sum_{i=0}^{q} B_i u(t-ih) \\ y(t) = \sum_{i=0}^{q} C_i x(t-ih) \end{cases}$$

$x(t) \in \mathbb{R}^n$, $u(t) \in \mathbb{R}^m$, $y(t) \in \mathbb{R}^p$.

& lois de commande avec retards ponctuels :

$$u(t) = \sum_{i=0}^{N} F_i x(t-ih)$$

Modèles sur l'anneau $\mathbb{R}[\nabla]$

$\nabla \triangleq$ opérateur retard de durée h :

$$\nabla x(t) = x(t-h),\ \nabla^i x(t) = x(t-ih),\ i \geq 0$$

$$\Rightarrow (\Sigma) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = \mathbf{A}(\nabla)x(t) + \mathbf{B}(\nabla)u(t) \\ y(t) = \mathbf{C}(\nabla)x(t) \end{cases}$$

avec

$$\mathbf{A}(\nabla) = \sum_{i=0}^{q} A_i \nabla^i, \qquad \mathbf{B}(\nabla) = \sum_{i=0}^{q} B_i \nabla^i,$$

$$\mathbf{C}(\nabla) = \sum_{i=0}^{q} C_i \nabla^i.$$

Extensions du problème de placement de pôles

Soient β_1 , . . . , β_n polynômes en ∇ arbitraire, existe-t-il $F \in \mathbb{R}^{n\times m}[\nabla]$ tel que $\det[sI - A(\nabla) - B(\nabla)F(\nabla)] =$

1. $\prod_{i=1}^{n}(s - \beta_i(\nabla)) \Rightarrow$ problème de placement de pôles
2. $s^n + \beta_1(\nabla)s^{n-1} + \ldots + \beta_n(\nabla)$
   $\Rightarrow$ problème de l'assignation des coefficients

Extensions du problème de placement de pôles

Soient β_1 , . . . , β_n polynômes en ∇ arbitraire, existe-t-il $F \in \mathbb{R}^{n\times m}[\nabla]$ tel que $\det[sI - A(\nabla) - B(\nabla)F(\nabla)] =$

1. $\prod_{i=1}^{n}(s - \beta_i(\nabla)) \Rightarrow$ problème de placement de pôles
2. $s^n + \beta_1(\nabla)s^{n-1} + \ldots + \beta_n(\nabla)$
   $\Rightarrow$ problème de l'assignation des coefficients

Extensions du problème de placement de pôles

Soient β_1 , . . . , β_n polynômes en ∇ arbitraire, existe-t-il $F \in \mathbb{R}^{n\times m}[\nabla]$ tel que $\det[sI - A(\nabla) - B(\nabla)F(\nabla)] =$

1. $\prod_{i=1}^{n}(s - \beta_i(\nabla)) \Rightarrow$ problème de placement de pôles
2. $s^n + \beta_1(\nabla)s^{n-1} + \ldots + \beta_n(\nabla)$
   $\Rightarrow$ problème de l'assignation des coefficients

$$\boxed{\text{assign. coeff.} \Rightarrow \text{plac. pôles} \iff \text{commandabilité forte}}$$

(Σ) est fortement commandable si

$$\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}[\nabla]}\left[B(\nabla), A(\nabla)B(\nabla), \ldots, A^{n-1}(\nabla)B(\nabla)\right] = \mathbb{R}^n[\nabla]$$

Équivalent à :
$\mathrm{Rang}_{\mathbb{C}}\left[sI - \mathbf{A}(z)|\,\mathbf{B}(z)\right] = n, \quad \forall s,\ z \in \mathbb{C}.$

Exemple (une entrée : cas simple)

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1(t) = x_1(t) + x_2(t) + u(t-h) \\ \dot{x}_2(t) = x_1(t) + x_2(t) - x_2(t-h) + u(t) \end{array} \right.$$

$$A(\nabla) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1-\nabla \end{bmatrix} \quad B(\nabla) = \begin{bmatrix} \nabla \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\langle \mathbf{A}(\nabla) \mid \mathbf{B}(\nabla) \rangle = \begin{bmatrix} \nabla & \nabla + 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

matrice unimodulaire : $\Rightarrow$ Forme commandable comme pour syst. sans retard $y = P(\nabla)x$:
$P_n = B$, $\quad P_{n-1} = AP_n + a_{n-1}B$,
$P_{n-2} = AP_{n-1} + a_{n-2}B, \ldots$
avec $\det(A(\nabla) = s^n + a_{n-1}(\nabla)s^{n-1} + \ldots + a_0(\nabla)$

$$P(\nabla) = \begin{bmatrix} \nabla^2 - \nabla + 1 & \nabla \\ \nabla - 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ unimodulaire} \Rightarrow$$

$$\dot{y}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \nabla & -\nabla + 2 \end{bmatrix} y(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u(t)$$

$\Rightarrow$ assign. des coefficients

Remarques :

- Il existe un algorithme pour le placement de pôles [Lee & Zak, IEEE TAC 1982] ;
- la commandabilité forte implique que l'on peut atteindre n'importe quel point en un temps infiniment court (Sename, 1994) ;
- il existe une autre notion algébrique de commandabilité : la commandabilité faible

Remarques :

- Il existe un algorithme pour le placement de pôles [Lee & Zak, IEEE TAC 1982] ;
- la commandabilité forte implique que l'on peut atteindre n'importe quel point en un temps infiniment court (Sename, 1994) ;
- il existe une autre notion algébrique de commandabilité : la commandabilité faible

Remarques :

- Il existe un algorithme pour le placement de pôles [Lee & Zak, IEEE TAC 1982] ;
- la commandabilité forte implique que l'on peut atteindre n'importe quel point en un temps infiniment court (Sename, 1994) ;
- il existe une autre notion algébrique de commandabilité : la commandabilité faible

Remarques :

- Il existe un algorithme pour le placement de pôles [Lee & Zak, IEEE TAC 1982] ;
- la commandabilité forte implique que l'on peut atteindre n'importe quel point en un temps infiniment court (Sename, 1994) ;
- il existe une autre notion algébrique de commandabilité : la commandabilité faible

(Σ) est faiblement commandable si

$$\mathrm{Rang}_{\mathbb{R}[\nabla]}\left[B(\nabla),\ldots,A^{n-1}(\nabla)B(\nabla)\right]=n$$

Équivalent à

$$\exists z_0\in\mathbb{C}:\mathrm{Rang}\left[\,sI-\mathbf{A}(z_0)\,|\,\mathbf{B}(z_0)\right]=n,\quad\forall s$$

placement de spectre fini

But : placer *tous les pôles* du système BF par une approche polynomiale (Brethé & Loiseau)

Rappel : approche polynomiale cas des systèmes sans retard

Processus : $\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{N_p(s)}{D_p(s)}$

Régulateur : $U(s) = -\frac{N_c(s)}{D_c(s)} Y(s) + V(s)$

Équ. caract. en BF : $D_p(s)D_c(s) + N_p(s)N_c(s) = 0$

Méthode : Soit un polynôme stable $\phi(s)$, trouver N_c et D_c t.q.

$$\boxed{D_p D_c + N_p N_c = \phi}$$

Toujours possible si N_p et D_p sont premiers entre eux.

Résultat clé : th. Bézout : $\exists P, Q : PN_p + QD_p = 1$

Exemple

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= x(t) + u(t-1)\\ u(t) &= -2ex(t) - 2\int_0^1 e^{\theta} u(t-\theta)\,\mathrm{d}\theta\end{aligned}$$

pôles BF : $s = -1$
Interprétation Transfert : $z(t) = \int_0^1 e^{\theta} u(t-\theta)\,\mathrm{d}\theta$
Laplace $\Rightarrow Z(s) = \int_0^1 e^{\theta} e^{-s\theta} U(s)\,\mathrm{d}\theta$

$$\boxed{\frac{Z(s)}{U(s)} = \frac{1-e^{-s+1}}{s-1}}$$

$\Rightarrow$ F. de transfert entière et rationnelle en s et e^{-s}

$$(s-1)(1+2\,\frac{1-e^{-s+1}}{s-1}) + e^{-s}\,2e = s+1$$

Retard distribué

Définition (Retard distribué)

C'est une relation entrée/sortie de la forme

$$y(t) = \int_{h_1}^{h_2} f(\theta) u(t-\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$\Rightarrow$ Laplace : $Y(s) = q(s)U(s)$, avec

$$q(s) = \int_{h_1}^{h_2} f(\theta) e^{-s\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

$\Rightarrow$ $q \in \mathcal{A}$ (fonction entière).

Cadre algébrique : ensembles $\mathcal{G}$ et $\mathcal{E}$

$\mathcal{G}$ = ensemble des fonctions rationnelles en s et e^{-sh} qui sont les transformées de Laplace de retards distribués
☞ Brethé & Loiseau 1996 :

$$\mathcal{G} \triangleq \{q(s) = \frac{n(s, e^{-sh})}{d(s)} \; : \deg_s n(s,z) < \deg_s d(s)\} \cap \mathcal{A}$$

On pose :

$$\mathcal{E} \triangleq \left(\mathbb{R}[e^{-hs}] + \mathcal{G}\right)[s]$$

Propriétés algébriques de $\mathcal{E}$

- $\mathcal{E}$ est un domaine intègre
- Existence d'un pgcd (unique à un facteur constant près)
  - d est un diviseur de q si $\exists q' \in \mathcal{E}$ t.q. $q = dq'$
  - $d \in \mathcal{E}$ est un pgcd de $q_1, q_2 \in \mathcal{E}$ si d est un diviseur de q_1 et q_2 et un multiple de tous leurs diviseurs communs.
- Division par un élément unitaire :
  Soit q un élément unitaire de $\mathcal{E}$ avec $\deg(q) \geq 1$, alors, $\forall p \in \mathcal{E}$, $\exists \alpha, \beta \in \mathcal{E}$ t.q.

$$p = \alpha q + \beta, \quad \text{avec } \deg(\beta) < \deg(q)$$

  Il existe un algorithme !

$q_1, q_2 \in \mathcal{E}$ sont dits premiers entre eux si leur pgcd est constant.

Th : p_1 et p_2 sont premiers entre eux de $\mathcal{E}$ ssi ils n'ont en commun ni zéro ni facteur de la forme e^{-shk} (avec $k \in \mathbb{N}^*$)

Exemple :
$s-1$ et $1-e^{-(s-1)h}$ ne sont pas premiers entre eux sur $\mathcal{E}$ car $1-e^{-(s-1)h} = (s-1)\frac{1-e^{-(s-1)h}}{s-1}$

Identité de Bézout : si q_1 et $q_2 \in \mathcal{E}$ premiers entre eux, alors $\exists x_1,\ x_2 \in \mathcal{E}$:

$$\boxed{q_1 x_1 + q_2 x_2 = 1}$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{E}$ est un domaine de Bézout : Tout idéal finiment généré de $\mathcal{E}$ est principal.
Il existe un algorithme !

Le placement de spectre fini est possible si le système est spectralement commandable :

$$\operatorname{rank}\left[sI - A(e^{-hs}) \middle| B \right] = n, \quad \forall s \in \mathbb{C}$$

Quelques références : stabilité

- N.N. Krasovskii.
  Stability of Motion.
  Stanford Univ. Press, 1963.
- V.B. Kolmanovskii et V.R. Nosov :
  Stability of functional differential equations.
  Academic Press, London, 1986.
- S.I. Niculescu.
  Delay Effects on Stability, vol. 269 of *LNCIS*.
  Springer, 2001.
- K. Gu, V. Kharitonov, and J. Chen.
  Stability of Time-Delay Systems.
  Birkhauser, Boston, USA, 2003.

Prédicteur de Smith et transformations

- Palmor, Z.J. :
  Modified predictors,
  in *The Control Handbook*, W.Levine, Ed : CRC Press, 1996
- W.H. Kwon et A.E. Pearson,
  Feedback Stabilization of Linear Systems with Delayed Control,
  IEEE TAC, Vol 25(2), 1980, pp. 266–269.
- Artstein, Z. :
  Linear systems with delayed controls : a reduction.
  IEEE TAC, Vol. 27(4), 1982, pp. 869–879.
- Y.A. Fiagbedzi et A.E. Pearson,
  Feedback Stabilization of Linear Autonomous Time Lag Systems,
  IEEE TAC, Vol. 31(9), 1986, pp. 847–855.

Références approches algébriques

D. Brethé.
Contribution à l'étude de la stabilisation des systèmes linéaires à retards.
Thèse Univ. de Nantes-EC Nantes, Déc. 1997.

Kamen E.W., Khargonekar P.P., Tannenbaum A.,
Proper stable Bézout factorization and feedback control of linear time-delay systems,
Int. J. Control, 43, p. 837-857, 1986.

L. Habets.
Algebraic and Computational Aspects of Time-Delay Systems.
Thèse Eindhoven U. of Technology, Pays-bas, 1994.

E. D. Sontag.
Linear systems over rings : a survey.
Ricerche di Automatica, 7, 1976.

Placement de spectre fini et approche fonctionnelle

A. Manitius and A.W. Olbrot.
Finite spectrum assignment problem for systems with delays.
IEEE Trans. Aut. Control, 24(4) :541–553, 1979.

J.K. Hale and S.M. Verduyn-Lunel.
Introduction to Functional Differential Equations.
Springer-Verlag, NY, 1993.

K.P.M. Bhat et H.N. Koivo :
Modal characterization of controllability and observability in time-delay systems.
IEEE Trans. Aut. Control, 21(2):292–293, 1976.

Contenu

Walton & Marshall : cas général

Fonction caractéristique :

$$p(s,\tau) = \sum_{k=0}^{q} a_k(s) e^{-ks\tau}$$

avec $d^\circ a_0(s) > d^\circ a_k(s)$ pour $k = 1, \ldots, q$.

Même procédure :

1. Localiser les pôles du système non retardé.
2. Déterminer les valeurs critiques de τ pour lesquelles il existe des racines imaginaires pures.
3. Comportement du lieu des racines au voisinage des points critiques

Recherche des points critiques :

Si pour $\tau = \tau_0$, $s = j\omega_0$ est une solution de :

$$p(s,\tau) = \sum_{k=0}^{q} a_k(s)e^{-ks\tau} = 0 \qquad (a)$$

c'est également une solution de :

$$p(-s,\tau) = \sum_{k=0}^{q} a_k(-s)e^{ks\tau} = 0 \qquad (b)$$

Pour éliminer le terme $e^{-q\tau s}$ de ces deux équations, on définit :

$$p^{[1]}(s,\tau) = a_0(-s)p(s,\tau) - a_q(s)e^{-qs\tau}p(-s,\tau)$$

LAMIH

$p^{[1]}(s,\tau)$ est un quasi-polynôme de la forme

$$p^{[1]}(s,\tau) = \sum_{k=0}^{q-1} a_k^{(1)}(s)e^{-ks\tau},$$

avec $a_k^{(1)}(s) = a_0(-s)a_k(s) - a_q(s)a_{q-k}(-s)$.

On recommence jusqu'à élimination de tous les termes exponentiels

$\Rightarrow$ définition des quasi-polynômes $p^{[r]}(s,\tau)$ $(r = 1, \ldots, q)$:

$$p^{[r]}(s,\tau) = \sum_{k=0}^{q-r} a_k^{(r)}(s)e^{-ks\tau},$$

avec : $a_k^{(r+1)}(s) = a_0^{(r)}(-s)a_k^{(r)}(s) - a_{q-r}^{(r)}(s)a_{q-r-k}^{(r)}(-s)$.

On notera $W(\omega^2)$ le polynôme $p^{[q]}(j\omega,\tau)$.

Détermination des retards critiques :

$$p(s = j\omega_i, \tau) = 0 \Rightarrow W(\omega_i^2) = 0.$$

Les valeurs de τ se déterminant alors à l'aide de la relation

$$p^{[q-1]}(j\omega_i, \tau) = 0$$

Comportement du lieu des racines au voisinage de $s = j\omega_i$.

$$signe \operatorname{Re} \left. \frac{ds}{d\tau} \right|_{s=j\omega_i} = signe \ \left(\alpha(j\omega_i) W'(\omega_i^2)\right)$$

où $\alpha(j\omega_i) = a_0^{(1)}(j\omega_i) a_0^{(2)}(j\omega_i) \ldots a_0^{(q-1)}(j\omega_i)$.

Exercice Stabilité en fonction de τ de

$$p(s,\tau) = s + 1 + e^{-\tau s} + 3e^{-2\tau s}$$

1. $\tau = 0$: stabilité asymptotique (pôle $s = -5$)
2.

Exercice

$$p(s,\tau) = s + 1 + e^{-\tau s} + 3e^{-2\tau s}$$

1. $\tau = 0$: stabilité asymptotique (pôle $s = -5$)
2.

Exercice

$$p(s,\tau) = s + 1 + e^{-\tau s} + 3e^{-2\tau s}$$

1. $\tau = 0$: stabilité asymptotique (pôle $s = -5$)
2. Calcul de W :

$$\begin{aligned}
a_0(s) &= s+1, \quad a_1(s) = 1, \quad a_2(s) = 3 \\
p^{[1]}(s,\tau) &= -s^2 - 8 + (-s-2)e^{-\tau s} \\
W(\omega^2) &= \left(\omega^2 - 5\right)\left(\omega^2 - 12\right)
\end{aligned}$$

Exercice

$$p(s,\tau) = s + 1 + e^{-\tau s} + 3e^{-2\tau s}$$

1. $\tau = 0$: stabilité asymptotique (pôle $s = -5$)
2. $W(\omega^2) = \left(\omega^2 - 5\right)\left(\omega^2 - 12\right)$
3. Valeurs correspondantes de τ :

$$p^{[1]}(j\omega,\tau) = 0 \Rightarrow e^{-j\omega\tau} = \frac{2 + j\omega}{\omega^2 - 8}$$

Exercice

$$p(s,\tau) = s + 1 + e^{-\tau s} + 3e^{-2\tau s}$$

1. $\tau = 0$: stabilité asymptotique (pôle $s = -5$)
2. $W(\omega^2) = \left(\omega^2 - 5\right)\left(\omega^2 - 12\right)$
3. Valeurs correspondantes de τ :

$$p^{[1]}(j\omega,\tau) = 0 \Rightarrow e^{-j\omega\tau} = \frac{2 + j\omega}{\omega^2 - 8}$$

Pour $\omega_1 = \sqrt{5} \Rightarrow \quad \tau_1 = \sqrt{5}/5(\tan^{-1}(\sqrt{5}/2) + (2k+1)\pi)$
Pour $\omega_2 = 2\sqrt{3} \Rightarrow \tau_2 = \sqrt{3}/6(\pi/3 + 2k\pi)$

4. Évolution du lieu des racines

- Pour $\omega_1 = \sqrt{5}$: $W'(5) < 0$ et $a_0^{(1)}(j\sqrt{5}) = -3 < 0$
  $\Rightarrow \mathrm{Re}\frac{ds}{d\tau}\Big|_{s=j\sqrt{5}} > 0$
  $\Rightarrow$ croisement dans le sens déstabilisant
- Pour $\omega_2 = 2\sqrt{3}$: $W'(12) > 0$ et $a_0^{(1)}(2j\sqrt{3}) = 4 > 0$
  $\Rightarrow \mathrm{Re}\frac{ds}{d\tau}\Big|_{s=2j\sqrt{3}} > 0$
  $\Rightarrow$ croisement dans le sens déstabilisant

Retour

4. Évolution du lieu des racines

- Pour $\omega_1 = \sqrt{5}$: $W'(5) < 0$ et $a_0^{(1)}(j\sqrt{5}) = -3 < 0$
  $\Rightarrow \mathrm{Re}\frac{ds}{d\tau}\Big|_{s=j\sqrt{5}} > 0$
  $\Rightarrow$ croisement dans le sens déstabilisant
- Pour $\omega_2 = 2\sqrt{3}$: $W'(12) > 0$ et $a_0^{(1)}(2j\sqrt{3}) = 4 > 0$
  $\Rightarrow \mathrm{Re}\frac{ds}{d\tau}\Big|_{s=2j\sqrt{3}} > 0$
  $\Rightarrow$ croisement dans le sens déstabilisant

Retour

4. Évolution du lieu des racines

- Pour $\omega_1 = \sqrt{5}$: $W'(5) < 0$ et $a_0^{(1)}(j\sqrt{5}) = -3 < 0$
  $\Rightarrow \mathrm{Re} \frac{ds}{d\tau}\Big|_{s=j\sqrt{5}} > 0$
  $\Rightarrow$ croisement dans le sens déstabilisant
- Pour $\omega_2 = 2\sqrt{3}$: $W'(12) > 0$ et $a_0^{(1)}(2j\sqrt{3}) = 4 > 0$
  $\Rightarrow \mathrm{Re} \frac{ds}{d\tau}\Big|_{s=2j\sqrt{3}} > 0$
  $\Rightarrow$ croisement dans le sens déstabilisant

Stabilité asymptotique ssi $0 \leq \tau < \frac{\pi\sqrt{3}}{18} \approx 0.3023$

Retour

Algorithme (division par élément unitaire)

— soit $p = \frac{n_p}{d_p}$ et $q = \frac{n_q}{d_q}$ et $\tilde{p} \triangleq d_q n_p \quad \tilde{q} \triangleq d_p n_q$ alors
$\tilde{p} = \sum_{i=0}^{M} \tilde{p}_i(e^{-sh})s^i, \quad \tilde{q} = s^N + \sum_{i=0}^{N-1} \tilde{q}_i(e^{-sh})s^i$, avec
$\tilde{p}_i, \tilde{q}_i \in \mathbb{R}[X]$

— si $M < N$, alors soit $\alpha = 0$, $\beta = p$

— sinon, soit $\alpha_1 = \tilde{p}_M s^{M-N}$ et $\beta_1 = \tilde{p} - \alpha_1\ \tilde{q}$, alors

$$\tilde{p} = \alpha_1 \tilde{q} + \beta_1, \text{ avec } \deg_s(\beta_1) < \deg_s(\tilde{p})$$

Répéter

$$\begin{aligned} \beta_1 &= \alpha_2 \tilde{q} + \beta_2, \text{ avec } \deg_s(\beta_2) < \deg_s(\beta_1) \\ \beta_2 &= \alpha_3 \tilde{q} + \beta_3, \text{ avec } \deg_s(\beta_3) < \deg_s(\beta_2), \ldots \end{aligned}$$

jusqu'à $\deg_s(\beta_J) < \deg_s(\tilde{q})$.
Soit $\alpha = \sum_{i=1}^{J} \alpha_i$, $\beta = \frac{\beta_J}{d_p\, d_q}$ alors $\tilde{p} = \alpha\tilde{q} + \beta_J$
$\Rightarrow p = \alpha q + \beta, \quad \beta \in \mathcal{E}$ et
$\deg(\beta) < \deg_s(\tilde{q}) - \deg_s(d_q d_p) = \deg(q)$

Retour

Algorithme (identité de Bézout) :

$q_i(s) = \frac{n_i(s,e^{-sh})}{d_i(s)} \quad (i = 1, 2)$,
avec n_i, d_i 2 polynômes 1ers entre eux par facteur.
Soit $\delta = \gcd(d_1, d_2)$, d_1', d_2' t.q. $d_i = \delta d_i'$.
$d_2' n_1$ et $d_1' n_2$ sont 1er entre eux par facteur
donc $\exists u, v \in \mathbb{R}[X, Y]$ et $\epsilon \in \mathbb{R}[X]$ t.q.

$$n_1 d_2' u + n_2 d_1' v = \epsilon \qquad (*)$$

(Pour calculer u et v : considérer $n_1 d_2'$ et $n_2 d_1'$ comme éléments de $\mathbb{R}(X)[Y]$. Ils sont premiers entre eux : donc, $\exists x$ et $y \in \mathbb{R}(X)[Y]$ t.q.

$$n_1 d_2' x + n_2 d_1' y = 1$$

Normalisation : $\exists \epsilon \in \mathbb{R}[X]$ t.q. $u = x\epsilon$ et $v = y\epsilon \in \mathbb{R}[X, Y]$.)
Soit $a = d_1 d_2' u$ et $b = d_2 d_1' v$ alors a, $b \in \mathcal{E}$ et

$$aq_1 + bq_2 = \epsilon$$

Décomposer $\epsilon = \epsilon_1 \ldots \epsilon_K$ t.q. ϵ_{i+1} est un multiple de ϵ_i et chaque facteur ϵ_i n'admet que des zéros simples.
Soient $s_1, \ldots, s_k$ les zéros de ϵ_1, et soit

$$k_j = \begin{cases} \frac{b(s_1)}{q_1(s_1)} & \text{si } q_1(s_1) \neq 0 \\ -\frac{a(s_1)}{q_2(s_1)} & \text{si } q_2(s_1) \neq 0 \end{cases}, \quad j = 1, \ldots, k$$

(noter que si $q_1(s_1)q_2(s_1) \neq 0$, alors $\frac{b(s_1)}{q_1(s_1)} = -\frac{a(s_1)}{q_2(s_1)}$)
soit $k(s)$ le polynôme d'interpolation de Lagrange t.q. $k(s_j) = k_j$.
Alors, soit $a_1 = \frac{a+kq_2}{\epsilon_1}$, $\quad b_1 = \frac{b-kq_1}{\epsilon_1}$
$\Rightarrow a_1,\ b_1 \in \mathcal{E}$, et $\qquad a_1 q_1 + b_1 q_2 = \epsilon_2 \ldots \epsilon_K$
Recommencer jusqu'à l'élimination du facteur ϵ_K.

Retour

Contenu

Placement de spectre partiel

But : placer un nombre fini de pôles.)
[Krasovskii & Osipov, 63 Bhat & Koivo, 76]

Principe : système

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$$

Etant donné un pôle simple $\lambda_u \in \mathbb{R}$, $\exists u = -Kx$ t.q. seul le pôle λ_u soit modifié ?
$\Rightarrow$ Oui, si $\mathrm{rank}_{\mathbb{C}} [\lambda_u I - A | \, B] = n$

(prendre la forme modale)

Représentation abstraite d'un système à retard

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_0 x(t) + A_1 x(t-h) \\ x(\theta) &= \varphi(\theta), \quad -h \le \theta \le 0 \end{aligned}$$

$\mathcal{C} = \mathcal{C}([-h,0],\mathbb{R}^n)$: espace de Banach pour la norme :

$$\|\varphi\|_{\mathcal{C}} = \sup_{\theta\in[-h,0]} \|\varphi(\theta)\|$$

Soit $T(t) : \varphi \in \mathcal{C} \longmapsto T(t)\varphi = x_t(\varphi) \in \mathcal{C}$.

Propriété

La famille d'opérateurs $T(t)$ (pour $t \geq 0$) est un semi-groupe fortement continu sur $\mathcal{C}$.

- $T(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{C}), \ \forall t \geq 0$
- $T(t+s) = T(t)T(s)$ for $t, s \geq 0$
- $T(0) = I$
- $\| T(t)\varphi - \varphi\| \to 0$ lorsque $t \to 0^+ \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}$

Générateur infinitésimal de $\{T(t)\}$:

C'est l'opérateur $\mathcal{A}$ de $\mathcal{C}$ dans $\mathcal{C}$ défini par

$$\mathcal{A}\varphi = \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t}(T(t)\varphi - \varphi)$$

Expression :

$$\mathcal{A}\varphi(\theta) = \begin{cases} \varphi'(\theta) & \text{pour } \theta \in [-h, 0) \\ A_0\varphi(0) + A_1\varphi(-h) & \text{pour } \theta = 0 \end{cases}$$

avec le domaine $D(\mathcal{A}) =$
$\{\varphi, \varphi' \in \mathcal{C},\ \varphi'(0) = A_0\varphi(0) + A_1\varphi(-h)\}$

Propriétés

$D(\mathcal{A})$ est dense dans $\mathcal{C}$ et, pour tout $\varphi \in D(\mathcal{A})$, on a

$$\tfrac{d}{dt} T(t)\varphi = T(t)\mathcal{A}\varphi = \mathcal{A}T(t)\varphi$$

Éléments de preuve :

Par intégration de l'équation différentielle, on obtient :

$$T(t)\varphi(\theta) = \begin{cases} \varphi(t+\theta) & \text{pour } t+\theta \leq 0 \\ \varphi(\theta) + \int_0^{t+\theta} \left[A_0\left(T(s)\varphi\right)(0) + A_1\left(T(s)\varphi\right)(-h)\right] ds & \text{pour } t+\theta > 0 \end{cases}$$

Spectre de l'opérateur $\mathcal{A}$

Ensemble résolvant $\rho(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$ = ens. des $\lambda \in \mathbb{C}$ t.q. l'opérateur $\lambda I - \mathcal{A}$ admet une inverse bornée à domaine dense dans $\mathcal{C}$.

Spectre de $\mathcal{A}$: $\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{C} \setminus \rho(\mathcal{A})$

$\sigma(\mathcal{A})$ peut être décomposé en 3 ensembles disjoints :

- *le spectre résiduel* : ens. des $\lambda \in \mathbb{C}$ t.q. $\lambda I - \mathcal{A}$ admet une inverse bornée, mais de domaine non dense dans $\mathcal{C}$;
- *le spectre continu* : ens. des $\lambda \in \mathbb{C}$ t.q. $\lambda I - \mathcal{A}$ admet une inverse mais non bornée ;
- *le spectre ponctuel* : ens. des $\lambda \in \mathbb{C}$ t.q. $\lambda I - \mathcal{A}$ n'admet pas d'inverse.

Détermination du spectre de $\mathcal{A}$

Existence et continuité des solution $\varphi \in D(\mathcal{A})$ de l'équ.

$$(\mathcal{A} - \lambda I)\varphi = \psi$$

Donc, φ est solution de l'équation différentielle

$$\dot{\varphi}(\theta) - \lambda\varphi(\theta) = \psi(\theta), \quad -\tau \leq \theta \leq 0$$

Soit $\varphi(\theta) = e^{\lambda\theta} b + \int_0^\theta e^{\lambda(\theta-\xi)}\psi(\xi)d\xi$
On doit avoir de plus $\dot{\varphi}(0) = A_0\varphi(0) + A_1\varphi(-h)$
$\Rightarrow \lambda b + \psi(0) = A_0 b + A_1(e^{-\lambda h} b + \int_0^{-h} e^{\lambda(-h-\xi)}\psi(\xi)d\xi)$
$\Rightarrow \Delta(\lambda) b = -\psi(0) + \int_0^{-h} e^{\lambda(-h-\xi)}\psi(\xi)d\xi)$
avec $\Delta(\lambda) = \lambda I - A_0 - A_1 e^{-\lambda h}$

Conclusions :

- si $\det(\Delta(\lambda)) \neq 0$, la solution existe, est unique et dépend continûment de $\psi \in \mathcal{C}$, c-à-d. $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$
- si $\det(\Delta(\lambda)) = 0$, il n'existe pas d'inverse, c-à-d. λ est dans le spectre ponctuel de $\mathcal{A}$.

Propriété

Les valeurs propres sont les racines caractéristiques du système. Les fonctions propres sont de la forme $\varphi(\theta) = e^{\lambda\theta} b$

Espace de fonctions propres généralisées :

$$E_\lambda = \bigcup_{k \geq 1} \ker(\lambda I - \mathcal{A})^k \quad \text{pour } \lambda \in \sigma(\mathcal{A})$$

$\rightarrow \dim E_\lambda \triangleq d_\lambda < \infty$ et $\exists n_\lambda$ t.q. $E_\lambda = \ker(\lambda I - \mathcal{A})^{n_\lambda}$

$\mathcal{C} = E_\lambda \oplus \mathrm{Ran}(\lambda I - \mathcal{A})^{n_\lambda}$, avec E_λ, $Ran(\lambda I - \mathcal{A})^{n_\lambda}$ invariants par $T(t)$

Soit $\phi_\lambda = [\varphi_\lambda^1, \ldots, \varphi_\lambda^{d_\lambda}]$ base de E_λ
$\mathcal{A}E_\lambda \subset E_\lambda \Rightarrow \mathcal{A}\phi_\lambda = \phi_\lambda M_\lambda$ pour $M_\lambda \in \mathbb{C}^{d_\lambda \times d_\lambda}$ avec $(\lambda I - M_\lambda)^{n_\lambda} = 0 \Rightarrow$

$$\phi_\lambda(\theta) = \phi_\lambda(0) e^{M_\lambda \theta}$$

Espace de fonctions propres généralisées :

$$E_\lambda = \bigcup_{k \geq 1} \ker(\lambda I - \mathcal{A})^k \quad \text{pour } \lambda \in \sigma(\mathcal{A})$$

$\rightarrow \dim E_\lambda \triangleq d_\lambda < \infty$ et $\exists n_\lambda$ t.q. $E_\lambda = \ker(\lambda I - \mathcal{A})^{n_\lambda}$

$\mathcal{C} = E_\lambda \oplus \mathrm{Ran}(\lambda I - \mathcal{A})^{n_\lambda}$, avec E_λ, $Ran(\lambda I - \mathcal{A})^{n_\lambda}$ invariants par $T(t)$

Soit $\phi_\lambda = [\varphi_\lambda^1, \ldots, \varphi_\lambda^{d_\lambda}]$ base de E_λ
$\mathcal{A}E_\lambda \subset E_\lambda \Rightarrow \mathcal{A}\phi_\lambda = \phi_\lambda M_\lambda$ pour $M_\lambda \in \mathbb{C}^{d_\lambda \times d_\lambda}$ avec $(\lambda I - M_\lambda)^{n_\lambda} = 0 \Rightarrow$

$$\phi_\lambda(\theta) = \phi_\lambda(0) e^{M_\lambda \theta}$$

Espace de fonctions propres généralisées :

$$E_\lambda = \bigcup_{k \geq 1} \ker(\lambda I - \mathcal{A})^k \quad \text{pour } \lambda \in \sigma(\mathcal{A})$$

$\rightarrow \dim E_\lambda \triangleq d_\lambda < \infty$ et $\exists n_\lambda$ t.q. $E_\lambda = \ker(\lambda I - \mathcal{A})^{n_\lambda}$

$\mathcal{C} = E_\lambda \oplus \mathrm{Ran}(\lambda I - \mathcal{A})^{n_\lambda}$, avec E_λ, $Ran(\lambda I - \mathcal{A})^{n_\lambda}$ invariants par $T(t)$

Soit $\phi_\lambda = [\varphi_\lambda^1, \dots, \varphi_\lambda^{d_\lambda}]$ base de E_λ
$\mathcal{A}E_\lambda \subset E_\lambda \Rightarrow \mathcal{A}\phi_\lambda = \phi_\lambda M_\lambda$ pour $M_\lambda \in \mathbb{C}^{d_\lambda \times d_\lambda}$ avec
$(\lambda I - M_\lambda)^{n_\lambda} = 0 \Rightarrow$

$$\phi_\lambda(\theta) = \phi_\lambda(0) e^{M_\lambda \theta}$$

Espace de fonctions propres généralisées :

$$E_\lambda = \bigcup_{k\geq 1} \ker(\lambda I - \mathcal{A})^k \quad \text{pour } \lambda \in \sigma(\mathcal{A})$$

$\rightarrow \dim E_\lambda \triangleq d_\lambda < \infty$ et $\exists n_\lambda$ t.q. $E_\lambda = \ker(\lambda I - \mathcal{A})^{n_\lambda}$

$\mathcal{C} = E_\lambda \oplus \mathrm{Ran}(\lambda I - \mathcal{A})^{n_\lambda}$, avec E_λ, $Ran(\lambda I - \mathcal{A})^{n_\lambda}$ invariants par $T(t)$

Soit $\phi_\lambda = [\varphi_\lambda^1, \ldots, \varphi_\lambda^{d_\lambda}]$ base de E_λ
$\mathcal{A}E_\lambda \subset E_\lambda \Rightarrow \mathcal{A}\phi_\lambda = \phi_\lambda M_\lambda$ pour $M_\lambda \in \mathbb{C}^{d_\lambda \times d_\lambda}$ avec $(\lambda I - M_\lambda)^{n_\lambda} = 0 \Rightarrow$

$$\phi_\lambda(\theta) = \phi_\lambda(0) e^{M_\lambda \theta}$$

Soit $\Lambda \triangleq \{\lambda \in \sigma(\mathcal{A}) : \mathrm{Re}(\lambda) \geq -\gamma\}$

On pose

$$\mathcal{C}_+ = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda,$$

$\Phi_\Lambda = [\phi_{\lambda_1}, \ldots, \phi_{\lambda_N}]$ (base de $\mathcal{C}_+$)

pour $A_\Lambda = \mathrm{diag}(M_{\lambda_1}, \ldots, M_{\lambda_1})$, on a $\mathcal{A}\Phi_\Lambda = \Phi_\Lambda A_\Lambda$

Décomposition de Hale :

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_+ \oplus \mathcal{C}_-$$

avec $\mathcal{C}_+$ et $\mathcal{C}_-$ invariants par $\mathcal{A}$.

$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_-$$

Calcul de φ_+ la projection de φ sur $\mathcal{C}_+$?

Soit $\Lambda \triangleq \{\lambda \in \sigma(\mathcal{A}) : \mathrm{Re}(\lambda) \geq -\gamma\}$
On pose

$$\mathcal{C}_+ = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda,$$

$\Phi_\Lambda = [\phi_{\lambda_1}, \ldots, \phi_{\lambda_N}]$ (base de $\mathcal{C}_+$)
pour $A_\Lambda = \mathrm{diag}(M_{\lambda_1}, \ldots, M_{\lambda_1})$, on a $\mathcal{A}\Phi_\Lambda = \Phi_\Lambda A_\Lambda$
Décomposition de Hale :

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}_+ \oplus \mathcal{C}_-$$

avec $\mathcal{C}_+$ et $\mathcal{C}_-$ invariants par $\mathcal{A}$.

$$\varphi = \varphi_+ + \varphi_-$$

Calcul de φ_+ la projection de φ sur $\mathcal{C}_+$?

Forme bilinéaire :

$$< \psi, \varphi >= \psi^T(0)\varphi(0) + \int_{-h}^{0} \psi^T(s+h)A_1\varphi(s)\,\mathrm{d}s$$

avec $\varphi \in \mathcal{C}, \psi \in \mathcal{C}^* = C([0,h],\mathbb{R}^n)$

$\Rightarrow$ opérateur "adjoint" $\mathcal{A}^*$

$$\mathcal{A}^*\psi = \begin{cases} -\psi'(s) & \text{pour } s \in (0,h] \\ A_0^T\psi(0) + A_1^T\psi(h) & \text{pour } s = 0 \end{cases}$$

correspondant à $\dot{y}(\tau) = -A_0^T y(\tau) - A_1^T y(\tau+h)$

Propriétés :

- $<\psi, \mathcal{A}\varphi> = <\mathcal{A}^*\psi, \varphi>$
- Mêmes valeurs propres que $\mathcal{A}$
- Fonctions propres de $\mathcal{A}^*$ de la forme $e^{-\lambda s}$, $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$
- $\psi \in Ran(\lambda I - \mathcal{A})^k \Leftrightarrow \langle \alpha, \psi \rangle = 0, \forall \alpha \in Ker(\lambda I - \mathcal{A}^*)^k$
- il existe une base de $\mathcal{C}_+^*$: $\Psi_\Lambda = [\psi_{\lambda_1}, \dots, \psi_{\lambda_N}]^T$ t.q.

$$\langle \Psi_\Lambda, \Phi_\Lambda \rangle \triangleq \{<\psi_i, \varphi_j>\} = I$$

$$\begin{aligned} &\varphi = \varphi^+ + \varphi^-, \quad \varphi^+ \in \mathcal{C}^+, \ \varphi^- \in \mathcal{C}^- \\ &\varphi^+ = \Phi_\Lambda b, \qquad \text{avec } b = \langle \Psi_\Lambda, \varphi \rangle \\ &\langle \Psi_\Lambda, \varphi_- \rangle = 0 \end{aligned}$$

$$(S) \quad \dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h) + Bu(t)$$

Si x_t solution de (S), alors

$$\begin{aligned} x_t &= x_t^1 + x_t^2, \text{ avec } x_t^1 \in \mathcal{C}^+, x_t^2 \in \mathcal{C}^- \\ x_t^1 &= \Phi_\Lambda z(t), \text{ avec } z(t) = \langle \Psi_\Lambda, x_t \rangle \end{aligned}$$

avec $z(t)$ vérifiant :

$$\dot{z}(t) = A_\Lambda z(t) + \Psi_\Lambda(0) Bu(t)$$

Syst. commandable si

$$\operatorname{rank}\left[sI - A(e^{-hs}) \middle| B \right] = n, \quad \forall s \in \Lambda$$

(Bhat & Koivo, 76)

Lien avec concept de commandabilité :
(S) est $\gamma-$ stabilisable pour tout γ ssi

$$\text{rank}\left[sI - A(e^{-hs}) \middle| B \right] = n, \quad \forall s \in \mathbb{C}$$

$=$ commandabilité spectrale

Exemple

$$\dot{x}(t) = -\tfrac{\pi}{2}x(t-1) + u(t)$$

But : déplacer les pôles $\pm j\pi/2$.

Base de $\mathcal{C}_+$: $\Phi = [\phi_1, \phi_2]$, avec

$$\phi_1(\theta) = \sin\tfrac{\pi}{2}\theta,\ \phi_2(\theta) = \cos\tfrac{\pi}{2}\theta$$

équation "adjointe" : $\dot{y}(t) = \tfrac{\pi}{2}y(t+1)$

Base simple : $\psi_1^*(s) = \sin\tfrac{\pi}{2}s,\ \psi_2^*(s) = \cos\tfrac{\pi}{2}s$

Forme bilinéaire :

$$\langle\psi,\phi\rangle = \psi^T(0)\phi(0) - \pi/2\int_{-1}^{0}\psi^T(\theta+1)\phi(\theta)\,\mathrm{d}\theta$$

$$\Rightarrow \langle\Psi^*,\Phi\rangle = \begin{bmatrix} 1/2 & -\pi/4 \\ \pi/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Calcul de $\Psi = [\psi_1, \psi_2]^T$ t.q. $\langle \Psi^*, \Phi \rangle = I$:

$$\begin{aligned} \Psi &= \langle \Psi^*, \Phi \rangle^{-1} \Psi^* \Rightarrow \\ \psi_1(s) &= \alpha(\sin \frac{\pi}{2} s + \frac{\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2} s), \\ \psi_2(s) &= \alpha(-\frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2} s + \cos \frac{\pi}{2} s) \end{aligned}$$

avec $\alpha = 8/(4+\pi^2)$. Projection du système :

$$\begin{cases} \dot{z}_1(t) = -\frac{\pi}{2} z_2(t) + \frac{\pi}{2} \alpha u(t) \\ \dot{z}_2(t) = \frac{\pi}{2} z_1(t) + \alpha u(t) \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} z_1(t) &= \langle \psi_1, x_t \rangle \\ z_2(t) &= \langle \psi_2, x_t \rangle \end{aligned}$$