Ecole d'Automne d'Automatique de Douz, EAA'06

Systèmes à retards:

Identifiabilité et Identification

Lotfi Belkoura

LAGIS (CNRS UMR 8146),

Projet ALIEN INRIA-Futurs,

Université des Sciences et Technologies de Lille, France,

`lotfi.belkoura@univ-lille1.fr`

Motivations

Quelques modèles de SàR

- Bien qu'étudiés de longue date (Euler, 1740), l'exigence de modèles performants a suscité un regain d'intérêt pour les Systèmes à Retards.
- Dans un cadre général, les systèmes retardés peuvent être décrits par une équation différentielle fonctionnelle de la forme:

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x_t, u_t), \qquad x_t = x(t+\theta), \quad -h \leq \theta \leq 0, \\ x_0 &= \varphi \qquad\qquad\quad \text{fonction à support } \subset [-h, 0]\,. \end{aligned}$$

  La dimension de la condition initiale les classe dans la catégorie des systèmes de dimension infinie.

- Dans un contexte linéaire et stationnaire, et dans un but d'analyse ou de synthèse, plusieurs représentations (modèles) peuvent être envisagées.

Cadre algébrique

Modèles sur anneaux d'opérateurs

[Morse,76 - Sontag,76 - Fliess,98,...]

- Modèles basés sur l'*opérateur de retard* $\nabla z(t) = z(t-h)$ et sur des matrices polynomiales $A(\nabla), B(\nabla)$,

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A(\nabla)x(t) + B(\nabla)u(t), \\ x(0) &= x_0 \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

- Description basée sur la notion de générateurs $\Lambda = [x, u] = [\omega]$ (trajectoires) soumis à des relations

$$P_\Lambda(\tfrac{d}{dt}, \nabla)\omega = 0, \qquad P_\Lambda(\tfrac{d}{dt}, \nabla) = \left[\frac{d}{dt} I_n - A(\nabla) \,|\, B(\nabla) \right].$$

▲ Puissance du calcul algébrique pour l'analyse et la synthèse de lois de commande,

▼ "réelle" condition initiale, commensurabilité, retards distribués dans un anneau particulier (bien que large), pas de retards variables.

Cadre fonctionnel I

Modèles de dimension infinie

[Delfour & Mitter,72- Manitius & Triggiani,78,...]

Modèles dont l'état $\bar{x}(t) = (x(t), x_t)$ est défini dans un espace de Hilbert $M_2 \equiv \mathbb{R}^n \times L_2([-h, 0], \mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}}(t) &= A\,\bar{x}(t) + B\,\bar{u}(t), \\ \bar{x}(0) &= (x(0), \varphi) \in M_2. \end{aligned}$$

$$\text{Exemple d'opérateur:} \quad A\bar{x}(t) = (A_0 x(t) + A_1 x_t(-h), \frac{dx_t(\theta)}{d\theta})$$

- ▲ Représentation unifiée et générale, retards ponctuels ou distribués quelconques, C.I. bien représentée, extension possible aux retards variables,
- ▼ Manipulations un peu lourdes, lois de commande distribuées ($\Rightarrow$ pb d'implémentation).

Cadre fonctionnel II

Modèles basés sur la convolution

[Batos,84 - Yamamoto,89,...]

Pas de notion d'état (mais de solution), et description basée sur des opérateurs P et Q vus comme des distributions à support compact (espace noté $\mathcal{E}'$)

$$P * x = Q * u + \pi(P * \varphi),$$

$$\begin{array}{rl} \text{Exemple d'opérateur:} & P = \delta' - A_0\delta - A_1\delta_h \\ \text{Opérateur de troncature:} & \pi(P * \varphi) = \varphi(0)\delta - A_1\varphi(-h+\theta) \end{array}$$

- ▲ Notion de support adaptée aux SàR, unique équation englobant la contribution de la C.I., nombreuses propriétés (ordre, support, pb d'inversion) dans le cadre des distributions,
- ▼ Pas de retards variables, cadre non (encore assez) exploité dans une perspective de synthèse (commande).

Les distributions

Définition et manipulations de base

Définition (Distributions)

On appelle distribution sur Ω (d'espace noté $\mathcal{D}'(\Omega)$) toute forme linéaire et continue sur l'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ des fonctions C^∞ à support compact dans Ω.

Si $T \in \mathcal{D}'(\Omega))$, on note $\langle T, \varphi \rangle$ sa valeur sur la fonction $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega))$. On distingue souvent deux classes de distributions,

- Les distributions régulières définies par une fonction f, (notée ici $[f]$) et pour lesquelles:

$$\mathcal{D}'(\Omega)) \ni [f] = \int_\Omega f(x)\varphi(x)dx = \langle f, \varphi \rangle \,, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

- Les distributions singulières telles que la distribution de Dirac en un point a,

$$\delta_a = \varphi(a) = \int_\Omega \varphi(x)\delta(x-a)dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

Les distributions

Définition et manipulations de base

Définition (Dérivation des distributions)

Par définition, la dérivée DT de T s'écrit: $\langle DT, \varphi \rangle = -\langle T, \varphi' \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega))$

Ainsi toute distribution est indéfiniment dérivable.

- Pour une fonction continûment dérivable, et par intégration par parties, on établit aisément qu'à Df correspond la dérivée usuelle f'.

$$\langle Df, \varphi \rangle = -\int_\Omega f(x)\varphi'(x)dx = \int_\Omega f'(x)\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$$

- Pour une fonction continue sauf en un point a de discontinuité $\sigma_a = f(a+) - f(a-)$, la même intégration par parties conduit à (formule des sauts):

$$Df = f' + \sigma_a \, \delta_a.$$

- Pour la dérivée de Dirac en a, $D\delta_a = -\langle \delta_a, \varphi' \rangle = \varphi'(a)$.

Les distributions

Définition et manipulations de base

Définition (Convolution des distributions)

- *Pour* $T \in \mathcal{D}'(\Omega))$ *et* $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ *on définit le produit de convolution par* $(T * \varphi)(x) = \langle T(y), \varphi(x-y) \rangle, \quad x \in \mathbb{R}$
- *Pour* $T \in \mathcal{D}'(\Omega))$ *et* $V \in \mathcal{D}'(\Omega)$ $T * V$ *est par définition l'unique élément vérifiant:* $(T * V) * \varphi = T * (V * \varphi)$

Intérêt pratique: De nombreuses opérations usuelles sont des convolutions:

- Dérivation: $T' = \delta' * T$,
- Translation: $T(t-\tau) = \delta_\tau * T$,
- Intégration $\int T = H * T$ lorsque T est une fonction à support dans $(0, \infty)$ et $H \equiv$ échelon.

Les distributions

Définition et manipulations de base

Définition (Support des distributions)

$\operatorname{supp} T \equiv$ *le complémentaire du plus grand ouvert* ω *de* Ω *tel que la restriction de* T *à* ω *soit nulle*

Ainsi $\operatorname{supp} \delta_a = \{a\}$ tandis que pour une fonction continue, $\operatorname{supp} f$ coïncide avec la notion usuelle de support.

- Application: une ODE telle $\dot{x} = a\,x + b\,u$, avec CI nulles se récrit

$$\underbrace{(\delta' - a\,\delta)}_{P} * x = \underbrace{(b\,\delta)}_{Q} * u \quad \text{avec} \quad \operatorname{supp} P = \operatorname{supp} Q = \{0\}$$

- Une DDE telle $\dot{x} = a\,x(t-\tau) + b\,u$ se formule

$$\underbrace{(\delta' - a\,\delta_\tau)}_{P} * x = \underbrace{(b\,\delta)}_{Q} * u \quad \text{avec} \quad \operatorname{supp} P = \{0, \tau\} \text{ et } \operatorname{supp} Q = \{0\}$$

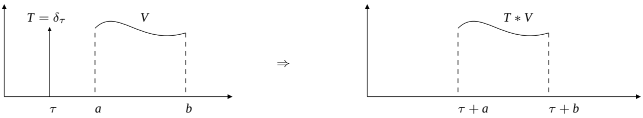
.

Les distributions
Définition et manipulations de base

Propriété (Première propriété sur les supports)

$$\text{supp}\, T * V \subseteq \text{supp}\, T + \text{supp}\, V = \{x + y \ t.q. \ x \in \text{supp}\ T, y \in \text{supp}\ V\}$$

Exemple



Cette inclusion est en général au sens strict. Considérer par ex. $T = \delta'_\tau$ et V =cte sur (a, b) pour lesquelles

$$\text{supp}\, T * V = \{\tau + a, \tau + b\} \neq [\tau + a, \tau + b]$$

.

Les distributions
Définition et manipulations de base

Le cas de la CI: Une prise en compte exacte de la CI pour les SAR peut se faire avec un opérateur de troncature [Yamamoto,89]:

$$\pi : f \longmapsto f_{|[0,\infty)}$$

notion différente en générale de celle de restriction. Par exemple:

$$\begin{array}{rrcl} & \dot{x} & = & a\,x(t-\tau) + b\,u, \quad x_0 = \varphi \quad \operatorname{supp}\varphi \subset (-\tau, 0) \\ \text{se récrit} & P * x & = & Q * u + \pi(P * \varphi), \quad \text{avec} \quad P = \delta' - a\,\delta_\tau, \quad Q = b\,\delta \\ \text{et} & P * \varphi & = & \delta_{-\tau}\varphi(-\tau) + [\varphi'] - \delta\,\varphi(0) - a\,\delta_\tau * \varphi, \\ \Rightarrow & \pi(P * \varphi) & = & -(\delta\,\varphi(0) + a\,\delta_\tau * \varphi) \in M_2 \equiv \mathbb{R} \times L_2([0,\tau], \mathbb{R}) \end{array}$$

On retrouve la paire point$\times$fonction de l'espace M_2 utilisée dans l'approche fonctionnelle pour définir l'état d'un système.

Identifiabilité

Introduction

- **La modélisation** consiste à proposer une loi d'évolution du système $\Rightarrow$ structure accompagnée de paramètres, en nombre fini ou non.
- **L'identifiabilité** consiste à s'assurer qu'il est possible d'estimer ces paramètres à partir des données entrées sorties,
  - en théorie (injectivité du modèle),
  - en pratique (pour des entrées spécifiques).
- Travaux antérieurs: Peu de travaux ont porté sur l'identifiabilité des SàR, dont [Nakagiri et al., 95], et [Lunel, 97 & 00] dans un cadre fonctionnel et des régimes autonomes (systèmes sans entrée) $\Rightarrow$ conditions basées sur le spectre de dimension infinie.

Identifiabilité

Formulation du problème

Cadre de l'analyse: On se situe dans le formalisme des distributions avec des descriptions entrées/sorties ou comportementales sous la forme:

$$P * x = Q * u, \Leftrightarrow R * \omega = 0, \qquad R = [P, -Q], \quad \omega = (x, u)^t$$

[approche comportementale].

Exemple: (avec la notation $\pi = H(t) - H(t-1)$)

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t) + \int_{-1}^{0} x_2(t+\theta)d\theta, \quad \rightarrow \quad (\delta' - \delta) * x_1 - \pi * x_2 = 0,$$

$$\dot{x}_2(t) = x_1(t-1) + x_2(t) + \int_{-1}^{0} u(t+\theta)d\theta. \quad \rightarrow \quad (\delta' - \delta) * x_2 - \delta_1 * x_1 - \pi * u = 0.$$

$$\underbrace{\left[\begin{array}{cc|c} \delta' - \delta & -\pi & 0 \\ -\delta_1 & \delta' - \delta & -\pi \end{array}\right]}_{R} * \underbrace{\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ u \end{bmatrix}}_{\omega} = 0.$$

Identifiabilité

Formulation du problème

Définition: Etant donné un modèle régi par $\hat{P} * \hat{x} = \hat{Q} * u$, le système décrit par $P * x = Q * u$ sera dit identifiable sur $\mathcal{I} = [0, T]$ s'il existe une entrée u telle que $P = \hat{P}$ et $Q = \hat{Q}$ résulte de $x = \hat{x}$ sur $\mathcal{I}$.

- Pas de forme explicite imposée aux opérateurs, mais des contraintes liées uniquement à l'ordre et au support des opérateurs + normalisation.

$$\operatorname{ord} P = N, \qquad \operatorname{conv} R = [0, h], \qquad P(0) = I_n.$$

- La contrainte sur h (retard max. fixé) peut être relaxée pour des retards ponctuels.
- L'analyse d'identifiabilité de la C.I. peut être menée avec les mêmes outils [Belkoura 03].

Outils sur les distributions

Ordre d'une distribution

[Yamamoto,89, Zemanian 65.]

Une notion générale d'ordre (≥ 0 et < 0) est introduite, au même titre que s et s^{-1} définissent les TL de distributions d'ordre 1 et -1.

Définition: Une distribution est d'ordre $r > 0$ si elle agit continûment sur les fonctions de classe C^r et non C^{r-1}. Une fonction ψ est d'odre $-r$ si r est le plus petit entier tel que $D^r\psi$ soit une mesure.

Exemples: $\quad \mathrm{ord}(\delta^{(2)}) = 2, \qquad \mathrm{ord}(H(t).t) = -2.$

Théorème (Y.Yamamoto, 89)

$$\mathrm{ord}(P^{-1}) = -\,\mathrm{ord}(P) \Rightarrow \mathrm{ord}(P * Q) = \mathrm{ord}\ P + \mathrm{ord}\ Q, \quad \forall Q.$$

Exemple: $\quad P = \delta' I + \sum_{i=0}^{N} A_i\, \delta_{h_i} + \sum_{i=1}^{N} A_{-i}\, \delta'_{h_i} + A_c(\theta)$

Outils sur les distributions

Les distributions inversibles

[L.Ehrenpreis 60, L. Hőrmander 90]

Le problème de la division: Dans quelle mesure une fonction entière représente la TL d'une distribution à support compact [$\mathcal{O} \equiv$ fonctions entières, $\mathcal{O} \supset E' \equiv$ TL de $\mathcal{E}'$].

Définition: $u \in \mathcal{E}'$ est inversible (au sens d'Ehrenpreis) pour $\mathcal{D}'$ si l'application $\mathcal{D}' \ni v \to u * v \in \mathcal{D}'$ est surjective.

Théorème (Ehrenpreis, 60)

$u \in \mathcal{E}'$ *est inversible* $\Leftrightarrow$ *pour tout* $g \in \mathcal{O}$, *si* $TL(u).g \in E'$, *alors* $g \in E'$.

Exemples: $u \in C_0^\infty$:non inversible,($\nexists v$ t.q. $u * v = \delta$),

u avec support discret: inversible.

Outils sur les distributions

Le Théorème des supports

[Titchmarsh-Lions]

Le Théorème des supports: Dans la composition de deux opérateurs à retards, il permet de déterminer dans quelle mesure les "mémoires s'additionnent"[1]. Il s'énonce dans la cas scalaire:

$$\operatorname{conv} u * v = \operatorname{conv} u + \operatorname{conv} v, \qquad u, v \in \mathcal{E}'.$$

Une formulation analogue peut être obtenue dans le cas matriciel, pour $A \in (\mathcal{E}')^{n\times n}$ et $B \in (\mathcal{E}')^{n\times \bullet}$:

Théorème (Belkoura, 05)

$$\operatorname{conv} \det A = n \operatorname{conv} A \Leftrightarrow \operatorname{conv} A * B = \operatorname{conv} A + \operatorname{conv} B \quad \forall B$$

[1] $\operatorname{conv} X \equiv$ enveloppe convexe du support de X.

Identifiabilité
Méthode d'analyse

Démarche

Unicité de la trajectoire sur un intervalle de temps fini

↓

Unicité du transfert $T = P^{-1} * Q$

↓

Unicité des opérateurs P et Q.

Outils

- Propriété des supports,
- Entrée suffisamment riche.

- Ordre d'une distribution,
- Distributions inversibles,
- Théorème des supports.

Identifiabilité

Intervalle d'analyse

La réduction de l'analyse à un intervalle de temps fini provient simplement de la propriété des supports:

$$\text{supp } A * B \subseteq \text{supp } A + \text{supp } B = \{x + y; x \in \text{supp } A, y \in \text{supp } B\}$$
$$\text{supp } \det A \subseteq n \text{ supp } A$$

Proposition

Pour une entrée u *vérifiant* $\text{supp}\, u \subset [r_1, r_2]$ *et la relation ci-dessous, l'égalité* $\hat{x} = x$ *sur* $\mathcal{I} = [0, T]$ *entraîne* $\hat{x} = x$ *sur* $\mathbb{R}$.

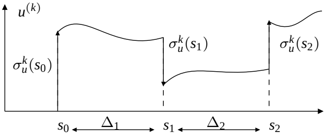
$$(n+1)h \leq r_1 \leq r_2 \leq T - (n+1)h.$$

C'est sur cet intervalle $[r_1, r_2]$ que seront caractérisées les entrées dites suffisamment riches, c'est à dire assurant *par définition* l'égalité des transferts à partir de celle des trajectoires, soit: $\hat{x} = x \Rightarrow \hat{P}^{-1} * \hat{Q} = P * Q$.

Identifiabilité

Entrée suffisamment riche

Une des propriétés majeures des distributions consiste en la prise en compte des discontinuités dans les opérations de dérivation.



$$\Xi(s) = \sum_{i=0}^{K} [\sigma_u^{K-i}(s_0), \ldots, \sigma_u^{K-i}(s_L)]\, s^i$$

discontinuités de $(u, \dot{u}, \cdots, u^{(K)})$

Théorème (Belkoura, 03)

Toute entrée $u \in (\mathcal{E}')^{p\times 1}$, polynomiale par morceaux et satisfaisant les deux points ci-dessous est suffisamment riche.

1. $\mathrm{rang}\, \Xi(s) = p$,
2. $\min \Delta_i > (n+1)h$.

Identifiabilité
Principal résultat

L'égalité de deux transferts T et $\hat{T}$ est équivalente aux relations ci-dessous, de sorte que l'identifiabilité se réduit à la contrainte $\alpha = \delta I_n$.

$$\hat{P}^{-1}\hat{Q} = P^{-1}Q \rightarrow [\hat{P}, -\hat{Q}] = \hat{P} * P^{-1} * [P, -Q] \rightarrow \hat{R} = \alpha * R, \qquad \alpha = \hat{P} * P^{-1}.$$

Théorème (Belkoura, 05)

Si $R = [P, -Q]$ vérifie les deux conditions ci-dessous, alors $\operatorname{supp}\alpha = \{0\}$.

1. $\operatorname{rang} R(s) = n, \quad s \in \mathbb{C}, \qquad$ *2.* $\operatorname{conv}\det P = n \operatorname{conv} R$.

Si de plus P est de type normal[2], alors le système considéré est identifiable.

- Conditions étroitement liées à celles de la contrôllabilité approchée,
- *1.* et *2.* montrent que toute autre description du système nécessite une mémoire de taille supérieure ou égale à h.

[2] vérifiant $\operatorname{ord} P^{-1} = -\operatorname{ord} P$

Identifiabilité

Exemple

Exemple avec retards discret et distribués

$$\begin{aligned} \dot{x}_1(t) &= x_1(t) + \int_{-1}^{0} x_2(t+\theta)d\theta, \\ \dot{x}_2(t) &= x_1(t-1) + x_2(t) + \int_{-1}^{0} u(t+\theta)d\theta. \end{aligned} \qquad R = \left[\begin{array}{cc|c} \delta' - \delta & -\pi & 0 \\ -\delta_1 & \delta' - \delta & -\pi \end{array}\right],$$

1. Ce système admet la représentation $R * \omega = 0$ avec $\omega = (x_1, x_2, u)^T$. Avec $\pi(t) = H(t) - H(t-1)$, il apparaît clairement que $\mathrm{conv}\, R = [0,1]$. Par ailleurs

$$\det P = \delta" - 2\delta' + \delta - \delta_1 * \pi, \longrightarrow \mathrm{conv}\det P = [0,2] = [0,1] + [0,1]$$

2. La controllabilité spectrale est aisément vérifiée en considérant, dans $R(s)$, les colonnes 2 et 3 pour $s \neq 0$ et les colonnes 1 et 2 pour $s = 0$. Ainsi, $\mathrm{rang}\, R(s) = 2$, et le système est identifiable.

$$R(s) = \begin{bmatrix} s-1 & -(e^{-s}-1)/s & 0 \\ -e^{-s} & s-1 & -(e^{-s}-1)/s \end{bmatrix}.$$

Identifiabilité
La cas discret

[Orlov & al,03,...]

Le cas des retards discrets

En se basant toujours sur des propriétés de non régularité des entrées et des réponses, un résultat plus simple et indépendant de d et de N peut être obtenu pour les systèmes régis par:

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^{N} A_i\, x(t - i.d) + B_i\, u(t - i.d),$$

et pour lesquels: $P = \delta' I - F = \delta' I + \sum_{i=0}^{N} A_i\, \delta_{i.d}, \quad Q = \sum_{i=0}^{N} B_i\, \delta_{i.d}.$

▷ Matrice de Kalman: $C = [Q, FQ, \ldots, F^{n-1}Q]$

Théorème (Orlov & al, 03)

Identifiabilité $\Leftrightarrow$ $\exists s \in \mathbb{C}$ *tel que* $\operatorname{rang} C(s) = n$

$\Leftrightarrow$ controllabilité faible. [J.F. Lafay & *al.* 96]

Identifiabilité
La cas discret

[Orlov & al,03,...]

Le cas des retards discrets

Dans ce cas (retards commensurables), et de manière équivalente, nous pouvons également former, en posant $\nabla = e^{-d.s}$,

$$F(\nabla) = \sum_{i=0}^{N} A_i \nabla^i, \quad Q(\nabla) = \sum_{i=0}^{N} B_i \nabla^i,$$

et le système sera identifiable Ssi $\mathrm{rang}\, C(\nabla) = \mathrm{rang}[Q(\nabla), ..., F^{n-1}(\nabla)Q(\nabla)] = n$.

Exemple:

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + x_2 + u(t-d) \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2 - x_2(t-d) + u \end{aligned} \qquad F(\nabla) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1-\nabla \end{bmatrix}, \quad Q(\nabla) = \begin{bmatrix} \nabla \\ 1 \end{bmatrix}$$

$C(\nabla) = [Q(\nabla), F(\nabla)Q(\nabla)] = \begin{bmatrix} \nabla & \nabla+1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ est de rang 2 et le système est identifiable.

Identification

Introduction

- Travaux antérieurs: Dans le domaine "temps continu", l'identification des SàR est un sujet encore peu développé. Les quelques approches statistiques [Ren et al., 05], ou adaptatives [Orlov et al., 03] excluent toute perspective d'exploitation en ligne.
- Technique adaptative: On n'identifie pas directement les retards mais les coefficients associés.
- Technique algébrique: On identifie directement les retards par une méthode non asymptotique.

Identification
Technique adaptative

Technique adaptative: Consiste en une extension aux SAR des techniques usuelles. Les retards sont supposés connus et on cherche à identifier les matrices de coefficients associées A_i, B_i.

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^{r} \left[A_i x(t-\tau_i) + B_i u(t-\tau_i) \right],$$

On utilise pour cela le système adaptatif ci dessous avec $\Delta x = x - \hat{x}$, G de Hurwitz, des gains d'adaptation F_i, Φ_i, et P solution de $G^T P + PG = -Q$ pour $Q > 0$.

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{x}}(t) &= \sum\nolimits_{i=0}^{r} [\hat{A}_i(t) x(t-\tau_i) + \hat{B}_i(t) u(t-\tau_i)] - G\Delta x(t), \\
\dot{\hat{A}}_i(t) &= F_i P \Delta x(t) x^T(t-\tau_i), \; \hat{A}_i(0) = \hat{A}_i^0, \\
\dot{\hat{B}}_i(t) &= \Phi_i P \Delta x(t) u^T(t-\tau_i), \; \hat{B}_i(0) = \hat{B}_i^0
\end{aligned}$$

Identification
Technique adaptative

Sous des hypothèses d'identifiabilité des paramètres et d'entrée suffisamment riche, il est établit que

$$\Delta x \to 0, \quad \text{tandis que} \quad \hat{A}_i, \hat{B}_i \to A_i, B_i.$$

La preuve de ce résultat est basé sur les équations d'erreurs

$$\begin{aligned}
\dot{e}(t) &= \Sigma_{i=0}^{r} A_i e(t-\tau_i), \\
\Delta\dot{x}(t) &= \Sigma_{i=0}^{r} \{\Delta A_i [e(t-\tau_i) + z(t-\tau_i)] + \Delta B_i u(t-\tau_i)\} + G\Delta x(t), \\
\Delta\dot{A}_i(t) &= -F_i P \Delta x(t) [e(t-\tau_i) + z(t-\tau_i)]^T, \\
\Delta\dot{B}_i &= -\Phi_i P \Delta x(t) u^T(t-\tau_i), \; i = 0, \ldots, r
\end{aligned}$$

avec $e(t) = x(t) - z(t)$ et $z(t)$ solution particulière à une entrée périodique, et sur la fonctionnelle de Lyapunov

$$\begin{aligned}
V(e, \Delta x, \Delta A_0, \ldots, \Delta B_l) =&< We, e > + \Delta x^T P \Delta x \\
&+ \Sigma_{i=0}^{r} [tr(\Delta A_i^T F_i^{-1} \Delta A_i) + tr(\Delta B_i^T \Phi_i^{-1} \Delta B_i)]
\end{aligned}$$

et pour laquelle $\dot{V}(t) = - < e_t, e_t > - \Delta x^T(t) Q \Delta x(t)$.

Identification
Technique adaptative

Exemple: $\sum: \quad \dot{x}(t) = a_0 x(t) + a_1 x(t-\tau_1) + b_0 u(t), \quad x, u \in \mathbb{R}$

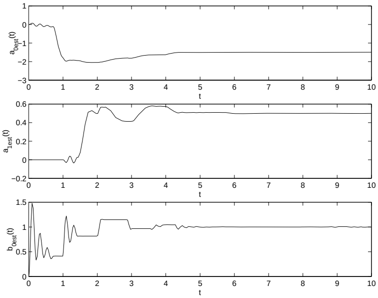
avec $a_0 = -1.5,\ a_1 = 0.5,\ b_0 = 1,\ \tau_1 = 1$. Le système adaptatif est régi par:

$$\begin{aligned}
\dot{\hat{x}}(t) &= \hat{a}_0 x(t) + \hat{a}_1 x(t-\tau_1) + \hat{b}_0 u(t) + a\Delta x(t),\ t \geq 0, \\
\dot{\hat{a}}_0 &= \beta_0 \Delta x(t) x^T(t), \dot{\hat{a}}_1 = \beta_1 \Delta x(t) x^T(t-\tau_1), \\
\dot{\hat{b}}_0 &= \gamma_0 \Delta x(t) u^T(t),
\end{aligned}$$

Les gains d'adaptations sont tous fixés à 8, l'entrée est une somme de signaux carrés d'amplitude 5 et de fréquences 0.5 et 0.7 Hz..

Identification
Technique adaptative

Exemple:(suite) Résultats en simulation



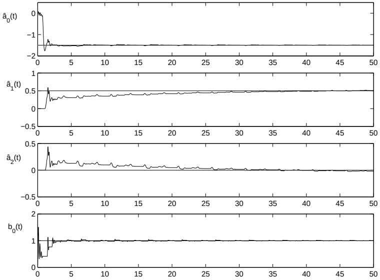
Le réglage des gains est ouvert et il est difficile d'obtenir une rapidité de convergence plus forte.

Identification
Technique adaptative

De part ses propriétés de robustesse, cette technique permet une estimation indirecte du retard.

Exemple: $\dot{\hat{x}}(t) = \hat{a}_0 x(t) + \hat{a}_1 x(t-\hat{\tau}_1) + \hat{a}_2 x(t-\hat{\tau}_2) + \hat{b}_0 u(t) + a\Delta x(t)$,

avec $\hat{\tau}_1 = 1.01$ et $\hat{\tau}_2 = 1.1$, différents de ceux du processus.



Les coefficients les plus éloignés du "vrai" retard $\tau_1 = 1$ tendent vers 0.

Identification
Technique algébrique

Approche algébrique/fonctionnelle

- **Cadre de l'étude**: Reformulation et extension aux SàR d'une méthode algébrique initiée par [M. Fliess & H. Sira-Ramirez, 03].
- Non asymptotique (résultat en temps fini),
- Déterministe (ne s'appuyant pas sur des propriétés statistiques des bruits),
- Dans le domaine temporel, technique marquée par 3 étapes: Dérivation $\longrightarrow$ Multiplication $\longrightarrow$ Intégration.
- Extension possible à certaines situations non linéaires.

Exemple simple et sans retard

Méthodes opérationnelle et fonctionnelle

Identification de la constante de temps d'un 1^{er} ordre par une approche:

Opérationnelle $(y(s), u(s))$

$$\sum \quad sy - a\,y = u + y_0$$

$$d/ds \quad \to \quad d(sy)/ds - a\,dy/ds = du/ds$$

$$\to \quad a = \frac{d(sy)/ds - du/ds}{dy/ds}$$

$$1/s \quad \to \quad a = \frac{1/s[d(sy)/ds - du/ds]}{1/s[dy/ds]}$$

Fonctionnelle $(y(t), u(t))$

$$\sum \quad \dot{y} - a\,y = u + y_0\delta$$

$$\times t \quad \to \quad t\dot{y} - a\,ty = tu$$

$$\to \quad a = \frac{t\dot{y} - tu}{ty}$$

$$\int \quad \to \quad a = \frac{\int_0^t (\theta\dot{y} - \theta u)d\theta}{\int_0^t \theta y\; d\theta}$$

- Intégration par parties: $\int_0^t \theta\dot{y}(\theta)d\theta = ty - \int_0^t y(\theta)d\theta$.
- Plus généralement, cette intégrale $(1/s)$ peut être remplacée par un filtre $H(s)$.
- La formule donnant a est non asymptotique et valable pour presque tout t.

Exemple sans retard (suite)

Méthodes opérationnelle et fonctionnelle

Formule alternative:

Opérationnelle $(y(s), u(s))$		Fonctionnelle $(y(t), u(t))$	
	$s_1 = s + \gamma,\ y_1 = y(s_1),\ u_1 = u(s_1)$		$e = e^{-\gamma t}$
Σ	$sy - ay = u + y_0$	Σ	$\dot{y} - ay = u + y_0\delta$
$s+\gamma \quad \rightarrow$	$s_1 y_1 - a y_1 = u_1 + y_0$	$\times e \quad \rightarrow$	$e\dot{y} - aey = eu + y_0\delta$
$\rightarrow$	$a = \dfrac{[s_1 y_1 - sy] - [u_1 - u]}{y_1 - y}$	$\rightarrow$	$a = \dfrac{(1-e)\dot{y} - (1-e)u}{(1-e)y}$
$1/s \quad \rightarrow$	$a = \dfrac{1/s[s_1 y_1 - sy] - 1/s[u_1 - u]}{1/s[y_1 - y]}$	$\int \quad \rightarrow$	$a = \dfrac{\int_0^t (1-e)\dot{y} - (1-e)u}{\int_0^t (1-e)y}$

- Intégration par parties: $\int_0^t e\dot{y} = \gamma e y - \int_0^t e y$.
- La multiplication par t précédente est remplacée par $(1 - e^{-\gamma t})$. Convergeant vers 1, cette dernière peut s'avérer plus avantageuse dans un contexte bruité.

Exemple sans retard (suite)

Méthodes opérationnelle et fonctionnelle

- L'algorithme non asymptotique précédent est calculé indépendamment de la valeur de la condition initiale y_0.
- Outre la C.I., cet démarche reste valable en présence de perturbations dites structurées (constantes, polynomiales,...).

  Exemple: la présence d'une perturbation constante $\gamma(s) = \gamma_0/s$ dans l'équation de fonctionnement d'un système peut être annihilée observant que:

  $$\frac{d}{ds} s\gamma(s) = 0.$$

- Le formalisme des distributions offre une plus large souplesse dans l'annihilation de signaux structurés, et en particulier pour les signaux retardés.

Préliminaires
Multiplication des distributions

L'annihilation de signaux structurés [3] (par ex. entrées, perturbations, C.I.) peut être réalisée via une combinaison de dérivations et multiplications (par des fonctions $\alpha \in \mathcal{C}^\infty$).

Théorème (Schwartz, 1966)

Si T a un support compact K et est d'ordre (nécessairement fini) m, $\alpha\, T = 0$ lorsque α et ses dérivées d'ordre $\leq m$ s'annulent sur K.

- Exemples:

$$\alpha\, \delta_\tau = \alpha(\tau)\, \delta_\tau, \quad \underbrace{(t-\tau)}_{\alpha}\ \underbrace{\delta_\tau}_{T} = 0, \quad \underbrace{t^2 (t-\tau)}_{\alpha}\ \underbrace{(a\, \delta^{(1)} + b\, \delta_\tau)}_{T} = 0.$$

- Conséquence: le terme τ est passé du statut d'argument (dans T) à celui d'argument et *coefficient* (dans αT).

[3] définition algébrique dans [Fliess & Ramirez, 03].

Préliminaires
Multiplication des distributions

Quelques règles combinant convolution et multiplication

par t^n [avec $z_i \equiv t^i y$]	par $e^{-\gamma t}$ [avec $z \equiv e^{-\gamma t} y$ et $\lambda = e^{\gamma \tau}$]
$t^n\,(S * T) = \sum_{k=0}^n C_n^k\,(t^k\,S) * (t^{n-k}\,T)$	$e^{-\gamma t}\,(S * T) = e^{-\gamma t}\,S * e^{-\gamma t}\,T$
$\Downarrow$	$\Downarrow$
$t^3\,y^{(2)} = -6\,z_1 + 6\,z_2^{(1)} - z_3^{(2)}$	$e^{-\gamma t}\,y^{(2)} = \gamma^2\,z + 2\gamma\,z^{(1)} + z^{(2)}$
"pré-intégration" par parties	"pré-intégration" par parties
$t\,\dot{y}(t-\tau) = \delta_\tau * (-z_0 + \tau z_0^{(1)} + z_1^{(1)})$	$e^{-\gamma t}\,\dot{y}(t-\tau) = \lambda^{-1}\,\delta_\tau * (\dot{z} + \gamma\,z)$
"homogeneisation" des arguments	"homogeneisation" des arguments

Premier exemple

Identification du retard d'une entrée structurée

Réponse indicielle d'un 1^{er} ordre avec C.I. et perturbation γ_0 constante.

$$\dot{y} + a\,y = y(0)\,\delta + \gamma_0\,H + b\,u(t-\tau)$$

1. $\frac{d}{dt}(\dot{y} + a\,y) = y(0)\,\delta' + \gamma_0\,\delta + b\,\delta_\tau,$ dérivation ($\to$ singularités)
2. $t^2(t-\tau)\times[\frac{d}{dt}(\dot{y} + a\,y)] = 0,$ multiplication ($\to$ annihilation)
3. $H^k * t^2(t-\tau)\times[\frac{d}{dt}(\dot{y} + a\,y)] = 0.$ intégration ($\to$ causalité)

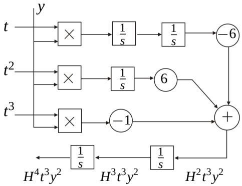
$$\boxed{\tau = \frac{H^k * (t^3 y^{(2)} + a\,t^3 y^{(1)})}{H^k * (t^2 y^{(2)} + a\,t^2 y^{(1)})} \quad t > \tau.}$$

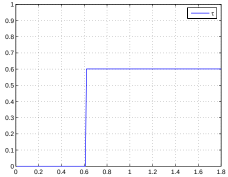
Exemple: $H^2 * t^3 y^{(2)} = H^2 * [-6\,z_1 + 6\,z_2^{(1)} - z_3^{(2)}] = -6\int\int z_1 + 6\int z_2 - z_3, \qquad z_i = t^i y$

Premier exemple

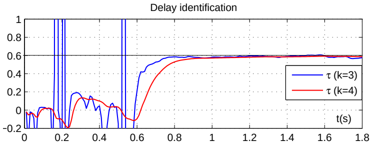
Identification du retard d'une entrée structurée

- Schéma (partiel) de réalisation et résultat en simulation:





- Contexte bruité: des filtres peuvent être substitués aux intégrateurs H^k.



Cas d'une série de retards

Identification du retard d'une entrée structurée

Une démarche analogue peut être envisagée si on suppose un retard incompressible Δ d'une entrée retardée (de $\tau_1, \tau 2, \ldots$) et bloquée.

$$\text{Exemple:} \quad \sum_{k=0}^{2} a_i\, y^{(i)} = b \sum_{k=0}^{\infty} u_k\, \chi_k,$$

avec χ_k fonction caractéristique $(\tau_k + kT,\ \tau_{k+1} + (k+1)T)$. Dérivation,

$$\begin{aligned} \sum\nolimits_{k=0}^{2} a_i\, y^{(i+1)} &= b \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} \qquad \sigma_k\, \delta_{h_k}, \\ \sum\nolimits_{k=0}^{2} a_i\, y^{(i+1)} &= b \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} \qquad \sigma_k\, \delta_{h_k}, \end{aligned}$$

avec σ_k discontinuités de u aux instants $h_k = \tau_k + kT$.

Cas d'une série de retards

Identification du retard d'une entrée structurée

Une démarche analogue peut être envisagée si on suppose un retard incompressible Δ d'une entrée retardée (de $\tau_1, \tau 2, ...$) et bloquée.

$$\text{Exemple:} \quad \sum_{k=0}^{2} a_i\, y^{(i)} = b \sum_{k=0}^{\infty} u_k\, \chi_k,$$

avec χ_k fonction caractéristique $(\tau_k + kT,\ \tau_{k+1} + (k+1)T)$. Dérivation, multiplication par t et t^2

$$\begin{aligned} t \sum\nolimits_{k=0}^{2} a_i\, y^{(i+1)} &= b \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} && h_k\, \sigma_k\, \delta_{h_k}, \\ t^2 \sum\nolimits_{k=0}^{2} a_i\, y^{(i+1)} &= b \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} && h_k^2\, \sigma_k\, \delta_{h_k}, \end{aligned}$$

avec σ_k discontinuités de u aux instants $h_k = \tau_k + kT$.

Cas d'une série de retards

Identification du retard d'une entrée structurée

Une démarche analogue peut être envisagée si on suppose un retard incompressible Δ d'une entrée retardée (de $\tau_1, \tau 2, \ldots$) et bloquée.

$$\text{Exemple:} \quad \sum_{k=0}^{2} a_i\, y^{(i)} = b \sum_{k=0}^{\infty} u_k\, \chi_k,$$

avec χ_k fonction caractéristique $(\tau_k + kT,\ \tau_{k+1} + (k+1)T)$. Dérivation, multiplication par t et t^2 et convolution avec H^3 conduisent aux identités:

$$\begin{aligned} D := H^3 * t \sum\nolimits_{k=0}^{2} a_i\, y^{(i+1)} &= b \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} H^3 * h_k\, \sigma_k\, \delta_{h_k}, \\ N := H^3 * t^2 \sum\nolimits_{k=0}^{2} a_i\, y^{(i+1)} &= b \sum\nolimits_{k=0}^{\infty} H^3 * h_k^2\, \sigma_k\, \delta_{h_k}, \end{aligned}$$

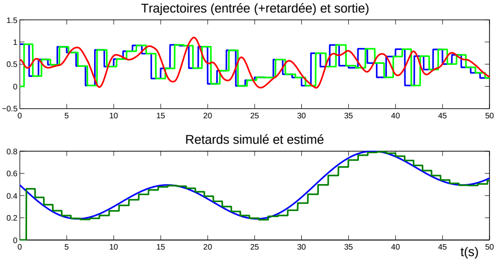
avec σ_k discontinuités de u aux instants $h_k = \tau_k + kT$. Si le support de H^3 est contenu dans $(0, \Delta)$,une identification "locale" est possible. Ainsi, par exemple:

$$H(s) = \frac{1 - e^{-\Delta s/3}}{s} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{ll} N = D = 0 & \text{sur} \quad \mathbb{R} \backslash (\tau_k, \tau_k + \Delta), \\ h_k = kT + \tau_k = N/D & \text{sur} \quad (\tau_k, \tau_k + \Delta). \end{array}$$

Cas d'une série de retards

Identification du retard d'une entrée structurée

- La réalisation des $H^3 * (t^{(j)} \times y^{(i)})$, et donc de N et D, est toujours basé sur les formules de pré-intégration par parties.
- Exemple en simulation avec condition initiale non nulle, perturbation constante, et $a_0 = 2$, $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $y(0) = 1.3$, $\dot{y}(0) = -2.3$, $\gamma_0 = 0.5$, $\Delta = 1$.



Identification d'une série de retards.

- Dans un contexte bruité, fragilité relative de l'algorithme, la convergence de chaque estimation devant être assurée sur l'intervalle $(0, \Delta)$

Etude expérimentale (Feedback PT326)

Identification simultanée des paramètres Θ et du retard τ

La dynamique inconnue du processus nécessite une identification simultanée des paramètres et retard.

$$\sum : \quad a_2\, y^{(2)} + a_1\, y^{(1)} + y = b\, u(t-\tau) + y(0)\delta + \gamma_0 H$$

1. d/dt : dans le cas d'une entrée structurée ($u =$échelon), transforme le second membre en une distribution singulière de support $\{0, \tau\}$:

$$a_2\, y^{(3)} + a_1\, y^{(2)} + y^{(1)} = b\, \delta_\tau + y(0)\delta^{(1)} + \gamma_0 \delta$$

2. $\times\alpha$: Annihilation du second membre via la multiplication par une fonction α t.q. $\alpha(0) = \dot{\alpha}(0) = \alpha(\tau) = 0$ et choix:

$$\begin{aligned} & \alpha = (1 - e^{-\gamma t})^2 (1 - \lambda\, e^{-\gamma t}) \qquad \lambda = e^{-\gamma\tau}, \\ ou \quad & \alpha = t^2 (t - \tau). \end{aligned}$$

Etude expérimentale (Feedback PT326)

Identification simultanée des paramètres Θ et du retard τ

3. $\int \cdots \int$: Des intégrales itérées (ou différents filtres H_i), permettent une formulation spectrale du problème

$$(A(t) - \lambda B(t)) \begin{pmatrix} a_2 \\ a_1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0, \quad \text{avec} \quad \begin{cases} A_{i,j} = H^i \, (1-e)^2 \, y^{(4-j)}, \\ B_{i,j} = H^i \, e(1-e)^2 \, y^{(4-j)}. \end{cases}$$

Exemple de réalisation (Int. par parties):

$$H^1 * [(1-e)^2 y^{(1)}] = z_0 - 2z_1 + z_2 + 2\gamma \int_0^t (z_2 - z1), \quad z_i(t) = e^{i\gamma t} y(t).$$

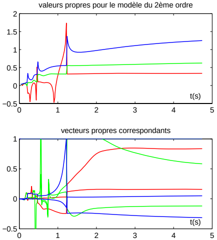
Remarques:

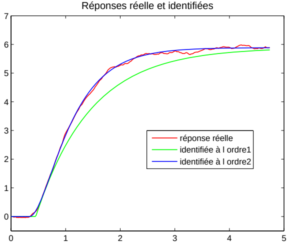
- Le gain statique n'est pas identifié par cette technique.
- Comme valeur propre (via $\lambda = e^{-\gamma\,\tau}$), le retard peut être identifié indépendamment des paramètres $\Theta = (a_2,\, a_1,\, 1)^t$.

Etude expérimentale (Feedback PT326)

Identification simultanée des paramètres Θ et du retard τ

- Résolution du pb spectral (MATLAB et fonction polyeig) et comparaisons des réponses indicielles réelle et simulées sur la base des coefficients identifiés aux ordres 1 et 2.





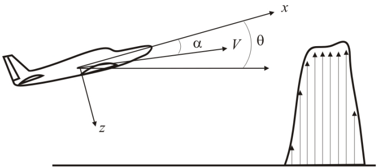
- Au modèle du second ordre correspond le transfert estimé:

$$\boxed{G(s) \simeq \frac{5.9\, e^{-0.34s}}{0.16\, s^2 + 0.84\, s + 1}}$$

Etude expérimentale

en collaboration avec l'ONERA

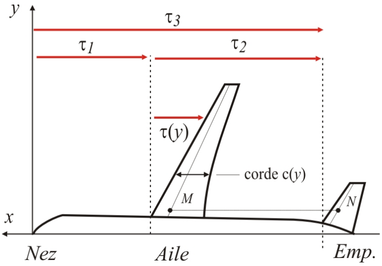
Objectif Modélisation et identification du modèle en vol turbulent.



$$
\begin{aligned}
m\dot{V} &= -mg\sin(\theta) - 1/2\rho S V^2 C_x,\\
mV\dot{\alpha} &= mg\cos(\theta) + mVq - 1/2\rho S V^2 C_z,\\
B\dot{q} &= 1/2\rho S l V^2 C_m,\\
\dot{\theta} &= q,
\end{aligned}
$$

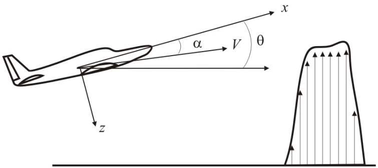
Apports (1) Prise en compte des phénomènes instationnaires, du découpage Fuselage Aile Empennage et des retards induits dans le calcul des coefficients aérodynamiques C_x, C_z et C_m.

(2) Premiers résultats d'identification des modèles retardés obtenus.



Etude expérimentale
en collaboration avec l'ONERA

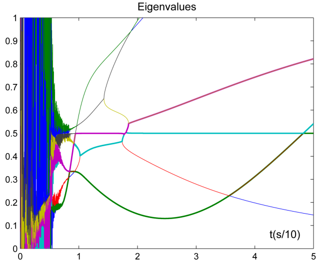
Objectif Modélisation et identification du modèle en vol turbulent.



$$
\begin{aligned}
m\dot{V} &= -mg\sin(\theta) - 1/2\rho S V^2 C_x, \\
mV\dot{\alpha} &= mg\cos(\theta) + mVq - 1/2\rho S V^2 C_z, \\
B\dot{q} &= 1/2\rho S l V^2 C_m, \\
\dot{\theta} &= q,
\end{aligned}
$$

Apports (1) Prise en compte des phénomènes instationnaires, du découpage Fuselage Aile Empennage et des retards induits dans le calcul des coefficients aérodynamiques C_x, C_z et C_m.

(2) Premiers résultats d'identification des modèles retardés obtenus.



Etat retardé et/ou entrée non structurée

Principe, limitation et exemple

- Les deux situations reposent sur la propriété de multiplication et convolution permettant de former des arguments homogènes.

Exemple:
$$t\,y(t-\tau) = (t-\tau)y(t-\tau) + \tau\,y(t-\tau) = \delta_\tau * (ty + \tau\,y)$$
$$t\,\dot{y}(t-\tau) = \delta_\tau * (-z_0 + \tau z_0^{(1)} + z_1^{(1)}), \quad z_i = t^i\,y.$$

- Limitation 1: Dans le cas d'un système avec état retardé, la condition initiale est par nature *inconnue* (support $\subset (-\tau, 0)$ avec τ inconnu). Il en est de même lorsque l'entrée est déjà active à $t = 0$.
- Limitation 2: un produit de convolution supplémentaire entre différentes composantes de la trajectoire accroît (dans l'état actuel des algorithmes) la sensibilité aux perturbations.

Etat retardé et/ou entrée non structurée

Principe, limitation et exemple

Exemple d'un second ordre bouclé

[notations: $\Delta = u - y,\ e = e^{-\gamma\, t},\ \Theta = (a_2, a_1, 1)^t,\ \lambda = e^{-\gamma\, \tau}$]

$$\sum_{i=0}^{2} a_i\, y^{(i)} = u(t-\tau) - y(t-\tau) = \delta_\tau * \Delta,$$

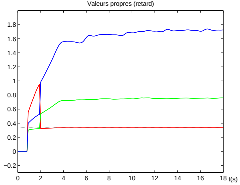
1. Multiplication: $e \times \sum_{i=0}^{2} a_i\, y^{(i)} = e \times (\delta_\tau * \Delta) = \lambda\, \delta_\tau * e\Delta,$
2. Convolution: $([\Delta * ey^{(2)}, \cdots, \Delta * ey] - \lambda\, [e\Delta * y^{(2)}, \cdots, e\Delta * y])\, \Theta = 0,$
3. Intégrations itérées $\Rightarrow$ Pb aux valeurs/vecteurs propres.

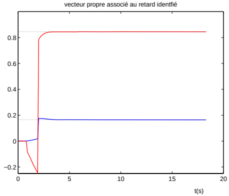
Etat retardé et/ou entrée non structurée

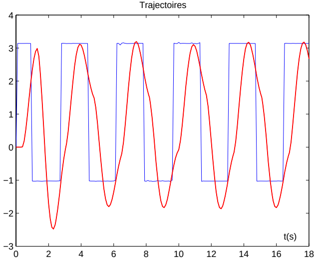
Validation en simulation

Exemples en simulation

(identification simultanée des paramètres et retard)







Trajectoires et identification simultanée des paramètres et retard du système avec comme paramètres $a_2 = 0.16$, $a_1 = 0.84$, $\tau = 0.34$, et les filtres $H_i(s) = \frac{1}{(s+1)^i}$.

Etat retardé et/ou entrée non structurée

Retour sur l'approche opérationnelle

Dans des cas simples, une formulation équivalente dans le domaine opérationnel peut être plus synthétique. Ainsi, pour l'exemple d'un intégrateur retardé,

$$①: sy(s) = Ke^{-\tau s}u(s) \quad \Rightarrow \quad ②: (s+\gamma)y(s+\gamma) = Ke^{-\gamma\tau}e^{-\tau s}u(s+\gamma)$$

$$\frac{①}{②} \Rightarrow e^{-\gamma\tau} = (1+\tfrac{\gamma}{s})\,\frac{u(s)y(s+\gamma)}{u(s+\gamma)y(s)}.$$

$$e^{-\gamma\tau} = \frac{1}{(eu*y)(t)}\,\left[(u*ey)(t) + \gamma\int_0^t (u*ey)(\theta)d\theta\right].$$

Afin d'éviter les singularités dûes au passage par 0 du dénominateur, on peut élever au carré avant d'intégrer:

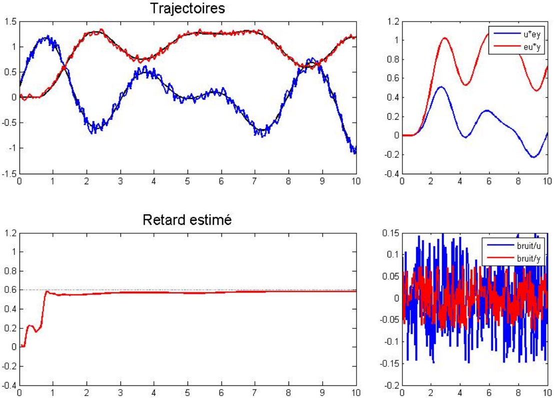
$$\boxed{e^{-2\gamma\tau} = \frac{\int_0^t \left[(u*ey)(\theta) + \gamma\int_0^\theta (u*ey)(\nu)d\nu\right]^2 d\theta}{\int_0^t (eu*y)^2(\nu)d\nu}.}$$

Etat retardé et/ou entrée non structurée

Retour sur l'approche opérationnelle

Exemple en simulation

(Identification du retard $\tau = 0.6s$)



PERSPECTIVES
&
CONCLUSION

Verrous scientifiques

Analyse numérique et filtrage

- Méthode efficace de sélection en ligne des bons paramètres via une formulation redondante avec A et B $m \times n$, $m > n$:

$$(A(t) - \lambda B(t))\Theta = 0, \tag{1}$$

"(1) has the awkward feature that most matrices have no eigenvalues at all, whilst for those that do, an infinitesimal perturbation will in general remove them[4]".

$\rightarrow$ Notion de pseudo-spectre $\quad \Lambda_\epsilon = \{z \in \mathbb{C} : \|(A - \lambda B)\Theta\| \leq \epsilon, \ \|\Theta\| = 1\}.$

- Problématique récente de filtrage au travers d'expressions de la forme:

$$H_k * [\alpha_i \times g_j], \qquad i = 1, 2, \ j = 1, \cdots, n, \ k = 1, \cdots, m.$$

dans lesquelles H_k sont des filtres à déterminer, α_i des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ et g_j des termes dépendant des trajectoires du système.

[4] T.G.Wright & al., 01

Verrous scientifiques

Retards variables et bidirectionnels

- Identification de retards bidirectionnels: exemple d'un 1^{er}ordre d'entrée u d'argument $\varphi(t) = t - \tau_1(t)$, et de mesure m d'argument $\psi(t) = t - \tau_2(t)$,

$$\left\{ \begin{array}{l} y + a\,\dot{y} = u \circ \varphi \\ m = y \circ \psi \end{array} \right. \Rightarrow m + (a/\dot{\psi})\ \dot{m} = u \circ \varphi \circ \psi.$$

Un retard non constant sur la mesure ($\dot{\psi} \neq 1$) $\Rightarrow$ caractère non stationnaire du Pb et question ouverte de l'identifiabilité.

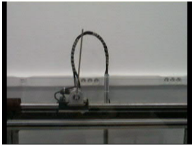
Systèmes non linéaires

Thèse dans le cadre de Robocoop et ALIEN (S. Riachy)

- L'extension à des situations non linéaires (par ex. $m^{(k)}(y)$ substituée à $y^{(k)}$) est immédiate, et la dépendance explicite des signaux structurés vis à vis du temps n'est pas requise.

$$\text{ex:} \qquad \ddot{y} + a_1 \dot{y} + a_0 \sin y = b \,\mathrm{sgn}(\dot{y}) + \varphi_0$$

- Applications: Identification et commande de pendules inversés avec prise en compte des modèles de frottements et des retards induits par les transmissions.

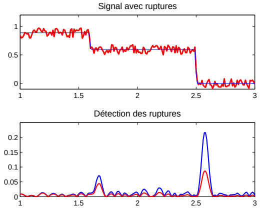


Utilisation de la technique *Alien* pour une identification des paramètres englobant les phénomènes de frottements secs.

Détection de ruptures

Applications au Diagnostic et aux Images

- Cette thématique consiste en la détection et la localisation en ligne des variations brusques d'un signal.
- Il est remarquable de noter que, *pour une entrée structurée, l'identification des retards n'est autre qu'une détection et localisation de ruptures.*



⟵ Premiers essais de détection et localisation en ligne de ruptures.

Le cas de signaux non modélisés reste un problème ouvert (approximations,...?).

- Adaptée à leur contexte respectif (aspect multidimensionnel, filtres non causaux,...), cette technique peut trouver une application naturelle aux analyses d'images et à la détection de défauts.

Quelques références

- S.M.V. Lunel,Parameter identifiability of differential delay equations,*Int J. of Adapt. Control Signal Process.*, 2001,vol 15,655–678,
- L. Belkoura, Identifiability of systems described by convolution equations, *Automatica*, vol. 41, 2005, pp. 505-512.
- M. Fliess, and H. Sira-Ramirez, An algebraic framework for linear identification, *ESAIM Contr. Optim. Cal. Variat.*, vol. 9, 2003, pp. 151-168.
- L. Belkoura, Jean-Pierre Richard, Michel Fliess, On-line identification of systems with delayed inputs, *17th International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems, MTNS06, July 24-28, Kyoto, Japan*, 2006,
- J.-P. Richard, Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems, *Automatica*, vol. 39, 2003, pp. 1667-1694.
- L. Schwartz, *Théorie des distributions* (2^{nd} ed.), Hermann, Paris, 1966.