Modélisation et propriétés structurelles en dimension infinie: des systèmes à retards aux équations aux dérivées partielles

Hugues Mounier

Institut d'Électronique Fondamentale, Université Paris sud

École d'automne – Douz, 2006

Plan

Régulateurs de type PID

Application aux réseaux informatiques – Notion de platitude

Des SàR aux EDP : Équation des ondes et forage

Commandabilités et π-liberté

Régulateurs de type PID

Motivation et commandabilité en dimension finie

Motivations

- Obtenir des schémas de stabilisation simples et proches des classiques utilisés en ingénierie, pour des systèmes de transfert :

$$G(s)e^{-hs}$$

où $G(s)$ est éventuellement instable.

- Le schéma proposé :
  - Généralise les régulateurs PID et le prédicteur de Smith.
  - Permet une reconstruction exacte des dérivées des mesures.

Motivations (suite)

- Utilisation :
  - De prédicteurs utilisant les valeurs passées de l'entrée.
  - De reconstructeurs intégraux exacts utilisant les mesures et leurs intégrales itérées.

- Cette dernière reconstruction a un effet lissant par l'utilisation d'intégrales, mais
  - elle évite les erreurs d'approximation d'un filtrage de type boîte noire.
  - utilisée au sein d'un régulateur PID, elle est plus robuste qu'un observateur asymptotique.

Un réacteur simple

- Réacteur isotherme uniformément agité
- Réaction du 1^er ordre :

$$A \longrightarrow \text{ produits}$$

- Commandé par la concentration d'entrée en A : c_{AF}
- Flux d'entrée mélangé en amont du réacteur : retard sur l'entrée non négligeable.

Un réacteur simple (suite)

- Équilibre molaire

$$\dot{c}_A(t) = q\left[c_{AF}(t-\tau) - c_A(t)\right] - kc_A(t)$$

- Avec les constantes q le débit d'entrée et k le taux de réaction.

- Correspond au modèle de Broïda-Stretch :

$$\frac{e^{-hs}}{1+Ts}$$

- Ce modèle est utilisé pour diverses modélisations.

Modèle employé

- On considère le modèle perturbé

$$sy = ay + be^{-hs}u + \varpi \frac{e^{-\varphi s}}{s}$$

- Avec a éventuellement positif.
- La perturbation constante ϖ apparaît à $t \geqslant \varphi$ par le biais d'un heaviside translaté.
- On considère également le modèle nominal

$$sy_{\text{nom}} = ay_{\text{nom}} + be^{-hs}u_{\text{nom}}$$

Forme adaptée au suivi

- On exprime directement u_{nom} en fonction de y_{nom} et sy_{nom}

$$u_{\mathrm{nom}} = \frac{1}{b} s e^{hs} y_{\mathrm{nom}} - \frac{a}{b} e^{hs} y_{\mathrm{nom}}$$

- Cette forme est très utile pour le suivi d'une trajectoire désirée $y_{\mathrm{nom}d}$ en boucle ouverte.
- Il n'y a pas d'intégration d'équation différentielle aux différences.
- La prédiction $e^{hs} y_{\mathrm{nom}}$ n'est pas un inconvénient en suivi en boucle ouverte, connaissant le trajectoire désirée $y_{\mathrm{nom}d}$ sur tout l'horizon temporel.

Rappel de commandabilité en dimension finie

Système classique, mono-entrée $s\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} + bu, \quad \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$.

- Critère de Kalman

$$rg_{\mathbb{R}}[b, Ab, \ldots, A^{n-1}b] = n$$

- Critère de Hautus-Popov-Belevitch

$$\forall s \in \mathbb{C}, \qquad rg_{\mathbb{C}}[sI - A \mid b] = n$$

Rappel de commandabilité en dimension finie (suite)

- Mise sous forme compagnon

$$
\begin{aligned}
sz_1 &= z_2 \\
sz_2 &= z_3 \\
&\vdots \\
sz_{n-1} &= z_n \\
sz_n &= p_1 z_1 + p_2 z_2 + \ldots + p_n z_n + qu
\end{aligned}
$$

- Sous-espace de non commandabilité de Kalman vide.
- La forme compagnon permet un suivi de trajectoire des plus aisés ; posant $z_{1d} = y_d$:

$$
u_d = -\frac{1}{\beta}\left(\alpha_1 y_d + \alpha_2 s y_d + \ldots \alpha_n s^{n-1} y_d(t) - s^n y_d(t)\right)
$$

Rappel de commandabilité en dimension finie (suite)

- Par ailleurs, z_1 fournit une paramétrisation complète : toute variable s'exprime comme combinaison linéaire de z_1 et d'un nombre fini de ses dérivées.

$$
\begin{aligned}
z_2 &= sz_1 \\
z_3 &= s^2 z_1 \\
&\vdots \\
z_n &= s^{n-1} z_1 \\
u &= -\frac{1}{\beta}\left(\alpha_1 z_1 + \alpha_2 s z_1 + \ldots \alpha_n s^{n-1} z_1 - s^n z_1\right) \\
y &= z_1
\end{aligned}
$$

- Cette agréable propriété se nomme la liberté.

Classe de systèmes étudiés et liberté

Classe de systèmes étudiés

- Système à retards Λ donné par

$$\Lambda = [w_1, \ldots, w_\alpha] \triangleq [\boldsymbol{w}]$$
$$P_\Lambda(s, e^{\boldsymbol{h}s})\,\boldsymbol{w} = 0$$

avec $P_\Lambda \in \mathbb{R}[s, e^{\boldsymbol{h}s}]^{\beta\times\alpha}$, $\mathrm{rg}_{\mathbb{R}[s,e^{\boldsymbol{h}s}]} P_\Lambda = \beta$, $\beta \leqslant \alpha$.

- Λ est sans retard si $P_\Lambda \in \mathbb{R}[\frac{d}{dt}]^{\beta\times\alpha}$, c.à.d. s'il existe des équations du modèle ne contenant pas de retard.

- Une dynamique Λ d'entrée $\boldsymbol{u}$ est quasi-finie s'il existe des monômes $M_i(\boldsymbol{\delta})$, $i = 1, \ldots, m$ tels que posant $v_i = M_i(\boldsymbol{\delta})u_i$, la dynamique $\tilde{\Lambda}$ d'entrée $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v_m)$ est sans retard.

Liberté et liberté par anticipation

- Un modèle de dimension finie munie d'une entrée indépendante $\boldsymbol{u}(t) = (u_1(t), \ldots, u_m(t))$ est dit libre s'il existe

$$\boldsymbol{\omega}(t) = (\omega_1(t), \ldots, \omega_m(t))$$

que l'on nomme base (ou sortie plate), telle que :

(1) Elle fait partie du modèle (caratère endogène) :
les ω_i s'expriment comme combinaison linéaire des variables du modèle (c.à.d. $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}$ ici) et de leurs dérivées :

$$\omega_i = L\boldsymbol{x} + N_0\boldsymbol{u} + N_1 s\boldsymbol{u} + \ldots + N_\alpha s^\alpha \boldsymbol{u}$$

$L \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $N_i \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $i = 0, \ldots, \alpha$.

Liberté et liberté par anticipation (suite)

(2) Ses composantes sont indépendantes (indépendance) :
Il n'existe aucune relation différentielle entre les ω_i :

$$M_0\boldsymbol{\omega} + M_1 s\boldsymbol{\omega} + \ldots + M_\beta s^\beta \boldsymbol{\omega} = 0 \quad \Longrightarrow \quad M_i = 0$$

$M_i \in \mathbb{R}^{q\times m}$, $i = 0, \ldots \beta$.

(3) Elle fournit une paramétrisation complète du système (forme canonique de suivi) :

$$\boldsymbol{x} = P_0\boldsymbol{\omega} + P_1 s\boldsymbol{\omega} + \ldots + P_\gamma s^\gamma \boldsymbol{\omega} \qquad (1)$$
$$\boldsymbol{u} = Q_0\boldsymbol{\omega} + Q_1 s\boldsymbol{\omega} + \ldots + Q_\mu s^\mu \boldsymbol{\omega} \qquad (2)$$

$P_i \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $Q_j \in \mathbb{R}^{m\times m}$, $i = 0, \ldots, \gamma$, $j = 0, \ldots, \mu$,

- La dernière propriété, et plus spécialement l'équation (2) fournit une solution simple et naturelle au suivi de la sortie $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{\omega}$.

Liberté et liberté par anticipation (suite)

- Une dynamique à retards presque finie est dit libre par anticipation (ou δ-libre ou $e^{-\boldsymbol{hs}}$-libre) si elle est libre pour peu que l'on s'autorise des avances.
- Ceci conduit à une forme canonique de suivi telle que :

$$\boldsymbol{x} = P_0\boldsymbol{\omega} + P_1 s\boldsymbol{\omega} + \ldots + P_\gamma s^\gamma \boldsymbol{\omega} \tag{3}$$

$$\boldsymbol{u} = Q_0 e^{\boldsymbol{hs}}\boldsymbol{\omega} + Q_1 s e^{\boldsymbol{hs}}\boldsymbol{\omega} + \ldots + Q_\mu s^\mu e^{\boldsymbol{hs}}\boldsymbol{\omega} \tag{4}$$

Suivi en boucle ouverte

- Considérons la trajectoire de concentration $c_{Ad}(t)$.
- La loi de commande en boucle ouverte $c_{AFd}(t)$ assurant le suivi est

$$c_{AFd}(t) = \frac{1}{q}\dot{c}_{Ad}(t+\tau) + \left[1 + \frac{k}{q}\right] c_{Ad}(t+\tau).$$

Systèmes quasi-finis commandables

- Représentation d'état typique, cas d'un seul retard

$$(*) \qquad s\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x} + B\delta\boldsymbol{u}$$

où $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$.

- Les trois conditions suivantes sont équivalentes
  1/ $(*)$ est commandable sans torsion, c.à.d. qu'il n'y a pas de trajectoires fixées dans le système

  2/ $(*)$ est spectralement commandable, ou encore $\forall s \in \mathbb{C}, \quad \mathrm{rk}_{\mathbb{C}}[sI - A \mid e^{-hs}B] = n$

  3/ $(*)$ est en liberté anticipée,

  4/ $\mathrm{rg}(B, AB, \ldots, A^{n-1}B) = n$.

On dira dans ce cas qu'elle est commandable.

Systèmes quasi-finis observables

- Représentation d'état typique, cas d'un seul retard

$$(*) \qquad \begin{aligned} s\boldsymbol{x} &= A\boldsymbol{x} + B\delta\boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{y} &= C\boldsymbol{x} \end{aligned}$$

où $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}^{n\times m}$, $C \in \mathbb{R}^{p\times n}$.

- Les trois conditions suivantes sont équivalentes
  1/ La dynamique de dimension finie d'entrée $\mathbf{u}(t) = \boldsymbol{u}(t-h)$ et de sortie $\boldsymbol{y}(t)$ est observable,
  2/ $(*)$ est spectralement observable, ou bien
  $$\forall s \in \mathbb{C}, \qquad \mathrm{rk}_{\mathbb{C}} \begin{bmatrix} C \\ sI - A \end{bmatrix} = n$$
  3/ $\mathrm{rk}\begin{bmatrix} C & AC & \dots & A^{n-1}C \end{bmatrix}^T = n$.

On dira dans ce cas qu'elle est observable.

Hypothèses de travail

- Les systèmes presque finis que nous allons étudier seront supposés
  - sans trajectoire fixée (toute trajectoire est susceptible d'être perturbée),
  - entièrement au repos pour $t \leqslant 0$.
- En outre, le système nominal correspondant sera
  - commandable et
  - observable,

  au sens défini par les deux résultats précédents.

Méthodologie pour suivi de trajectoires

Un mot de méthodologie

- Formulation d'atteinte d'objectif en suivi de trajectoires
- Suivi réalisé en 2 étapes découplées :
  - Suivi en boucle ouverte, utilisant la liberté (ou la platitude).
  - Stabilisation autour de la trajectoire.

Un mot de méthodologie (suite)

- Se retrouve en génie logiciel (forte cohésion, faible couplage).
- Hiérarchisation à deux résolutions
  - La première étape permet un “dégrossisage” du problème, en se laissant guider par le modèle (au travers de la liberté).
  - La deuxième affine le suivi et corrige les imperfections de modèle et méconnaissances de conditions initiales par bouclage.

Suivre ou ne pas suivre ?

- Cette deuxième étape de stabilisation est ici réalisée par un PID généralisé.
- Quel est l'avantage de cette démarche à 2 étapes par rapport à une approche de type "stabilisation pure" ?

Suivre ou ne pas suivre ? (suite)

- Supposons avoir un changement de point de consigne, $y(t)$ passant de y_0 à y_1, dont l'amplitude $|y_1 - y_0|$est importante par rapport aux grandeurs caractéristiques du modèle.
- Réalisant ce changement directement en cherchant à faire tendre vers zéro $|y(t) - y_1|$ (par exemple avec un PID classique), on obtient des dépassements ("overshoots") et des oscillations idésirables.
- En effectuant d'abord un suivi en utilisant la liberté, on se laisse guider par le modèle plutôt que d'essayer de le forcer.

Modèle du second ordre

Équation de Newton :

$$M\ddot{z} + \gamma\dot{z} + kz = F$$

avec

F	force appliquée
$\gamma\dot{z}$	terme d'amortissement
kz	terme de raideur

Second ordre : trajectoire de référence

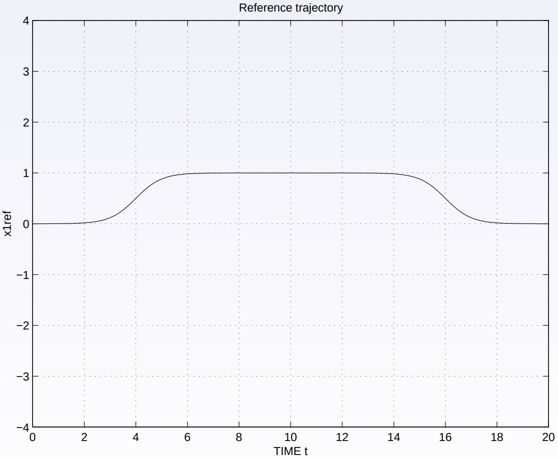


FIG. 1: Trajectoire désirée en hauteur

Second ordre : trajectoire de référence

- Méthode du couple calculé (*Computed Torque*)

$$F_{\text{ref}}(t) = M\ddot{z}_{\text{ref}}(t) + \gamma\dot{z}_{\text{ref}}(t) + kz_{\text{ref}}(t)$$

Second ordre : commande de référence

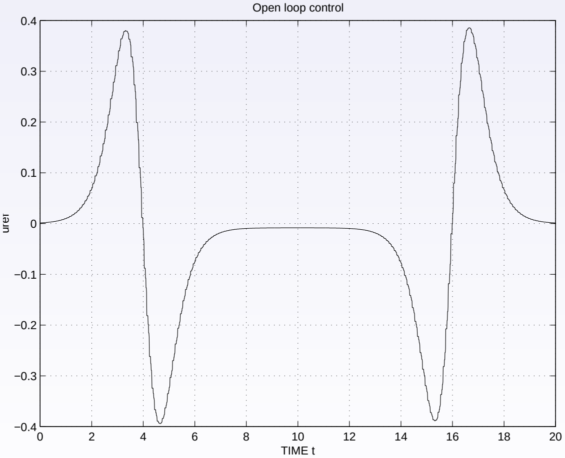


FIG. 2: Loi de commande en boucle ouverte réalisant le suivi

Suivre ou ne pas suivre ? (suite)

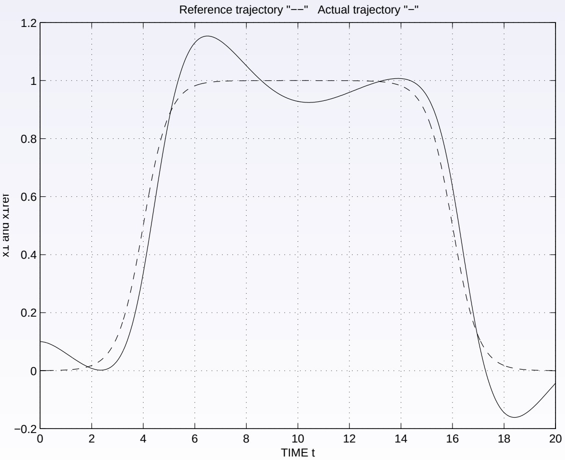


FIG. 3: Trajectoire de référence et réelle (PID pur)

Suivre ou ne pas suivre ? (suite)

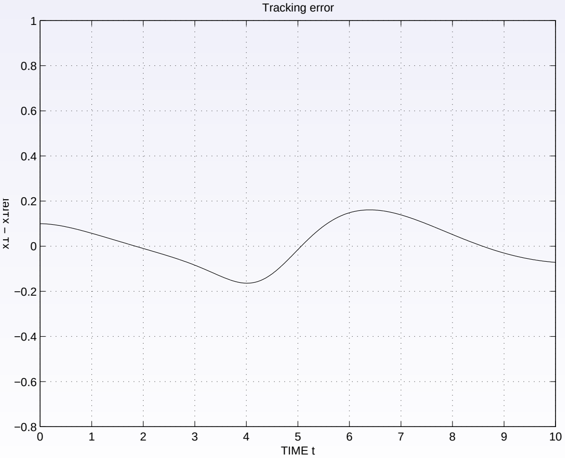


FIG. 4: Erreur de suivi (PID pur)

Suivre ou ne pas suivre ? (suite)

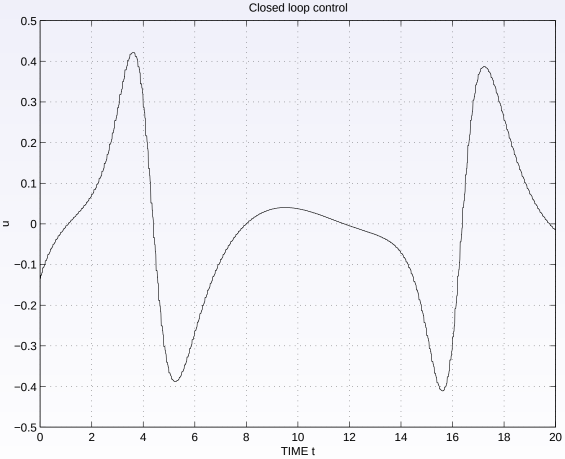


FIG. 5: Loi de commande appliquée (PID pur)

Suivre ou ne pas suivre ? (suite)

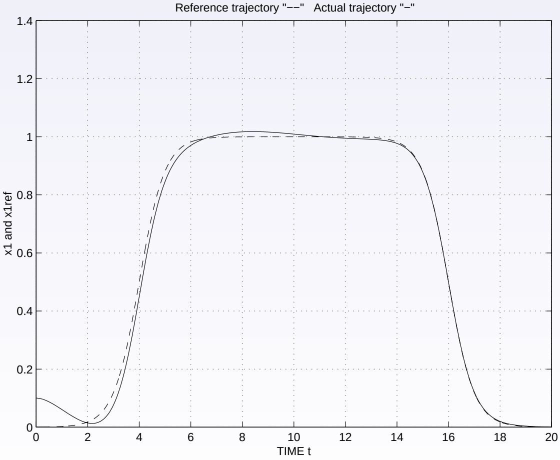


FIG. 6: Trajectoire de référence et réelle (suivi stabilisé par PID)

Suivre ou ne pas suivre ? (suite)

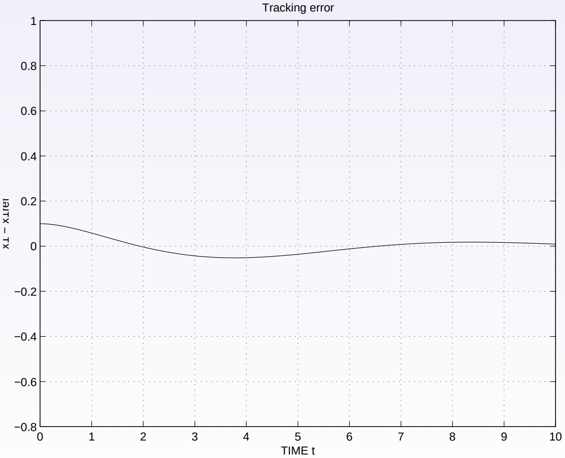


FIG. 7: Erreur de suivi (suivi stabilisé par PID)

Suivre ou ne pas suivre ? (suite)

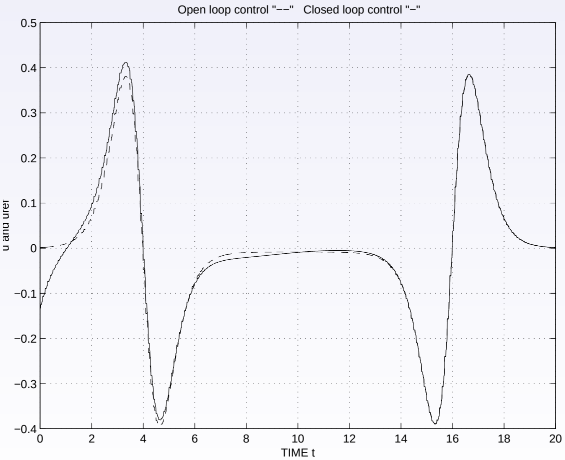


FIG. 8: Commandes en boucle ouverte et appliquée (suivi stabilisé par PID)

Liens multirésolution/génie logiciel

- Se retrouve en génie logiciel (forte cohésion, faible couplage).
- Hiérarchisation à deux résolutions
  - La première étape permet un “dégrossisage” du problème, en se laissant guider par le modèle (au travers de la liberté).
  - La deuxième affine le suivi et corrige les imperfections de modèle et méconnaissances de conditions initiales par bouclage.

Avantages de ce schéma

- Performances
  La loi de commande en boucle ouverte est obtenue sans intégrer d'équation différentielle. Elle peut donc être calculée hors-ligne et tabulée
- Choix de la trajectoire
  Donne une grande souplesse par rapport à un simple changement de point de consigne

Avantages de ce schéma (suite)

- Respect des contraintes
  Pour des spécifications données (bornes d'erreur, . . .), permet de moins relever les gains et donc de dépenser moins d'énergie par le biais de la commande
- Contrôle des transitoires
  Spécialement pour des systèmes non linéaires, se laisser guider par un modèle permet de maîtriser les évolutions transitoires en changement de régime

Suivi de trajectoires et PI généralisé sur divers exemples

Système instable du premier ordre

On considère

$$sy = ay + be^{-hs}u + \varpi \frac{e^{-\varphi s}}{s} \tag{5}$$

avec	y	la sortie mesurée
	u	la commande
	ϖ	une perturbation constante à $t = \varphi$
	$a > 0$	donnant un système instable

Suivi en boucle ouverte du réacteur simple

- Pour y_r le signal de référence, la loi en boucle ouverte assurant le suivi est

$$u_r = \frac{1}{b}\left(se^{hs}y_r - ae^{hs}y_r\right) \tag{6}$$

On définit les erreurs :

$$y_e = y - y_r, \qquad u_e = u - u_r$$

Et l'on obtient la dynamique d'erreurs :

$$sy_e = ay_e + be^{-hs}u_e + \varpi\,\frac{e^{-\varphi s}}{s} \tag{7}$$

Régulation par PI

- Posant

$$v_e = e^{-hs} u_e$$

la dynamique

$$s y_e = a y_e + b v_e + \varpi \frac{e^{-\varphi s}}{s}$$

peut être régulée, avec rejet de la perturbation, par

- le contrôleur PI

$$v_e = k_p y_e + k_i s^{-1} y_e \tag{8}$$

Prédiction

- Ce contrôleur peut être réécrit

$$\begin{aligned} u_e &= k_p e^{hs} y_e + k_i e^{hs} s^{-1} y_e \\ &= k_p e^{hs} y_e + k_i s^{-1} y_e - k_i \frac{1 - e^{-hs}}{s} e^{hs} y_e \end{aligned}$$

- Définissons la dynamique non perturbée

$$s\tilde{y}_e = a\tilde{y}_e + be^{-hs}\tilde{u} \qquad (9)$$

avec

$$y_e = \tilde{y}_e - \frac{\varpi}{a}\frac{e^{-\varphi s}}{s}$$

Prédiction (suite)

- Le bouclage prédictif utilisé est :

$$\tilde{u}_e = k_p e^{hs} \tilde{y}_e + k_i s^{-1} y_e - k_i \frac{1 - e^{-hs}}{s} e^{hs} \tilde{y}_e \tag{10}$$

où le 1^er terme $e^{hs}\tilde{y}_e$ et le 3^ième terme nécessitent une forme de prédiction.

- On utilise

$$\tilde{y}_e = b \frac{e^{-hs}}{s - a} \tilde{u}_e$$

Prédiction (suite)

- D'où la prédiction

$$e^{hs}\tilde{y}_e = \frac{b}{s-a}\left(e^{-h(s-a)} + 1 - e^{-h(s-a)}\right)\tilde{u}_e$$
$$= e^{ha}\frac{b}{s-a}\,e^{-hs}\tilde{u}_e + b\,\frac{1-e^{-h(s-a)}}{s-a}\,\tilde{u}_e$$

- C'est-à-dire :

$$e^{hs}\tilde{y}_e = e^{ha}\tilde{y}_e + b\,\frac{1-e^{-h(s-a)}}{s-a}\,\tilde{u}_e$$

Régulateur prédictif

- Le régulateur utilisé s'écrit

$$\bar{u}_e = k_p y_e^{\text{pred}} + k_i \left(s^{-1} y_e + \frac{1 - e^{-hs}}{s} y_e^{\text{pred}} \right) \tag{11a}$$

avec :

$$y_e^{\text{pred}} = e^{ah} y_e + b \frac{1 - e^{-h(s-a)}}{s - a} \tilde{u}_e \tag{11b}$$

Régulateur prédictif (suite)

- Ou, dans le domaine temporel :

$$\bar{u}_e(t) = k_p y_e^{\text{pred}}(t) + k_i \left(\int_0^t y_e(\tau) d\tau + \int_{t-h}^t y_e^{\text{pred}}(\tau) d\tau \right) \tag{12a}$$

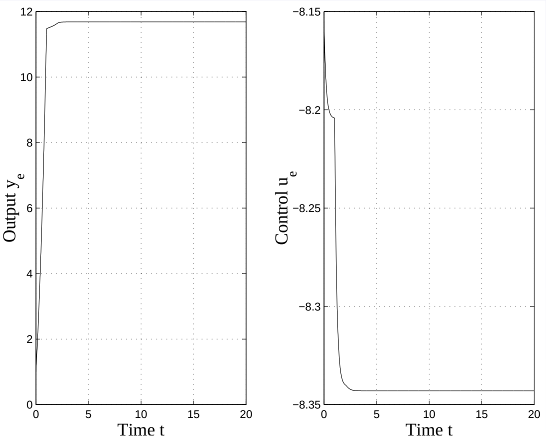
avec :

$$y_e^{\text{pred}}(t) = e^{ah} y_e(t) + \int_{t-h}^t e^{a(t-\tau)} b \bar{u}_e(\tau) d\tau \tag{12b}$$

Simulations

Modèle : $\dot{y}(t) = 1 * y(t) + 2 * u(t-1) + 5$

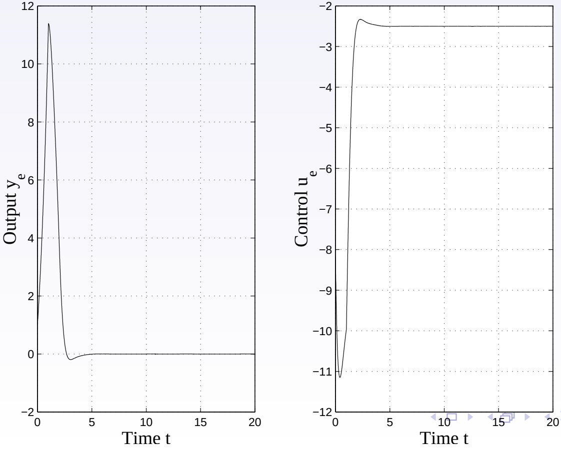
Régulateur P : $u(t) = -3 * y(t+1)$



Simulations (suite)

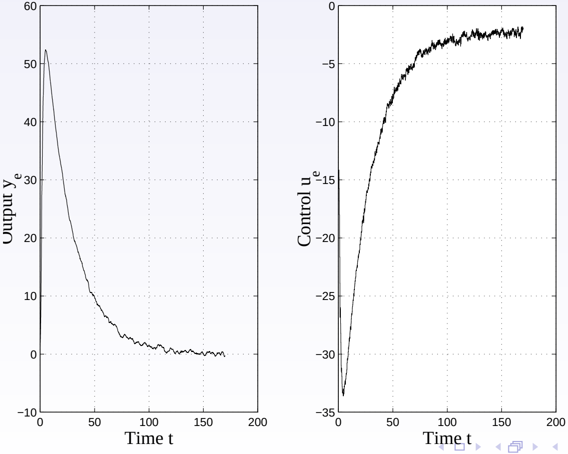
Modèle : $$\dot{y}(t) = 1 * y(t) + 2 * u(t-1) + 5$$

Régulateur PI : $$u(t) = -3 * y(t+1) - 5 * \int_0^{t+1} y(s)ds$$



Simulations : système perturbé

$$\dot{y}(t) = (a + \Delta a)y(t) + (b + \Delta b)u(t - h - \Delta h) + \varpi$$



Modèle du second ordre

- Considérons le modèle du second ordre

$$s^2 y + a_1 s y + a_0 y = e^{-hs} u + \varpi \frac{e^{-\varphi s}}{s}$$

La sortie y est une base.

- Soit y_r un signal de référence et

$$y_e = y - y_r, \qquad u_e = u - u_r$$

les erreurs.

Modèle du second ordre (suite)

- On obtient l'équation d'erreur

$$s^2 y_e + a_1 s y_e + a_0 y_e = e^{-hs} u_e + \varpi \frac{e^{-\varphi s}}{s} \tag{13}$$

Prenant un PID classique, on a

$$e^{-hs} u_e = -k_d s y_e - k_p y_e - \frac{k_i}{s} y_e \tag{14}$$

- Afin d'avoir une expression pour $s y_e$, on utilise un reconstructeur intégral, fournissant un filtrage fondé sur le modèle. Avec $\varpi = 0$, on a

$$s y_e = -a_1 y_e - \frac{a_0}{s} y_e + \frac{1}{s} u_e \tag{15}$$

Modèle du second ordre (suite)

- Par substitution dans (14)

$$\begin{aligned} e^{-hs}u_e &= -k_d\Big(- a_1 y_e - \frac{a_0}{s} y_e + \frac{1}{s} e^{-hs} u_e \Big) - k_p y_e - \frac{k_i}{s} y_e \\ &= (a_1 k_d - k_p) y_e + \frac{a_0 k_d - k_i}{s} y_e - \frac{k_d}{s} u_e \end{aligned}$$

- Ce qui conduit à

$$e^{-hs}u_e = -k_d s y_e - k_p y_e - \frac{k_i}{s} y_e - k_d \varpi \frac{e^{-\varphi s}}{s^2}$$

ayant supposé $\varpi = 0$ dans (15).

Modèle du second ordre (suite)

- Pour avoir une erreur statique nulle, il faut un double intégrateur sur y_e

$$u_e = -k_d s e^{hs} y_e - k_p e^{hs} y_e - \frac{k_i}{s} e^{hs} y_e - \frac{k_{ii}}{s^2} e^{hs} y_e$$

- Ce qui conduit au système en boucle fermée suivant

$$\left(s^2 + (a_1 + k_d)s + (a_0 + k_p) + \frac{k_i}{s} + \frac{k_{ii}}{s^2}\right) y_e = \left(1 + \frac{k_d}{s}\right) \varpi \frac{e^{-\varphi}}{s}$$

Reconstructeurs intégraux

Reconstructeurs bruts

- Considérons la représentation d'état

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}} &= A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{y} &= C\boldsymbol{x}\end{aligned}$$

- Par dérivations successives de la sortie $\boldsymbol{y}$, on obtient

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y} &= C\boldsymbol{x}\\ \dot{\boldsymbol{y}} &= CA\boldsymbol{x} + CB\boldsymbol{u}\\ \ddot{\boldsymbol{y}} &= CA^2\boldsymbol{x} + CAB\boldsymbol{u} + CB\dot{\boldsymbol{u}}\\ &\vdots\\ \boldsymbol{y}^{(n-1)} &= CA^{n-1}\boldsymbol{x} + \sum_{i=0}^{n-2} CA^{n-2-i}B\boldsymbol{u}^{(i)}\end{aligned}$$

Reconstructeurs bruts (suite)

- qui se réécrit

$$\boldsymbol{Y} = \mathcal{O}\boldsymbol{x} + \mathcal{T}\boldsymbol{U}$$

avec $\mathcal{O}$ la matrice d'observabilité,

$$\boldsymbol{Y} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{y} \\ \dot{\boldsymbol{y}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{y}^{(n-1)} \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u} \\ \dot{\boldsymbol{u}} \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}^{(n-2)} \end{pmatrix}$$

Reconstructeurs bruts (suite)

- et $\mathcal{T}$ la matrice

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 0 & & & \\ h_1 & 0 & \mathbf{0} & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ h_{n-1} & \cdots & h_1 & 0 \end{pmatrix}$$

avec $h_i = CA^{i-1}B$ les paramètres de Markov parameters et $\mathbf{0}$ la matrice bloc nulle.

Reconstructeurs bruts (suite)

- Multipliant par $\mathcal{O}^T$,

$$\mathcal{O}^T \boldsymbol{Y} = \mathcal{O}^T \mathcal{O} \boldsymbol{x} + \mathcal{O}^T \mathcal{T} \boldsymbol{U}$$

- Si le système est observable $\mathcal{O}$ est de rang plein,
- Donc $\mathcal{O}^T \mathcal{O}$ est inversible, et

$$\boldsymbol{x} = \mathcal{O}^\dagger \boldsymbol{Y} - \mathcal{O}^\dagger \mathcal{T} \boldsymbol{U} \tag{16}$$

avec $\mathcal{O}^\dagger = (\mathcal{O}^T \mathcal{O})^{-1} \mathcal{O}^T$.

- Cette expression ne peut être utilisée telle quelle, à cause des dérivées succesives des mesures.

Reconstructeurs intégraux

- Le modèle étudié

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}$$
$$\boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x}$$

peut se réécrre, par intégration

$$\boldsymbol{x} = A\boldsymbol{x}^{\int} + B\boldsymbol{u}^{\int}$$
$$\boldsymbol{y} = C\boldsymbol{x}$$

où $\int$ désigne l'integration, c.à.d.

$$\dot{z}^{\int} = z, \quad \text{et } z^{\int i} = \left(z^{\int i-1}\right)^{\int}$$

Reconstructeurs intégraux (suite)

- Par récurence, pour $\nu \geqslant 0$, on obtient

$$\boldsymbol{x} = A^{\nu} \boldsymbol{x}^{\int \nu} + \sum_{i=1}^{\nu} A^{i-1} B \boldsymbol{u}^{\int i} \tag{17}$$

- Supposant le système observable, un reconstructeur brut s'écrit

$$\boldsymbol{x} = \mathcal{O}^{\dagger} \boldsymbol{Y} - \mathcal{O}^{\dagger} \mathcal{T} \boldsymbol{U}$$

Reconstructeurs intégraux (suite)

- Et, posant $\nu = n-1$ dans (17)

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{x} &= A^{n-1}\boldsymbol{x}^{\int n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} A^{i-1}B\boldsymbol{u}^{\int i} \quad \text{et d'après (16)} \\
&= A^{n-1}\mathcal{O}^{\dagger}\boldsymbol{Y}^{\int n-1} - A^{n-1}\mathcal{O}^{\dagger}\mathcal{T}\boldsymbol{U}^{\int n-1} + \sum_{i=1}^{n-1} A^{i-1}B\boldsymbol{u}^{\int i} \\
&= A^{n-1}\mathcal{O}^{\dagger}\boldsymbol{\mathcal{Y}} - A^{n-1}\mathcal{O}^{\dagger}\mathcal{T}\boldsymbol{\mathcal{U}} + \tilde{\mathcal{C}}\boldsymbol{\mathcal{U}} \\
&= A^{n-1}\mathcal{O}^{\dagger}\boldsymbol{\mathcal{Y}} + \left(\tilde{\mathcal{C}} - A^{n-1}\mathcal{O}^{\dagger}\mathcal{T}\right)\boldsymbol{\mathcal{U}}
\end{aligned}
$$

Reconstructeurs intégraux

- avec

$$\mathcal{Y} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}^{\int n-1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{y}^{\int} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{U} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{u}^{\int n-1} \\ \vdots \\ \boldsymbol{u}^{\int} \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} A^{n-2}B & A^{n-3}B & \cdots & AB & B \end{pmatrix}$$

Reconstructeurs intégraux (suite)

- Cette expression est un reconstructeur intégral de l'état $\boldsymbol{x}$, noté $\boldsymbol{x}^{\int \boldsymbol{uy}}$

$$\boldsymbol{x}^{\int \boldsymbol{uy}} = A^{n-1}\mathcal{O}^{\dagger}\boldsymbol{\mathcal{Y}} + \left(\widetilde{\mathcal{C}} - A^{n-1}\mathcal{O}^{\dagger}\mathcal{T}\right)\boldsymbol{\mathcal{U}} \tag{18}$$

- Cette expression inclut des intégrales itérées des entrées et des sorties,

- Ceci lisse les mesures

- Ce schéma n'est pas stabilisant. Il doit être utilisé dans une boucle de régulation.

Conclusions pour le GPI

- Schéma simple et proche de ceux utilisés dans l'ingéniérie
- Fournit une certaine robustesse
- Obtenir le meilleur des deux mondes :
  - le modèle par variables d'état fournit les gains de stabilisation ;
  - la régulation par PI assure la robustesse

Application aux réseaux informatiques – Notion de platitude

Aperçu sur la variété des modèles

Modèles : transmission physique

- Transmission physique

  État : $w(z,t)$, à l'abscisse z et au temps t

  Commande : $u(t)$ signal émis en $x = 0$

  Modèle d'état linéaire (avec atténuation) :

$$
\begin{aligned}
\nu^2 \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}(z,t) &= \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(z,t) + \gamma \frac{\partial w}{\partial t}(z,t), \qquad z \in [0, L] \\
\frac{\partial w}{\partial z}(0,t) &= u(t) \\
\frac{\partial w}{\partial z}(L,t) &= y(t)
\end{aligned}
$$

- La mesure est le signal réceptionné à l'autre bout.

Modèles : Dynamique de file d'attente

- Dynamique de file d'attente

  État : $q(t)$ longueur de la file

  Commande : $\lambda(t)$ taux d'arrivée

  Modèle d'état :

$$\dot{q}(t) = -\mu \frac{q(t)}{1+q(t)} + \lambda(t)$$

  μ : taux de service (ici constant).

- En régime stationnaire : $\bar{\lambda} = \mu \dfrac{\bar{q}}{1+\bar{q}}$

  ou encore $\bar{q} = \dfrac{\bar{\lambda}}{\mu - \bar{\lambda}}$

Modèles : Session TCP linéarisée

État : $q(t)$, où $q(t)$ est la longueur de la file d'attente du noeud congestionné.

Commande : $W(t)$, où $W(t)$ est la largeur de la fenêtre.

Modèle d'état (Hollot, Towsley, ..., 2001), linéarisation autour d'un point de fonctionnement :

$$\dot{q}(t) = -\frac{1}{R_0} q(t) + \frac{N}{R_0} W(t)$$

avec

N	Nombre de sessions TCP traversant le noeud congestionné
R_0	Valeur nominale du RTT (Round Trip Time) (sec)

Modèles : Session TCP/RED linéarisée

État : $(W(t) \quad q(t))^T$, où $W(t)$ est la largeur de la fenêtre et $q(t)$ la longueur de la file d'attente du noeud congestionné.

Commande : $p(t) = \mathcal{P}(\bar{q}(t))$ la probabilité de rejet d'un paquet, avec $\bar{q}(t)$ une estimée de la longueur moyenne de $q(t)$.

Modèle d'état (Hollot et al. 2001), linéarisation :

$$\dot{W}(t) = -\frac{2N}{R_0^2 C} W(t) - \frac{R_0 C^2}{2N^2} p(t - R_0)$$

$$\dot{q}(t) = -\frac{1}{R_0} q(t) + \frac{N}{R_0} W(t)$$

avec	N	Nombre de sessions TCP traversant le noeud congestionné
	R_0	Valeur nominale du RTT (Round Trip Time) (sec)
	C	capacité du lien (paquets/sec)

Modèles : Session TCP/RED non linéaire

État : $(W(t) \quad q(t) \quad R(t))^T$, avec $W(t)$ largeur de la fenêtre, $q(t)$ longueur de file et $R(t)$ la valeur du RTT (Round Trip Time).

Commande : $p(t) = \mathcal{P}(\bar{q}(t))$ la proba. de rejet d'un paquet.

Modèle d'état (Hollot et al. 2001), approximation fluide :

$$\dot{W}(t) = \frac{1}{R(t)} - \frac{W(t)W(t-R(t))}{2R(t-R(t))}p(t-R(t))$$

$$\dot{q}(t) = -\frac{W(t)}{R(t)}N(t) - C, \qquad \text{avec} \quad R(t) = \frac{q(t)}{C} + T_p$$

où	$N(t)$	Nombre de sessions TCP traversant le noeud congestionné
	C	capacité du lien (paquets/sec)
	T_p	temps de propagation source/noeud congestionné

Approximation fluide : Nature continue du temps

- Temps de traitement d'une unité d'accès (unité atomique d'information transférée) suffisamment court.

  $$\Rightarrow \text{rapport } \frac{\text{débit global}}{\text{taille d'unité d'accès}}$$

  suffisamment grand.
- Très bien vérifié pour les réseaux haut débit.
  - ATM : cellule 40 octets, débit 150 à 300 Mbit/s
  - Ethernet Gigabit : trame $1,5$Ko, débit qques Gbit/s
- Pour des faibles débits, les schémas proposés sont transposables en discret.

Approximation fluide : Nature continue des commandes

- Commandes en débit (paquets/s) prises continues.
- Bonne approximation pour de hauts débits.
- Pour des faibles débits, les schémas sont transposables en discret.

Approximation des retards

- Caractère stationnaire des retards.
- Approximation fausse en réalité.

$\Rightarrow$ Nécessité d'un schéma prenant en compte la variabilité des retards

Modèles fluides de routeurs

Modèles de file FIFO

- Modèle de tampon de sortie d'un routeur
- Par analogie avec un équilibre de débit de fluide

$$\dot{q}(t) = v(t) - w(t)$$

$v(t)$	débit d'entrée à la file
$w(t)$	débit de sortie de la file

- Débit de sortie : vitesse de traitement de la file $r(q)$

Files FIFO : vitesse de traitement

- Vitesse de traitement

$$r(q(t)) = \frac{q(t)}{\theta(q(t))}$$

où $\theta(q)$ est le temps de séjour global de tous les paquets

- θ fonction monotone croissante de q
- Comprend
  - temps de traitement
  - temps d'attente
  - temps d'émission

Files FIFO : Modèles de temps de séjour

- Modèle constant

$$\theta(q) = \frac{1}{\rho}$$

- Modèle constant/linéaire par morceaux

$$\theta(q) = \begin{cases} \dfrac{1}{\rho} & \text{si } q < q_c \quad \text{(routeur non chargé)} \\ \dfrac{q}{\mu} & \text{si } q \geqslant q_c \quad \text{(routeur chargé)} \end{cases}$$

Files FIFO : Modèles de temps de séjour (suite)

- Modèle linéaire

$$\theta(q) = \frac{a + q}{\mu}$$

- Modèle non linéaire

$$\theta(q) = \frac{a + q + bq^2}{\mu}$$

Modèles (de file d'attente) de routeur

- Modèle à charge constante

$$\dot{q}(t) = -\rho\, q(t) + u(t)$$

- Modèle à charge constante par morceaux

$$\dot{q}(t) = \begin{cases} -\rho\, q(t) + u(t) & \text{si } q < q_c \quad \text{(routeur non chargé)} \\ -\mu + u(t) & \text{si } q \geqslant q_c \quad \text{(routeur chargé)} \end{cases}$$

c.à.d. un modèle saturé

$$\dot{q}(t) = -\rho\, \mathrm{sat}_{\mu/\rho, q_c}(q(t)) + u(t)$$

- Modèle à charge linéaire

$$\dot{q}(t) = -\frac{\mu q(t)}{a + q(t)} + u(t)$$

Routeur à charge constante avec retard de propagation

- Modèle source, routeur intermédiaire, destination
- Le routeur intermédiaire est celui le plus chargé entre la source et la destination

$$\dot{q}_1(t) = -\rho_1 q_1(t) + u(t - \tau_1)$$
$$\dot{q}_2(t) = \rho_2 q_2(t - \tau_2)$$

- Avec

$q_1(t)$	Taille de la file au goulot d'étranglement
$q_2(t)$	Taille de la file à la destination
$u(t)$	Débit de la source, pris comme commande
τ_1	Retard de la source au goulot
τ_2	Retard du goulot à la destination

Modèle de routeur à charge constante avec retard : remarques

- Remarque : schéma point à point (“end to end”) ; seule la source est commandée
- Modèle s’apparentant à ceux de Mascolo (1999), Hollot et al. (2001), Imer et Başar (2001)

Modèle routeur à charge constante avec retard : mesures

- Mesure de la taille de la file au goulot (en nombre de paquets) :

  $$y(t) = q_1(t - \tau_1)$$ du goulot à la source, accessible à la source

- Information de rétro-action utilisée pour la stabilisation autour des trajectoires de référence
- Représente l'état (de charge) du réseau

Routeurs : suivi de trajectoire

Liberté et suivi en boucle ouverte de routeurs à charge constante

- Une fois une stratégie déterminée, les autres variables en découlent À partir de

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= v(t-\tau_1) - \rho x_1(t) \\
\dot{x}_2(t) &= \rho x_1(t-\tau_2) \\
y(t) &= x_1(t-\tau_2) \\
\sigma(t) &= x_{2r}(t) \qquad \text{trajectoire de référence}
\end{aligned}$$

Liberté et suivi en boucle ouverte de routeurs à charge constante (suite)

- On obtient

$$
\begin{aligned}
x_{1r} &= \frac{1}{\rho}\sigma(t+\tau_2)\\
v_r(t) &= \frac{1}{\rho^2}\ddot{\sigma}(t+\tau_1+\tau_2)+\dot{\sigma}(t+\tau_1+\tau_2)\\
y_r(t) &= \dot{\sigma}(t+\tau_2-\tau_1)
\end{aligned}
$$

Suivi en boucle ouverte : remarques

- Les expressions précédentes ne nécessitent aucune intégration d'équation différentielle aux différences
- Seul imprératif : $\sigma(t)$ doit être dérivable.
- Une paramétrisation complète est obtenue.
- Le fait d'avoir des avances $(\sigma(t+\tau_2), \dots)$ n'est pas gênant puisque $\sigma(t)$ est connue à l'avance.

Routeurs : stabilisation et prédicteurs

Suivi avec stabilité par prédiction : introduction

- On peut, dans le cas de retards constants, utiliser des lois incluant des retards dits distribués.
- Par exemple, dans le cas d'un modèle de dynamique de file de la forme

$$\dot{q}(t) = -\rho + u(t - \tau)$$

où

$q(t)$	est la taille de la file,
ρ	est la vitesse de traitement du routeur étudié,
$u(t)$	est le débit de la source,
τ	est le retard de transmission de la source au routeur

Suivi avec stabilité par prédiction : introduction (suite)

- Une loi de commande stabilisante est

$$u(t) = \rho - Kq(t+\tau)$$

- Et, pour estimer la prédiction $q(t+\tau)$, on pose

$$q(t+\tau) - q(t) = \int_t^{t+\tau} \dot{q}(\eta) d\eta$$

d'où

$$\begin{aligned} q(t+\tau) &= q(t) + \int_t^{t+\tau} -\rho + u(\eta-\tau) d\eta \\ &= q(t) + \rho\tau + \int_{t-\tau}^{t} u(\eta) d\eta \end{aligned}$$

Suivi avec stabilité par prédiction : introduction (suite)

- La loi de commande cherchée est donc

$$u(t) = (1 - K\tau)\rho - Kq(t) - K\int_{t-\tau}^{t} u(\eta)d\eta$$

le dernier terme étant qualifié de retard distribué.

Suivi avec stabilité de routeurs à charge constante

- Ayant le modèle

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= v(t-\tau_1) - \rho x_1(t) \\
\dot{x}_2(t) &= \rho x_1(t-\tau_2) \\
y(t) &= x_1(t-\tau_1)
\end{aligned}$$

- L'équation E/S s'écrit

$$\dot{y}(t) + \rho y(t) = v(t-2\tau_1)$$

- Posant

$$y_e(t) = y(t) - y_r(t), \qquad v_e(t) = v(t) - v_r(t)$$

Suivi avec stabilité de routeurs à charge constante (suite)

- On obtient le système d'erreur

$$\dot{y}_e(t) + \rho y_e(t) = v_e(t - 2\tau_1)$$

ou, symboliquement

$$(s + \rho)\hat{y}_e = e^{-2\tau_1 s}\hat{v}_e$$

- Remarque : le système d'erreur est stable !
- Stabilisation : $y_e = y - y_r \underset{t \to +\infty}{\longrightarrow} 0$
- On veut un comportement exponentiellement stable des erreurs de suivi, c.à.d. :

$$\dot{y}_e(t) = -\lambda y_e(t) \qquad \text{avec } \lambda > 0$$

en boucle fermée avec un taux de convergence spécifié

Suivi avec stabilité de routeurs à charge constante (suite)

- Ayant $\dot{y}_e(t) + \rho y_e(t) = v_e(t - 2\tau_1)$ et voulant

$$\dot{y}_e(t) = -\lambda y_e(t)$$

- On pose

$$v_e(t) = (\rho - \lambda) y_e(t + 2\tau_1)$$

Suivi avec stabilité de routeurs à charge constante (suite)

- Symboliquement $y_e(t+2\tau_1)$ s'écrit (cf. Manitius et Olbrot (1979), Bréthé et Loiseau (1998))

$$
\begin{aligned}
e^{2\tau_1 s}\hat{y}_e &= \frac{1}{s+\rho}\hat{u}_e \qquad \text{instable si } \rho < 0 \\
&= \frac{1}{s+\rho}\left(e^{-2\tau_1(s+\rho)} + 1 - e^{-2\tau_1(s+\rho)}\right)\hat{u}_e \\
&= e^{-2\tau_1\rho}\left(\frac{1}{s+\rho}e^{-2\tau_1 s}\hat{u}_e\right) + \frac{1-e^{-2\tau_1(s+\rho)}}{(s+\rho)}\hat{u}_e \\
&= e^{-2\tau_1\rho}\hat{y}_e + \frac{1-e^{-2\tau_1(s+\rho)}}{(s+\rho)}\hat{u}_e
\end{aligned}
$$

Suivi avec stabilité de routeurs à charge constante (suite)

- ou, en temporel

$$y_e(t+2\tau_1) = e^{-2\tau_1\rho} y_e(t) + \int_{t-2\tau_1}^{t} e^{-\rho(t-\eta)} u_e(\eta) d\eta$$

- La loi de commande de suivi stabilisant est donc

$$\begin{aligned} v(t) &= v_r(t) + v_e(t) \\ &= v_r(t) + (\rho-\lambda)e^{-2\tau_1\rho} y_e(t) + \\ &\qquad (\rho-\lambda)\int_{t-2\tau_1}^{t} e^{-\rho(t-\eta)}(v(\eta)-v_r(\eta))d\eta \end{aligned}$$

Suivi avec stabilité de routeurs à charge constante (suite) (suite)

ou encore

$$v(t) = \underbrace{v_r(t) + (\rho - \lambda) \int_{t-2\tau_1}^{t} e^{-\rho(t-\eta)} v_r(\eta) d\eta}_{\text{connu}} +$$

$$\underbrace{(\rho - \lambda) \left[e^{-2\tau_1 \rho} y_e(t) + \int_{t-2\tau_1}^{t} e^{-\rho(t-\eta)} v(\eta) d\eta \right]}_{\text{mesuré}}$$

avec $v_r(t) = \frac{1}{\rho^2} \ddot{\sigma}(t + \tau_1 + \tau_2) + \dot{\sigma}(t + \tau_1 + \tau_2)$

et $\int_0^\infty \sigma(\eta) d\eta$ données à recevoir à la destination (requête)

Platitude et suivi de modèles non linéaires

Platitude différentielle

Considérons un système non linéaire

$$F_l(\boldsymbol{z}, \ldots, \boldsymbol{z}^{(i)}, \ldots, \boldsymbol{z}^{(\nu_l)}) = 0, \qquad l = 1, \ldots, N.$$

Il est différentiellement plat s'il existe un m-uple $\boldsymbol{y} = (y_1, \ldots, y_m)$ (m nombre d'entrées indépendantes) de fonctions, la *sortie plate*, t.q. :

1/ Caractère endogène :
$\boldsymbol{y}$ s'exprime en fonction des variables du système $\boldsymbol{z}$

$$y_i = P_i(\boldsymbol{z}, \ldots, \boldsymbol{z}^{(k)}, \ldots, \boldsymbol{z}^{(\rho_i)})$$

pour $i = 1, \ldots, m$.

Platitude différentielle (suite)

2/ Indépendance :

Les composantes de $\boldsymbol{y}$ sont différentiellement indépendantes

$$Q(\boldsymbol{y}, \ldots, \boldsymbol{y}^{(k)}, \ldots, \boldsymbol{y}^{(\alpha)}) = 0 \Longrightarrow Q \equiv 0$$

3/ Forme canonique de suivi :

Toute variable z_i du système s'exprime directement à partir $\boldsymbol{y}$ et de ses dérivées

$$z_i = R(\boldsymbol{y}, \ldots, \boldsymbol{y}^{(k)}, \ldots, \boldsymbol{y}^{(\gamma)})$$

Platitude différentielle (suite)

- La 3^e propriété : sol. simple du suivi de trajectoires de références $\boldsymbol{y}_r = (y_{1r}(t), \ldots, y_{mr}(t))$.
- La 2^e propriété : les composantes de $\boldsymbol{y}_r(t)$ peuvent être choisies indépendamment.

Platitude différentielle d'un modèle d'état

Le système $\quad \dot{\boldsymbol{x}}(t) = f(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)), \quad$ où $\boldsymbol{x}(t) \in \mathbb{R}^n$ et $\boldsymbol{u}(t) \in \mathbb{R}^m$

est *différentiellement plat* s'il existe un m-uple de sorties plates,

$$\boldsymbol{y}(t) = h(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t), \dot{\boldsymbol{u}}(t), \ldots, \boldsymbol{u}^{(r)}(t)), \qquad \boldsymbol{y}(t) \in \mathbb{R}^m, r \in \mathbb{N}$$

tel que d'une part

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}(t) &= A(\boldsymbol{y}(t), \dot{\boldsymbol{y}}(t), \ldots, \boldsymbol{y}^{(q)}(t)) \\ \boldsymbol{u}(t) &= B(\boldsymbol{y}(t), \dot{\boldsymbol{y}}(t), \ldots, \boldsymbol{y}^{(q+1)}(t)) \end{aligned}$$

où $q \in \mathbb{N}$, et t.q. d'autre part les éqs. du système

$$\frac{dA}{dt}(\boldsymbol{y}(t), \ldots, \boldsymbol{y}^{(q+1)}(t)) = f(A(\boldsymbol{y}(t), \ldots, \boldsymbol{y}^{(q)}(t)), B(\boldsymbol{y}(t), \ldots, \boldsymbol{y}^{(q+1)}(t)))$$

soient identiquement satisfaites.

Suivi de trajectoires

- Session TCP/RED : modèle simplifié

$$\dot{W}(t) = \frac{1}{R_0} - \frac{(W(t))^2}{2R_0} p(t-R)$$
$$\dot{q}(t) = \frac{W(t)}{R_0} N - C$$

$W(t)$	largeur de la fenêtre
$q(t)$	longueur de la file d'attente du noeud congestionné
$p(t)$	probabilité de rejet d'un paquet
N	Nombre de sessions TCP traversant le noeud congestionné
R_0	Valeur nominale du RTT (Round Trip Time) (sec)
C	capacité du lien (paquets/sec)

Suivi de trajectoires (suite)

- Supposons avoir, d'après un opérateur, une politique d'allocation de file de noeuds chargés, $q_r(t)$. Alors, on en tire

$$W(t) = \frac{R_0(\dot{q}_r(t) + C)}{N}$$

et, d'après la dynamique de fenêtre

$$\begin{aligned} p(t-R) &= \frac{2R_0}{(W(t))^2}\left(\frac{1}{R_0} - \dot{W}(t)\right) \\ &= \frac{2(1 - R_0\dot{W}(t))}{(W(t))^2} \end{aligned}$$

Suivi de trajectoires (suite)

et, après remplacement

$$p_r(t) = \frac{2N(N - R_0^2 \ddot{q}_r(t + R_0))}{(R_0 \dot{q}_r(t + R_0) + C)^2}$$

qui assure le suivi en boucle ouverte de q_r.

- Ainsi, pour un taux de charge (resp. de pertes) instantanné donné (via $q_r(t)$), on en déduit la probabilité de marquage à appliquer,
- et ce, sans intégrer d'équation différentielle.

Conception de trajectoires

- On désire une représentation simple et souple des trajectoires de référence dans un espace fonctionnel $\mathcal{F}$ donné
- Plus précisément, on recherche une classe de trajectoires telle que :
  - Les membres de cette classe soient une combinaison linéaire de fonctions connues, $\sum_1^N \alpha_i \phi_i(t)$.
  - La classe forme un espace d'approximation de $\mathcal{F}$.
  - Les bornes supérieures et inférieures d'un membre de la classe se déduisent simplement des paramètres servant à composer ce membre.
  - Les fonctions $\phi_i(t)$ soient bien localisées en temps et en fréquence.

Conception de trajectoires (suite)

- On prend par exemple une B-spline d'ordre k

$$\sigma(t) = \sum_{0}^{N_0} p_i b_{i,k}(t)$$

p_i : points de contrôle
$b_{i,k}(t)$: fonctions de base B-spline d'ordre k.

Les points de contrôle p_i sont des paramètres de conception spatiaux de trajectoire.

- On peut également prendre des Splines d'ondelettes.

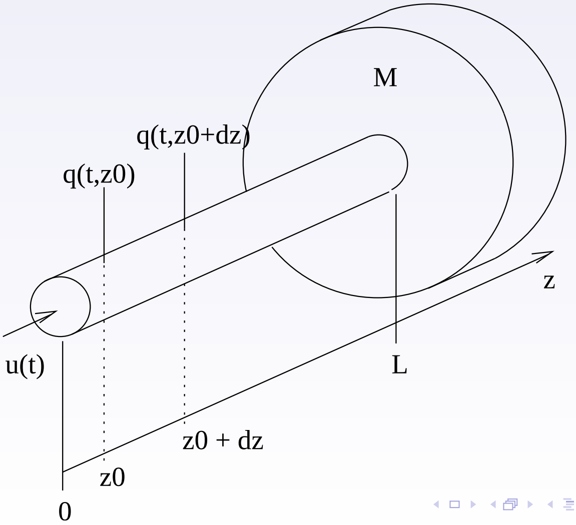
Conception de trajectoires (suite)

- Avantages des splines :
  - La dérivée d'une spline (d'ordre k) est une spline (d'ordre $k-1$)
  - Une spline approximante est incluse dans l'envoloppe convexe de ses points de contrôle
- Autre paramètre de conception : changement de temps, $t \mapsto \zeta(t)$, permet de mesurer la vitesse de parcours de la trajectoire géométrique
- Le changement de temps est un paramètre de conception temporel.
- Les paramètres de conception spatiaux et temporel agissent comme des meta-commandes pour un contrôle à plus haut niveau sémantique.

Des SàR aux EDP : Équation des ondes et forage

Vibrations de torsion d'un poutre flexible

Schéma de la poutre



Équations de la poutre

- Comportement en torsion d'une barre flexible, avec un couple appliqué à un bout et une masse à l'autre bout.
- Équation des ondes unidimensionnelle

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 \frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2}(\tau, z) &= \frac{\partial^2 q}{\partial z^2}(\tau, z) \\
\frac{\partial q}{\partial z}(\tau, 0) = -u(\tau), &\qquad \frac{\partial q}{\partial z}(\tau, L) = -J \frac{\partial^2 q}{\partial \tau^2}(\tau, L) \\
q(0, z) = q_0(z), &\qquad \frac{\partial q}{\partial \tau}(0, z) = q_1(z)
\end{aligned}
$$

Équations de la poutre (suite)

$q(\tau, z)$	déplacement angulaire de la position non excitée à un point $z \in [0, L]$ à l'instant $\tau \geqslant 0$
L	la longueur de la barre
σ	l'inverse de la vitesse de propagation des ondes
J	le moment d'inertie de la masse
$u(\tau)$	le couple de commande
$q_0,\ q_1$	déplacement et vitesse angulaire initiaux.

Modèle à retards

- Solution générale

$$q(\tau, z) = \phi(\tau + \sigma z) + \psi(\tau - \sigma z)$$

- Sortie choisie

$$y(\tau) = q(\tau, L)$$

- Posant $t = (\sigma/J)\tau$, $v(t) = (2J/\sigma^2)u(t)$ and $T = \sigma L$, on obtient

$$\ddot{y}(t) + \ddot{y}(t - 2T) + \dot{y}(t) - \dot{y}(t - 2T) = v(t - T)$$

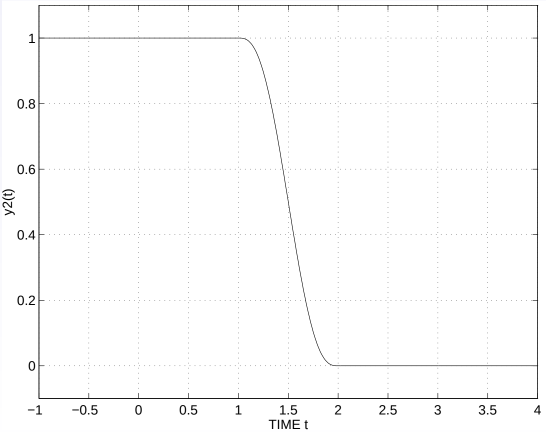
Modèle à retards (suite)

- Le système est δ-libre, de base y

$$v = (\delta^{-1} + \delta)\ddot{y} + (\delta^{-1} - \delta)\dot{y}$$

Suivi en boucle ouverte

$$v_d(t) = \ddot{y}_d(t+T) + \ddot{y}_d(t-T) + \dot{y}_d(t+T) - \dot{y}_d(t-T)$$



Suivi : commande en boucle ouverte

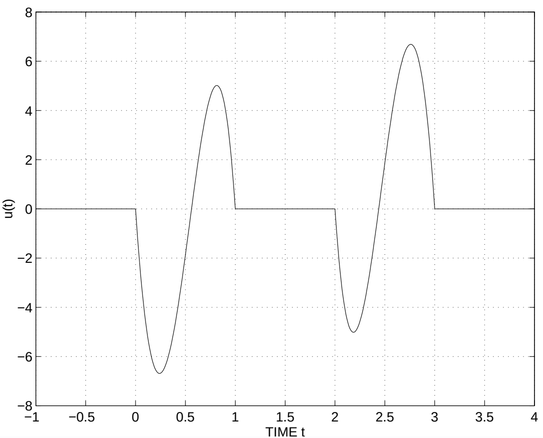
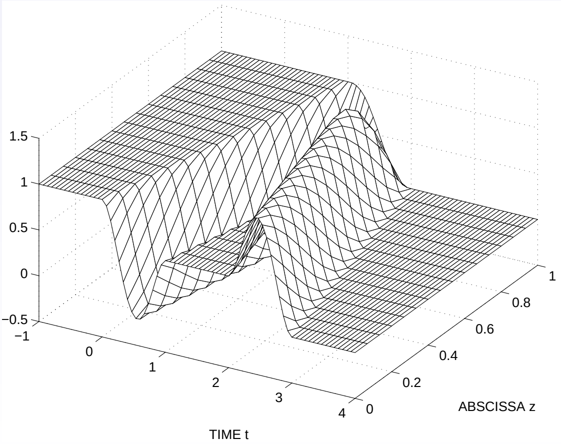


FIG. 13: La commande u.

Suivi : Déplacements des autres points de la barre

$$q_d(z,t) = \frac{1}{2}\Big[y_d(t-z+T)+\dot{y}_d(t-z+T)+y_d(t-T+z)-\dot{y}_d(t-T+z)\Big]$$



Réduction de l'adhérence-glissement dans les systèmes de forage

Système de forage

Appareil de forage :

- En surface : le rig (treuil, crochet, poulies, pompe à boue, etc.)
- Le long du puits :
  - Un train de tiges, de 0 à 6000m, $\varnothing$ ext. 10cm, épaisseur 0.5cm
  - Un train de masse-tiges, de 300 à 600m, $\varnothing$ ext. 20cm, épaisseur 2cm, masse de 40 à 60 tonnes
- En fond de puits, un outil :
  - soit avec plusieurs cônes, munis de dents ; travaille en poinçonnement de la roche,
  - soit muni de pastilles de diamant polycristallin ; travaille en arrachement de la roche

Commandes

- Les tiges sont vissées les unes aux autres à force.
- Le train de tiges/masse-tiges est retenu en surface grâce à un système crochet + poulies + treuil. L'actionnement du frein sur le treuil est la 1$^{\text{ière}}$ commande.
- L'ensemble tiges, masse-tiges, outil est entrainé en rotation en surface (tige carrée dans un logement). Le couple du moteur de rotation est la 2$^{\text{ième}}$ commande.
- Chaque tige est creuse et l'outil est muni de duses de façon à faire circuler un fluide pour remonter les debris de roche forée.

Commandes (suite)

- Le fluide (eau + additifs chimiques) de forage arrive en sortie des duses d'outil à 50m/s. Le débit de fluide injecté en surface est la 3$^{\text{ième}}$ commande.

Précautions

- Le poids sur outil (frein du treuil en surface) ne doit pas être trop important (effort de forage de roche trop élevé) ; risque de génération de vibrations avec résonnances.
- La vitesse de rotation ne doit pas être trop importante (risque de vibrations) ni trop faible (risque de bloquage de l'outil).
- Le débit de fluide ne doit pas être trop important (risque de fissures dans les parois du puits et perte de fluide, ou risque d'effondrement des parois du puits) ni trop faible (risque de blocage de l'outil).

Dysfonctionnements vibratoires

- Cycles d'adhérence-glissement (stick-slip), lié aux vibrations de torsion du train de tiges. Fatigue et usure du train de tiges, Risque de dévissage des tiges . . .

- Rebond de l'outil, lié aux vibrations de traction/compression du train de masse-tiges. Risque d'endommagement de l'outil.

- Précession du train de masse-tiges et de l'outil, lié aux vibrations de flexion du train de masse-tiges. Fatigue et usure du train de masse-tiges.

Systèmes de forage : moyens d'action

- On peut chercher à
  1) détecter par anticipation les problèmes, ou bien
  2) éviter de les provoquer.
- Le 1) est à court terme
- Le 2) est à moyen/long terme.

Vue schématique des vibrations de torsion

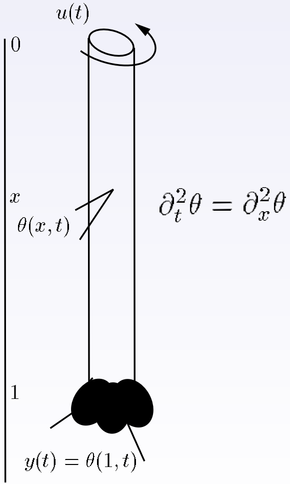


FIG. 15: Vibrations de torsion.

Dynamique de torsion

- Dynamique de torsion d'un système de forage

$$\frac{\partial\theta}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x^2}\theta$$
$$\frac{\partial\theta}{\partial x}(0,t) = -u(t)$$
$$\frac{\partial\theta}{\partial x}(1,t) = F\left(\frac{\partial\theta}{\partial t}(1,t)\right)$$

- avec

$\theta(x,t)$	Profil de torsion à t et en $x \in [0,1]$
u	couple de commande en surface
$F(v)$	loi de friction en fond de puits.

Forage par trajectographie régulière

- On prend comme trajectoires désirées les variables de fond (déplacement angulaire).
- Si ces trajectoires sont suffisamment régulières, on en déduit des lois de commande douces en surface.
- Principal avantage : on évite d'exciter les modes de vibration des trains de tiges et de masse-tiges.

Trajectographie régulière et platitude

- Sortie plate du système : l'angle en fond de puits $y(t) = \theta(1, t)$. Le système est δ-plat (Mounier et Rudolph).

- Paramétrisation explicite des trajectoires

$$2\theta(x,t) = y(t+x-1) + y(t-x+1) - \int_{t-1+x}^{t+1-x} F(\dot{y}(\tau))d\tau$$

- Donc, pour stabiliser le système et réduire l'adhérence-glissement on stabilise $y(t)$.

Stabilisation de l'adhérence-glissement

- À chaque vitesse ω_r il correspond une rotation uniforme à vitesse constante

$$\theta(x,t) = a + \omega_r t + F(\omega_r)x, \qquad u = -F(\omega_r)$$

solution des équations de dynamique de torsion.

- Lorsque $dF/dv(\omega_r) > 0$, ce mouvement stationnaire est instable.

Stabilisation de l'adhérence-glissement (suite)

- Loi stabilisante, n'utilisant que les mesures de vitesse en surface (cf. P. Rouchon

$$u(t) = -\omega(t) + v(t) - F(v(t))$$

avec

$$v(t) = \omega_r(t) - \lambda I(t) - \frac{\lambda}{2}\left(\int_{t-2}^{t} v(\tau) d\tau\right)$$

$$\dot{I}(t) = \omega(t) - \omega_r(t)$$

Stabilisation de l'adhérence-glissement (suite)

- On doit avoir $\lambda > 0$, qui assure pour la sortie plate $y(t) = \theta(1, t)$, la dynamique suivante

$$\frac{d}{dt}\big(y(t+1) - y_r(t+1)\big) = -\lambda\big(y(t+1) - y_r(t+1)\big)$$

- Où la référence $t \mapsto y_r(t)$ est telle que $\dot{y}_r(t+1) = \omega_r(t)$.

- Notons que le bouclage fait intervenir des retards distribués (cf. par ex. Bréthé-Loiseau).

Puits profonds et déviés

- Forage dirigé, pour exploiter des nappes horizontales.
- Forage offshore profond.

Conclusion sur le forage

- Beaucoup de systèmes à retards technologiques semblent presque-finis : très aisés à commander.
- L'une des seules classes d'exemples non presque-finie est issue de l'équation des ondes.
- Deux directions majeures :
  - Celle des systèmes à paramètres distribués, déja abordée,
  - Celle des systèmes presque-finis, en lien avec les récents PID généralisés (M. Fliess, R. Marquez, E. Delaleau).

Conclusions

- PIs généralisés : obtenir le meilleur des deux mondes
  - entre robustesse des PI et facilité de réglage des modèles d'état
- Inconvénient : il faut connaître un modèle
  - Dans le cas où un modèle est très mal connu, utiliser des formes a priori
  - tels Broïda-Strejc ou la commande sans modèle de M. Fliess, C. Join, H. Sira-Ramìrez

Conclusions (suite)

- La platitude permet de mêler prédiction et correction pour les systèmes non linéaires
- La stabilisation des systèmes plats est très aisée de par la linéarisabilité par bouclage

Compléments

- Approche algébrique utilisant la théorie des modules
- Pas de distinction a priori des variables
- Interprétations de beaucoup de notions de commandabilités de la littérature

Commandabilités et π-liberté

Notion de module et systèmes sans retards ; systèmes généraux

MODULES ET SYSTÈMES SANS RETARDS

- Module : ensemble d'équations différentielles
- Analogue d'un espace vectoriel, avec les coefficients dans un anneau (au lieu d'un corps).
- Équations de l'algèbre linéaire : espaces vectoriels
  Équations différentielles linéaires : modules.
- Systèmes sans retard : l'anneau des coefficients est celui des polynômes différentiels

  $$k\left[\frac{d}{dt}\right]$$

  avec k un corps.

MODULES ET SYSTÈMES SANS RETARDS (suite)

- Exemple :

$$\dot{y} = -y + u$$

Le $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}]$-module est noté $[u, y]_{\mathbb{R}[\frac{d}{dt}]}$ ou $[u, y]$.

- Conséquence de la notion de module : les coefficients sont dans un anneau et non dans un corps $\Longrightarrow$ non inversibilité de $(\frac{d}{dt} + 1)$ dans

$$\left(\frac{d}{dt} + 1\right) y = u$$

En particulier, on ne s'autorise pas à intéger les équations du système.

MODULES ET SYSTÈMES SANS RETARDS (suite)

- De manière informelle

$$[u, y] = \left\{ p\left(\tfrac{d}{dt}\right) y + q\left(\tfrac{d}{dt}\right) u \;\middle|\; p,\ q \in \mathbb{R}[\tfrac{d}{dt}], \quad \frac{d}{dt}y + y - u = 0 \right\}$$

- De manière formelle

$$0 \rightarrow \left[\frac{d}{dt}Y + Y - U\right] \rightarrow [U, Y] \rightarrow [u, y] \rightarrow 0$$

C.à.d. $[u, y] = [U, Y]/[\frac{d}{dt}Y + Y - U]$

- D'où la définition [Fli90] : Un Système linéaire Λ sans retards est un $k[\frac{d}{dt}]$-module de type fini.

SYSTÈMES ET DYNAMIQUES

R anneau commutatif unitaire, sans diviseurs de zéro.

- [FM98] Un R-système est un R-module finiment engendré.
- Une R-dynamique Λ est un R-système muni d'une entrée, c.à.d. un sous ensemble $\boldsymbol{u}$ de Λ tel que $\Lambda/[\boldsymbol{u}]$ est de torsion.
- Élément $w \in \Lambda$ de torsion :

$$\exists p \in R,\ p \neq 0, \qquad pw = 0$$

Exemple :

$$\frac{d}{dt}x - x = \left(\frac{d}{dt} - 1\right)x = 0$$

SYSTÈMES ET DYNAMIQUES (suite)

- $\Lambda/[\boldsymbol{u}]$ est de torsion :

$$\forall\, w \in \Lambda,\ \exists\, p,\ q \in R,\ p \neq 0, \qquad pw = qu$$

Toute variable d'une dynamique est (différentiellement) influencée par l'entrée. Par exemple, pour

$$\frac{d}{dt}\, y = -y + u$$

Dans $[u, y]/[u] = [\bar{y}]$:

$$\frac{d}{dt}\, \bar{y} + \bar{y} = 0$$

SYSTÈMES ET DYNAMIQUES (suite)

- Une sortie du système Λ est un sous-ensemble de Λ.
- Un R-système entrée-sortie est une R-dynamique munie d'une sortie.
- Contrairement à la description kalmanienne d'état, cette description inclut toutes les variables du système.

Notions de commandabilité dans un cadre général ; systèmes à retards

NOTIONS GÉNÉRALES DE COMMANDABILITÉ

- [FM98] Un R-système Λ est R-commandable sans torsion (resp. R-commandable projectif, R-commandable libre) si Λ est sans torsion (resp. projectif, libre).
- Un R-module est sans torsion s'il ne contient aucun élément de torsion, c.à.d. aucun élément w satisfaisant $pw = 0$, avec $p \in R, p \neq 0$.
- Un élément de torsion satisfait une équation (en général) différentielle non influencée par l'entrée.

NOTIONS GÉNÉRALES DE COMMANDABILITÉ (suite)

- Ceci est impossible dans un espace vectoriel, puisque $pw = 0$ implique $w = 0$, p étant inversible.
- Par exemple dans

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_2 + u \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 \\ \dot{x}_2 &= x_2 + u \end{aligned}$$

le premier système est $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}]$-commandable sans torsion et le deuxième ne l'est pas, puisque x_1 est de torsion.

NOTIONS GÉNÉRALES DE COMMANDABILITÉ (suite)

- Un R-module est projectif si toute matrice de présentation admet un inverse à droite.

- Par exemple dans

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dt} & -1 & 0 \\ 0 & \frac{d}{dt} - 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u \end{pmatrix} = 0$$

L'on a

$$\begin{pmatrix} \frac{d}{dt} & -1 & 0 \\ 0 & \frac{d}{dt} - 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

NOTIONS GÉNÉRALES DE COMMANDABILITÉ (suite)

- Directement relié à l'existence d'équations de Bézout.

NOTIONS GÉNÉRALES DE COMMANDABILITÉ (suite)

- Un R-module est libre s'il admet une base, c.à.d. un ensemble R linéairement indépendant et générateur.

- Par exemple dans

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_2 + u \end{aligned} \qquad \begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 \\ \dot{x}_2 &= x_2 + u \end{aligned}$$

  Le premier système est $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}]$-commandable libre et admet x_1 pour base ; en effet, $x_2 = \frac{d}{dt}x_1$, $u = -\frac{d}{dt}x_1 + \frac{d^2}{dt^2}x_1$.
  Le deuxième ne l'est pas, puisque x_1 est de torsion ; en effet

- La R-commandabilité libre (resp. projective) implique la R-commandabilité projective (resp. sans torsion).

NOTIONS GÉNÉRALES DE COMMANDABILITÉ (suite)

- Par exemple, dans
$$\frac{d}{dt} y = -y + u$$
on a
$$\hat{y} = \frac{1}{1+s} \hat{u}$$

- Le $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}]$-module correspondant est libre, de base y :
$$u = \left(\frac{d}{dt} + 1\right) y$$

NOTIONS GÉNÉRALES DE COMMANDABILITÉ (suite)

- Permet un suivi de trajectoire des plus aisés ; se donnant $y_d(t)$, la commande en boucle ouverte $u_d(t)$ est directement donnée par

$$u_d(t) = \dot{y}_d(t) + y_d(t)$$

NOTIONS GÉNÉRALES DE COMMANDABILITÉ (suite)

- La notion la plus agréable mathématiquement est la liberté sur R.
- Elle se rencontre malheureusement très peu en pratique.
- Le caractère sans torsion est presque toujours réalisé en pratique, mais n'est pas constructif.
- $\Longrightarrow$ Besoin d'une notion équivalente mathématiquement au caractère sans torsion et qui permette de recouvrir les avantages de la liberté, notamment l'existence d'une base.

π-LIBERTÉ

- [FM98] Soit Λ un R-système, A une R-algèbre et $\mathcal{S}$ une partie multiplicative de A telle que Λ est $\mathcal{S}^{-1}R$-commandable libre.
- Alors il existe π dans $\mathcal{S}$ tel que Λ est $R[\pi^{-1}]$-commandable libre. Λ est dit π-libre.
- Une sortie étant une base de $R[\pi^{-1}] \otimes_R \Lambda$ est dite π-basique ou π-plate.
- Notion générale permettant de recouvrir les avantages mathématiques de la liberté ; sera explicitée sur des exemples de systèmes à retards.

SYSTÈMES ET DYNAMIQUES

- R est $k[\frac{d}{dt}, \delta_1, \ldots, \delta_r] = k[\frac{d}{dt}, \boldsymbol{\delta}]$, $k = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- Les δ_i sont des opérateurs retards localisés d'amplitude non commensurables.
- Correspond, pour une fonction du temps $w(t)$, à l'action

$$(\delta_i w)(t) = w(t - h_i)$$

où $h_i \in \mathbb{R}$, $h_i > 0$ est l'amplitude du retard.

EXTENSION DES SCALAIRES ET A-SYSTÈMES

- Prenons un anneau A (une $k[\frac{d}{dt}, \delta]$-algèbre) contenant $k[\frac{d}{dt}, \delta]$ et Λ un $k[\frac{d}{dt}, \delta]$-module.

- Un A-module est constitué en multipliant formellement les éléments de Λ par des scalaires de A.

- Cas particulier du produit tensoriel. Le A-module obtenu est noté $A \otimes_{k[d/dt, \delta]} \Lambda$; il est obtenu à partir de Λ par extension des scalaires.

EXTENSION DES SCALAIRES ET A-SYSTÈMES (suite)

- Inversion de certains éléments de l'anneau des opérateurs : localisation.
- Soit $\mathcal{S}$ un sous-ensemble multiplicativement clos de $k[\frac{d}{dt}, \delta]$ (c'est-à-dire pour tous $\pi_1, \pi_2 \in \mathcal{S}$, $\pi_1\pi_2 \in \mathcal{S}$ et $1 \in \mathcal{S}$).
- Le localisé, en $\mathcal{S}$, de $k[\frac{d}{dt}, \delta]$ est l'anneau, noté $\mathcal{S}^{-1}k[\frac{d}{dt}, \delta]$, constitué d'éléments de la forme p/σ où $p \in k[\frac{d}{dt}, \delta]$ et $\sigma \in \mathcal{S}$.
- Tous les éléments d'un ensemble multiplicatif sont ainsi inversés.

EXTENSION DES SCALAIRES ET A-SYSTÈMES (suite)

- Par exemple, dans $k[\frac{d}{dt}, \delta]$ l'ensemble $\mathcal{S} = \{\delta^i \mid i \in \mathbb{N}\}$; l'anneau obtenu est $\mathcal{S}^{-1}k[\frac{d}{dt}, \delta] = k[\frac{d}{dt}, \delta, \delta^{-1}]$ et nommé anneau des polynômes de Laurent partiels en δ.

- Autre exemple : $k(\boldsymbol{\delta})[\frac{d}{dt}]$ en prenant $\mathcal{S} = k[\boldsymbol{\delta}]$. L'anneau des opérateurs passe de $k[\frac{d}{dt}, \boldsymbol{\delta}]$ à l'anneau des polynômes en $\frac{d}{dt}$ à coefficients des fractions en $\boldsymbol{\delta}$.
  L'élément
  $$\frac{1}{1+\delta} + \frac{\delta^2}{1-\delta^3}\frac{d^2}{dt^2}$$
  est dans $k(\boldsymbol{\delta})[\frac{d}{dt}]$.

EXTENSION DES SCALAIRES ET A-SYSTÈMES (suite)

- Notons que l'anneau $k(\delta)[\frac{d}{dt}]$ contient strictement $k[\frac{d}{dt}, \delta, \delta^{-1}]$: en effet $1/(1+\delta)$ appartient au premier mais pas au deuxième.

EXTENSION DES SCALAIRES ET A-SYSTÈMES (suite)

- Étant donnée A une $k[\frac{d}{dt}, \delta]$-algèbre (strictement incluse dans le corps des fractions $k(\frac{d}{dt}, \delta)$, on pose
- Soit Λ un système linéaire stationnaire à retards. Le A-module $A \otimes_{k[d/dt, \delta]} \Lambda$ est nommé un A-système (à retards) ou un système sur A.

Notions de commandabilité des systèmes à retards

COMMANDABILITÉ EN DIMENSION FINIE

Système classique, mono-entrée

$\dot{x} = Ax + bu, \quad x = (x_1, \ldots, x_n).$

- Critère de Kalman

$$rg_{\mathbb{R}}[b, Ab, \ldots, A^{n-1}b] = n$$

- Critère de Hautus-Popov-Belevitch

$$\forall s \in \mathbb{C}, \qquad rg_{\mathbb{C}}[sI - A \mid b] = n$$

COMMANDABILITÉ EN DIMENSION FINIE (suite)

- Mise sous forme compagnon

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 \\
\dot{x}_2 &= x_3 \\
&\vdots \\
\dot{x}_{n-1} &= x_n \\
\dot{x}_n &= p_1 x_1 + p_2 x_2 + \ldots + p_n x_n + qu
\end{aligned}
$$

- Sous-espace de non commandabilité de Kalman vide.

CAS DES SYSTÈMES À RETARDS : PREMIER APERÇU

- En dimension finie, toutes les notions précédentes sont équivalentes.
- Ce n'est plus le cas en dimension infinie.
- Une interprétation de ce fait est

$$k[\tfrac{d}{dt}, \delta]\text{-sans torsion} \not\Rightarrow k[\tfrac{d}{dt}, \delta]\text{-libre}$$

COMM. SANS TORSION DES SYSTÈMES À RETARDS

- Soit A une $k[\frac{d}{dt}, \delta]$-algèbre strictement incluse dans le corps des fractions $k(\delta)$.

- Rappelons :
  Un système linéaire stationnaire à retards Λ est dit *A-commandable sans torsion*, si $A \otimes \Lambda$ est sans torsion.

COMM. SANS TORSION DES SYSTÈMES À RETARDS (suite)

- Exemple : $\Lambda = [u, y]$ d'équation

$$\dot{y}(t) - \dot{y}(t-1) = u(t) - u(t-1)$$

non $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}, \delta]$-commandable sans torsion. En effet

$$\frac{d}{dt}(1-\delta)y = (1-\delta)u, \quad \text{ou encore} \quad (1-\delta)(\dot{y}-u) = 0$$

et $\dot{y} - u$ est de torsion.

- Par contre Λ est $\mathbb{R}(\delta)[\frac{d}{dt}]$-commandable sans torsion. En effet, $1-\delta$ étant inversible dans $\mathbb{R}(\delta)[\frac{d}{dt}]$, alors $\dot{y} - u = 0$ dans $\mathbb{R}(\delta)[\frac{d}{dt}] \otimes_{\mathbb{R}[d/dt, \delta]} \Lambda$.

COMM. SANS TORSION DES SYSTÈMES À RETARDS (suite)

- Autre exemple [Mor76] :

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1(t) &= x_1(t) + x_3(t-1) \\
\dot{x}_2(t) &= x_2(t) + x_3(t) \\
\dot{x}_3(t) &= u(t)
\end{aligned}$$

  Il n'est pas commandable sans torsion sur $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}, \delta]$. En effet, $z(t) = x_1(t) - x_2(t-1)$, satisfait, $\dot{z}(t) = z(t)$.

- Il l'est par contre sur $\mathbb{R}(\frac{d}{dt})[\delta]$ (en effet $t[x_1, x_2, x_3, u] = [z]$).

COMM. SANS TORSION DES SYSTÈMES À RETARDS (suite)

- Ceci n'est pas suffisant pour en assurer la stabilisation : $\forall\ u(t)$, $x_1(t) - x_2(t-1)$ croît de manière exponentielle, sauf si $z(1) = 0$.

COMM. PROJECTIVE DES SYSTÈMES À RETARDS

- Soit A une $k[\frac{d}{dt}, \delta]$-algèbre strictement incluse dans le corps des fractions $k(\delta)$.

- Rappelons :
  Un système linéaire stationnaire à retards Λ est dit A-commandable projectif, si $A \otimes \Lambda$ est projectif.

COMM. PROJECTIVE DES SYSTÈMES À RETARDS (suite)

- Rappelons qu'un R-module est projectif si toute matrice de présentation admet un inverse à droite.

- Caractérisation directement liée aux équations de Bézout matricielles. Prenons une dynamique Λ d'équations

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A(\boldsymbol{\delta})\boldsymbol{x} + B(\boldsymbol{\delta})\boldsymbol{u}$$

avec A et B à coefficients dans $k[\boldsymbol{\delta}]$, $\boldsymbol{x}$ de dimension n.

COMM. PROJECTIVE DES SYSTÈMES À RETARDS (suite)

- La projectivité de Λ revient à l'existence de matrices $\bar{A}$ et $\overline{B}$ à coefficients dans $k[\frac{d}{dt}, \delta]$ telles que

$$\left[\frac{d}{dt} I_n - A(\delta)\right] \bar{A}(\tfrac{d}{dt}, \delta) + B(\delta)\overline{B}(\tfrac{d}{dt}, \delta) = I_n.$$

- Ce type d'équation peut servir à des fins de stabilisation des systèmes sans retards par retour d'état dynamique (Vidyasagar).

COMMANDABILITÉ LIBRE DES SYSTÈMES À RETARDS

- Soit A une $k[\frac{d}{dt}, \delta]$-algèbre strictement incluse dans le corps des fractions $k(\delta)$.

- Rappelons :
  Un système linéaire stationnaire à retards Λ est dit A-commandable libre, si $A \otimes \Lambda$ est libre.

COMMANDABILITÉ LIBRE DES SYSTÈMES À RETARDS (suite)

- La dynamique d'équation :

$$\dot{y}(t) - y(t-1) = u(t)$$

est $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}, \delta]$-commandable libre, de base y.

- Les deux exemples suivants sont $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}, \delta]$-commandables sans torsion, mais pas $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}, \delta]$-commandables libres

$$\dot{y}(t) = u(t-1)$$

et

$$\dot{y}(t) = u(t) - u(t-1)$$

COMMANDABILITÉ LIBRE DES SYSTÈMES À RETARDS (suite)

- La preuve de ceci sera fournie avec les critères de commandabilités examinés ensuite.

COMMANDABILITÉ LIBRE DES SYSTÈMES À RETARDS (suite)

- Ils sont $\mathbb{R}(\delta)[\frac{d}{dt}]$-commandable libre, le premier est $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}, \delta, \delta^{-1}]$-commandable libre.

- En effet
$$u = \delta^{-1} y, \qquad u(t) = \dot{y}(t+1)$$
et
$$u = (1-\delta)^{-1} \dot{y}, \qquad u(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \dot{y}(t-i)$$

CRITÈRE DE COMMANDABILITÉ LIBRE

- Rappel de la résolution de la conjecture de Serre [Ser55]. Sur un anneau de polynômes, tout module projectif est libre (th. de Quillen-Suslin, [Qui76, Sus76]).

- Traduction :

  Un système linéaire stationnaire à retards est $k[\frac{d}{dt}, \delta]$-commandable libre si, et seulement s'il est $k[\frac{d}{dt}, \delta]$-commandable projectif.

- Cette conjecture permet d'obtenir le critère de commandabilité libre.

CRITÈRE DE COMMANDABILITÉ LIBRE (suite)

- Soit Λ donné par :
  - des générateurs $\Lambda = [\boldsymbol{w}] = [w_1, \ldots, w_\alpha]$,
  - des relations $P_\Lambda(\frac{d}{dt}, \boldsymbol{\delta})\, \boldsymbol{w} = 0$

  où $P_\Lambda \in k[\frac{d}{dt}, \boldsymbol{\delta}]^{\beta \times \alpha}$ et $\mathrm{rg}_{k[\frac{d}{dt}, \boldsymbol{\delta}]} P_\Lambda = \beta$.

- $\bar{k}$ désigne la clôture algébrique (Le corps contenant toutes les racines d'équations polynômiales à coefficients dans k) de k.

- [FM98] Le système linéaire stationnaire à retards Λ est $k[\frac{d}{dt}, \boldsymbol{\delta}]$-commandable libre si, et seulement si

$$\forall (s, z_1, \ldots, z_r) \in \bar{k}^{r+1}, \quad \mathrm{rg}_{\bar{k}} P_\Lambda(s, z_1, \ldots, z_r) = \beta.$$

CRITÈRE DE COMMANDABILITÉ LIBRE (suite)

- Ce critère de rang équivaut à l'absence de zéros communs dans $\bar{k}^{r+1}$ des mineurs d'ordre β de P_Λ.

CRITÈRE DE COMMANDABILITÉ SANS TORSION

- Soit Λ donné par :
  - des générateurs $\Lambda = [\boldsymbol{w}] = [w_1, \dots, w_\alpha]$,
  - des relations $P_\Lambda(\frac{d}{dt}, \boldsymbol{\delta})\, \boldsymbol{w} = 0$

  où $P_\Lambda \in k[\frac{d}{dt}, \boldsymbol{\delta}]^{\beta \times \alpha}$ et $\mathrm{rg}_{k[\frac{d}{dt}, \boldsymbol{\delta}]} P_\Lambda = \beta$.

- [FM98] Le système linéaire stationnaire Λ est $k[\frac{d}{dt}, \boldsymbol{\delta}]$-commandable sans torsion si, et seulement si, les mineurs $\beta \times \beta$ de P_Λ sont premiers entre eux.

- Premiers entre eux signifie que leur pgcd est une constante, ou encore l'abscence de facteurs communs.

π-liberté et polynôme de libération ; interprétations de notions de la littérature

π-LIBERTÉ

- L'exemple $\dot{y} = \delta u$ est $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}, \delta]$-commandable sans torsion mais pas $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}, \delta]$-commandable libre.
- Par contre, il est $\mathbb{R}(\delta)[\frac{d}{dt}]$-commandable libre, de base y.
- On cherche donc à rendre libre un module qui n'est que sans torsion, par inversion d'opérateurs.
- Dans l'exemple il suffit en fait d'inverser δ : la dynamique $\dot{y} = \delta u$ est $\mathbb{R}[\frac{d}{dt}, \delta, \delta^{-1}]$-libre, de base y puisque $u = \delta^{-1}\dot{y}$. D'où

π-LIBERTÉ (suite)

- [FM98] Soit Λ un système à retards commandable sans torsion sur $k[\frac{d}{dt}, \boldsymbol{\delta}]$. Alors il existe un élément π de $k[\boldsymbol{\delta}]$ tel que Λ soit commandable libre sur $k[\frac{d}{dt}, \boldsymbol{\delta}, \pi^{-1}]$. Le système Λ est dit *π-libre*. Le polynôme π est dit polynôme de libération associé à Λ.

- Autre exemple :

$$\dot{y}(t) = u(t) - u(t-1), \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dt} y = (1 - \delta) u$$

est $(1 - \delta)$-libre, de base y

$$u = (1 - \delta)^{-1} \frac{d}{dt} y$$

INTERPRÉTATION DE NOTIONS DE LA LITTÉRATURE

Beaucoup de notions de la littérature peuvent être interprétées. Notamment :

- L'accessibilité (commandabilité forte),
- La commandabilité faible,
- La commandabilité spectrale.

INTERPRÉTATION DE L'ACCESSIBILITÉ

- On considère $\Lambda = [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}]$ sur $k[\frac{d}{dt}, \boldsymbol{\delta}]$ de relations

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A(\boldsymbol{\delta})\boldsymbol{x} + B(\boldsymbol{\delta})\boldsymbol{u}$$

  $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_m)$, $A \in k[\boldsymbol{\delta}]^{n \times n}$, $B \in k[\boldsymbol{\delta}]^{n \times m}$.

- L'accessibilité [Mor76], [Son76] peut s'exprimer par

$$\forall (s, z_1, \ldots, z_r) \in \bar{k}^{r+1}, \quad \mathrm{rg}_{\bar{k}}[sI_n - A(z_1, \ldots, z_r) \mid B(z_1, \ldots, z_r)] = n$$

- La dynamique Λ est accessible si, et seulement si, Λ est $k[\frac{d}{dt}, \boldsymbol{\delta}]$-commandable libre.

INTERPRÉTATION DE LA COMMANDABILITÉ FAIBLE

- On considère $\Lambda = [\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}]$ sur $k[\frac{d}{dt}, \boldsymbol{\delta}]$ de relations

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A(\boldsymbol{\delta})\boldsymbol{x} + B(\boldsymbol{\delta})\boldsymbol{u}$$

$\boldsymbol{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\boldsymbol{u} = (u_1, \dots, u_m)$, $A \in k[\boldsymbol{\delta}]^{n \times n}$, $B \in k[\boldsymbol{\delta}]^{n \times m}$.

- La commandablilité faible [Mor76] peut s'exprimer par

$$\mathrm{rg}_{k[\boldsymbol{\delta}]}[B(\boldsymbol{\delta}), A(\boldsymbol{\delta})B(\boldsymbol{\delta}), \dots, A(\boldsymbol{\delta})^{n-1}B(\boldsymbol{\delta})] = n$$

- La dynamique Λ est faiblement commandable si, et seulement si, Λ est commandable libre sur $k(\boldsymbol{\delta})[\frac{d}{dt}]$.

INTERPRÉTATION DE LA COMM. SPECTRALE

- Défini dans un cadre d'analyse fonctionnelle [Osi65].
- Système représenté par le $k[s, e^{-\boldsymbol{h}s}]$-module finiment engendré Λ.
- donné par générateurs et relations

$$\Lambda = [w_1, \ldots, w_\alpha] \triangleq [\boldsymbol{w}]$$
$$P_\Lambda(s, e^{-\boldsymbol{h}s})\, \boldsymbol{w} = 0$$

avec $P_\Lambda \in k[s, e^{-\boldsymbol{h}s}]^{\beta \times \alpha}$, $\mathrm{rg}_{k[s, e^{-\boldsymbol{h}s}]} P_\Lambda = \beta$, $\beta \leqslant \alpha$ et $\mathfrak{I}_\Lambda$ l'idéal engendré par les mineurs d'ordre β de P_Λ,
$\mathfrak{I}_\Lambda = \left(m_1(s, e^{-\boldsymbol{h}s}), \ldots, m_\gamma(s, e^{-\boldsymbol{h}s})\right)$ $(\gamma = C_\alpha^\beta)$.

INTERPRÉTATION DE LA COMM. SPECTRALE (suite)

- Soit Λ un système linéaire à retards stationnaire défini sur $k[s, e^{-\boldsymbol{hs}}]$, de matrice de présentation P_Λ dont le rang générique est β. Il est dit spectralement commandable si $\forall s \in \mathbb{C},\ \mathrm{rg}_{\mathbb{C}} P_\Lambda(s, e^{-\boldsymbol{hs}}) = \beta$.

- Posons $\mathfrak{S}_r = k(s)[e^{-\boldsymbol{hs}}, e^{\boldsymbol{hs}}] \cap \mathfrak{E}$.

  $\mathfrak{E}$: anneau des fonctions entières (analytiques dans tout le plan complexe, le même développement étant valable partout).

INTERPRÉTATION DE LA COMM. SPECTRALE (suite)

- Cet anneau contient des retards distribués, comme

$$\frac{1 - e^{-h(s-a)}}{s - a}$$

correspondant à

$$w(t) \longmapsto \int_{t-h}^{t} e^{a(t-\tau)} w(\tau) d\tau$$

- [BL96] Soit Λ un système à retards sur $k[s, e^{-\boldsymbol{h}s}]$, commandable sans torsion sur $k[s, e^{-\boldsymbol{h}s}, e^{\boldsymbol{h}s}]$. Alors Λ est spectralement commandable si, et seulement si, elle est $\mathfrak{S}_r$-commandable libre.

INTERPRÉTATION DE LA COMM. SPECTRALE (suite)

- Notons que, dans le cas d'un seul retard

$$\mathfrak{S}_1\text{-commandable libre} \iff \mathfrak{S}_1\text{-commandable sans torsion}$$

L'anneau $\mathfrak{S}_1$ étant de Bézout (tout idéal finiment engendré est principal).

INTERPRÉTATION DE LA COMM. SPECTRALE (suite)

- Caractérisation trajectorienne ([RW87], [GL97]) dans le cas d'un seul retard

  Commandabilité spectrale $\Longleftrightarrow$ raccord des trajectoires passées et futures.

- Soit Λ un $k[\frac{d}{dt}, \delta]$-système. On a

$$\Lambda \;\; \delta_1^{\alpha_1} \ldots \delta_r^{\alpha_r}\text{-libre} \Longrightarrow \Lambda \;\; \text{spectr. comm.} \Longrightarrow \Lambda \;\; k[\tfrac{d}{dt}, \delta]\text{-sans torsion}$$

Bibliographie

D. Brethé and J.J. Loiseau.
A result that could bear fruit for the control of delay-differential systems.
In Proc. *IEEE MSCA'96*, Chania, Crete, 1996.

M. Fliess.
Some basic structural properties of generalized linear systems.
Systems Control Lett., 15 :391–396, 1990.

M. Fliess and H. Mounier.
Controllability and observability of linear delay systems : an algebraic approach.
Control Optimization and Calculus of Variations, 3 :301–314, 1998.

Bibliographie (suite)

H. Glüsing-Lüerßen.
A behavioral approach to delay differential systems.
SIAM J. Contr. Opt., 35 :480–499, 1997.

A.S. Morse.
Ring models for delay-differential systems.
Automatica, 12 :529–531, 1976.

Y. Osipov.
Stabilization of controlled systems with delays.
Differencial'nye Uravnenija, 1 :605–618, 1965.

Bibliographie (suite)

D. Quillen.
Projective modules over polynomial rings.
Inv. Math., 36 :167–171, 1976.

P. Rocha and J.C. Willems.
Behavioral controllability of d-d systems.
SIAM J. Contr. Opt., 35 :254–264, 1987.

J.P. Serre.
Faisceaux algébriques cohérents.
Annals. of Maths., 61 :197–278, 1955.

Bibliographie (suite)

E.D. Sontag.
Linear systems over commutative rings : a survey.
Richerche di Automatica, 7 :1–34, 1976.

A.A. Suslin.
Projective modules over a polynomial ring are free (in russian).
Dokl. Akad. Nauk. S.S.S.R., 229 :1063–1066, 1976.
English translation : *Soviet Math. Dokl.*, **17**, p. 1160–1164.