

# Outils pour le non linéaire (Analyse et Commande Avancées)

Jean-Pierre RICHARD  
Ecole Centrale de Lille



jean-pierre.richard@ec-lille.fr  
<http://syner.ec-lille.fr/~richard>

MR AG2i - octobre 2009

<http://syner.ec-lille.fr/~richard/enseignement.htm>



J.P. RICHARD

1



## Plan du cours (12h)

- 1 Introduction (exemples)
- 2 Outils Mathématiques
- 3 Stabilité
- 4 Commandabilité
- 5 ~~Observabilité ?~~ *exercices*



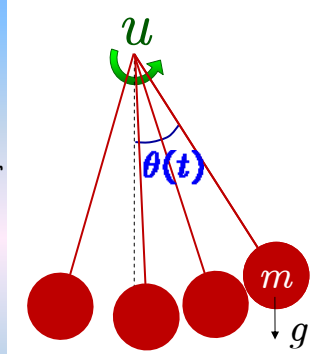
J.P. RICHARD

2



## 1- Introduction : exemple mécanique 1

- $\delta$  Frottement
  - $l$  Longueur
  - $m$  Masse
  - $u$  Couple moteur
  - $\theta$  Angle
  - $g$  Gravité
- $\frac{d}{dt}\theta(t) = \dot{\theta}$



Petit rappel sur les systèmes lagrangiens...

$$\mathcal{L} = \mathcal{E}_c - \mathcal{E}_p$$

$$= \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos\theta)$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} + \text{dissip.} + \text{control}$$

$$q = \theta, \quad \dot{q} = \dot{\theta}$$



$$\ddot{\theta} + \frac{\delta}{m}\dot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = \frac{1}{m}u$$

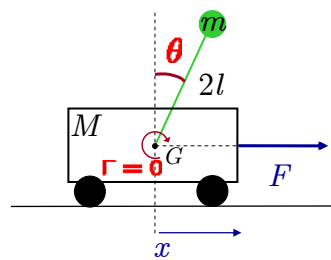
$$x = \begin{bmatrix} \theta \\ \dot{\theta} \end{bmatrix} \rightarrow \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \ddot{\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ -\alpha\dot{\theta} - \beta\sin\theta \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \gamma \end{bmatrix} u \rightarrow \dot{x} = f(x) + bu$$



J.P. RICHARD

3

## 1- Introduction : exemple mécanique 2



$$\begin{cases} (M+m)\ddot{x} + ml\ddot{\theta}\cos\theta - ml\dot{\theta}^2\sin\theta = F, \\ (J+ml^2)\ddot{\theta} + ml\ddot{x}\cos\theta - mgl\sin\theta = 0. \end{cases}$$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(M+m)\dot{x}^2 + (J+ml^2)\dot{\theta}^2 + ml\dot{x}\dot{\theta}\cos(\theta) - mgl\cos(\theta)$$

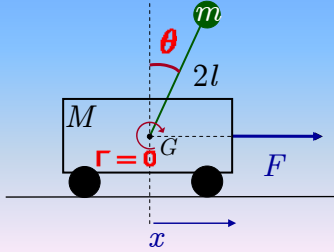
NB :  $E(\theta) = \begin{bmatrix} M+m & ml\cos\theta \\ ml\cos\theta & J+ml^2 \end{bmatrix}$  inversible  $\forall \theta \Rightarrow \exists X$

$$\dot{X} = E(\theta)^{-1}[f(X) + g(X)F]$$



J.P. RICHARD

4

**INRIA B2, projet IMARA, juin 2003**



**LACIS** J.P. RICHARD 5 **CELESTIALE LILLE**

Fête de la Science 2008



**LACIS** J.P. RICHARD 6 **CELESTIALE LILLE**

## 1- Introduction : exemple mécanique 3

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 \sin \theta, \\ \dot{x}_2 = u_1 \cos \theta, \\ \dot{\theta} = u_2. \end{cases}$$

Monocyclus simplifié : entrées = vitesses (pas d'inertie), pas de glissement...  
 (modèle cinématique, pas modèle dynamique)



J.P. RICHARD

7



## 1- Introduction : exemple mécanique 3bis

$$\begin{cases} u_1 = 1/2(v_1 + v_2) \\ u_2 = 1/2(v_1 - v_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 \sin \theta, \\ \dot{x}_2 = u_1 \cos \theta, \\ \dot{\theta} = u_2. \end{cases}$$

Monocyclus simplifié (modèle cinématique, entrées = vitesses)

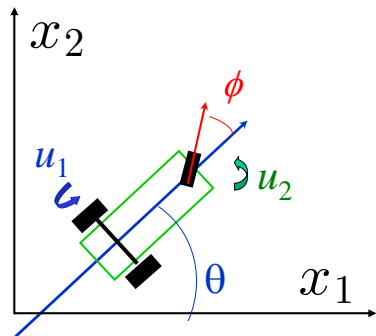


J.P. RICHARD

8



## 1- Introduction : exemple mécanique 4



$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dx_1}{dt} = u_1 \cos(\theta + \phi), \\ \frac{dx_2}{dt} = u_1 \sin(\theta + \phi), \\ \frac{d\theta}{dt} = u_1 \sin\phi, \\ \frac{d\phi}{dt} = u_2. \end{array} \right.$$

Tricycle (simplifié)



J.P. RICHARD

## 1- Introduction : exemple électrique 1

**Moteur Courant Continu** (sortie = position)

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = -\frac{r}{l}x_1 - \frac{K}{l}x_2v + \frac{1}{l}u \\ \dot{x}_2 = -\frac{B}{J}x_2 - \frac{K}{J}x_1v \\ \dot{x}_3 = x_2 \end{array} \right.$$

$x_1$  courant rotorique (armature)  
 $x_2$  vitesse angulaire (armature)  
 $x_3$  position angulaire  
 $v$  flux inducteur (stator)  
 $u$  tension rotorique (armature)  
 $K$  gain moteur («fem/vitesse»)  
 $J, B$  inertie, frot. charge  
 $r, l$  résist., self rotoriques



J.P. RICHARD

10



## 1- Introduction : exemple électrique 3

### Moteur Pas-à-Pas (modélisé dans le repère de Park)

$$L_d \frac{di_d}{dt} = v_d - Ri_d + nL_q \omega i_q,$$

$$L_q \frac{di_q}{dt} = v_q - Ri_q - nL_d \omega i_d - nmi_r \omega,$$

$$C_{em} = n(L_d - L_q)i_d i_q + nmi_r i_q + K_d \sin(n\theta),$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega,$$

$$J \frac{d\omega}{dt} = C_{em} - C_{charge}.$$



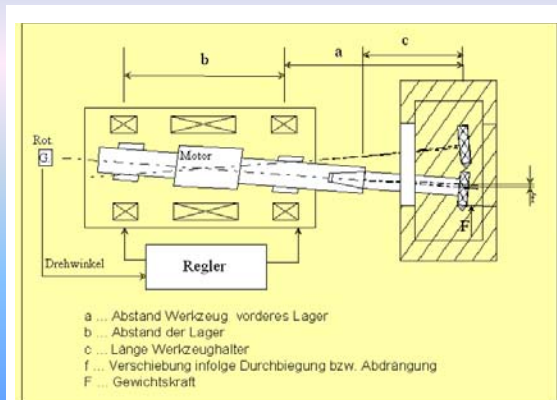
J.P. RICHARD

11

## 1- Introduction : exemple magnétique

### Contrôle de lévitation magnétique (palier)

- Modèle non affine en la commande (non-linéarité de commande en  $\omega^2$ )
- Identification / estimation rapides (algébrique ALIEN)
- Programme PAI PROCOPE (Allemagne)
- **sujet de MR ?** Selon candidats...



J.P. RICHARD

12

## Autres exemples ...

J.P. RICHARD

13

## 1- Introduction : exemple en écologie

### Proies-Prédateurs (Lotka-Volterra)

Nbre Herbivores :  $x$

Nbre Carnivores :  $y$

ensemble →

seuls :  $dx/dt = ax$ ,  $(a > 0)$

seuls :  $dy/dt = -by$ ,  $(b > 0)$

ensemble :  $dx/dt = ax - cxy$   $(a, b, c, d > 0)$

$dy/dt = -by + dxy$

NB : Volterra avait remarqué que  $(a \ln y - cy) + (b \ln x - dx) = cte.$   
 ... sacré Vito !

Vito Volterra (1860-1940), mathématicien, fondateur de l'analyse fonctionnelle, systèmes héréditaires.

Alfred James Lotka, chimiste :  
 « Elements of Physical Biology », 1925.

J.P. RICHARD

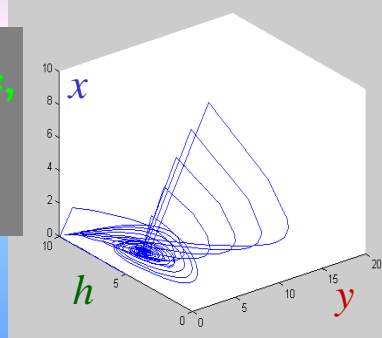
14

1- Introduction : exemple en écologie (suite)

**Modèle proies-prédateurs à 3 espèces :**

Plants d'herbe : $h$	seuls :	$\dot{h} = \alpha h \left(1 - \frac{h}{e_0}\right)$	saturation
Gazelles : $x$	seuls :	$\dot{x} = -\delta x,$	analyse ?
Lions : $y$	seuls :	$\dot{y} = -\nu y.$	simu... (herbe seule)

ensemble  $\rightarrow$

$$\begin{cases} \dot{h} = \alpha h \left(1 - \frac{h}{e_0}\right) - \beta hx, \\ \dot{x} = \gamma hx - \delta x - \epsilon xy, \\ \dot{y} = \mu xy - \nu y. \end{cases}$$


LACIS J.P. RICHARD 15

1- Introduction : exemple en météorologie

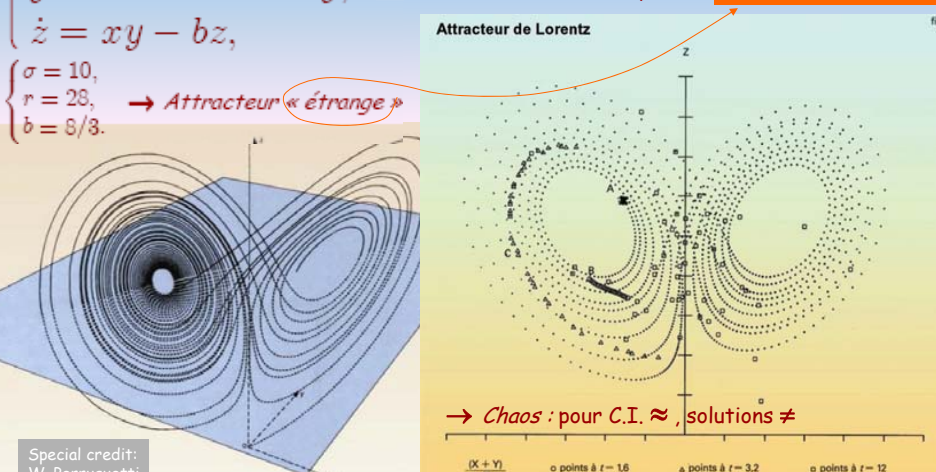
Sensibilité aux C.I. pressentie vers 1875 par James Clerk Maxwell (1831-1879) puis Henri Poincaré.

**Lorenz** (Edward Norton Lorenz, météorologue, 1917-?) étudie en 1963 l'équation déterministe :

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x), \\ \dot{y} = -xz + rx - y, \\ \dot{z} = xy - bz, \end{cases}$$

(modèle très simplifié des écoulements dans l'atmosphère) **pas de cycle limite !**

$\begin{cases} \sigma = 10, \\ r = 28, \\ b = 8/3. \end{cases} \rightarrow$  **Attracteur « étrange »**



→ **Chaos** : pour C.I.  $\approx$ , solutions  $\neq$

Special credit: W. Perruquetti

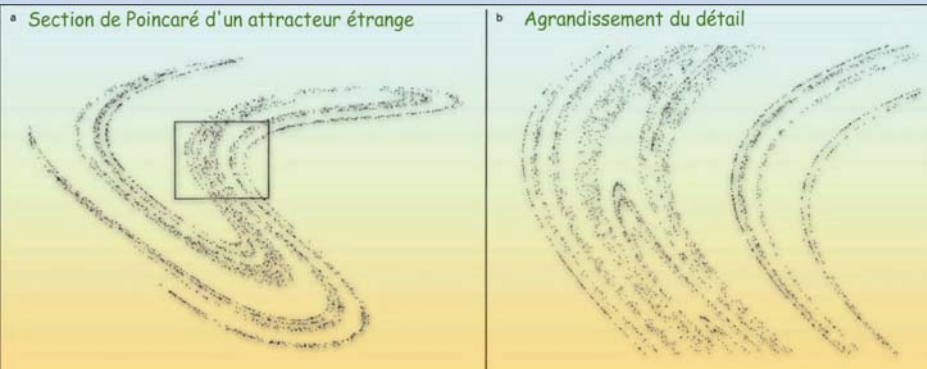


## 1- Introduction : attracteur étrange issu du chaos

Section de Poincaré d'un attracteur étrange (ici, cas d'un pendule forcé) :

- (a) Représentation globale de l'attracteur : structure feuilletée et repliements.
- (b) Agrandissement de la partie encadrée : topologie semblable à celle de l'attracteur dans sa totalité.

La permanence d'une même structuration à différentes échelles signe un objet fractal.



J.P. RICHARD

17



## 1- Introduction : un autre exemple de chaos

Système scalaire discret :  $x_{k+1} = ax_k(1 - x_k)$

Pour quelles valeurs de  $a$   
 a-t-on un phénomène de chaos ?



Valeurs d'adhérence  $x_{i\infty}$   
 → « arbre de Feigenbaum »



« FONCTION LOGISTIQUE »

$x$  densité de population  
 en début d'année  $n$

$f$  facteur de fécondité,

$r$  ressources nutritives

$$x(n+1) = fr x(n)$$

$$r = r(x) = k(1 - x)$$

d'après le nom du physicien américain,  
 Mitchell J. Feigenbaum  
 travaux des années 1970  
 (également "figuier de Feigenbaum",  
 Feigenbaum = figuier en allemand)

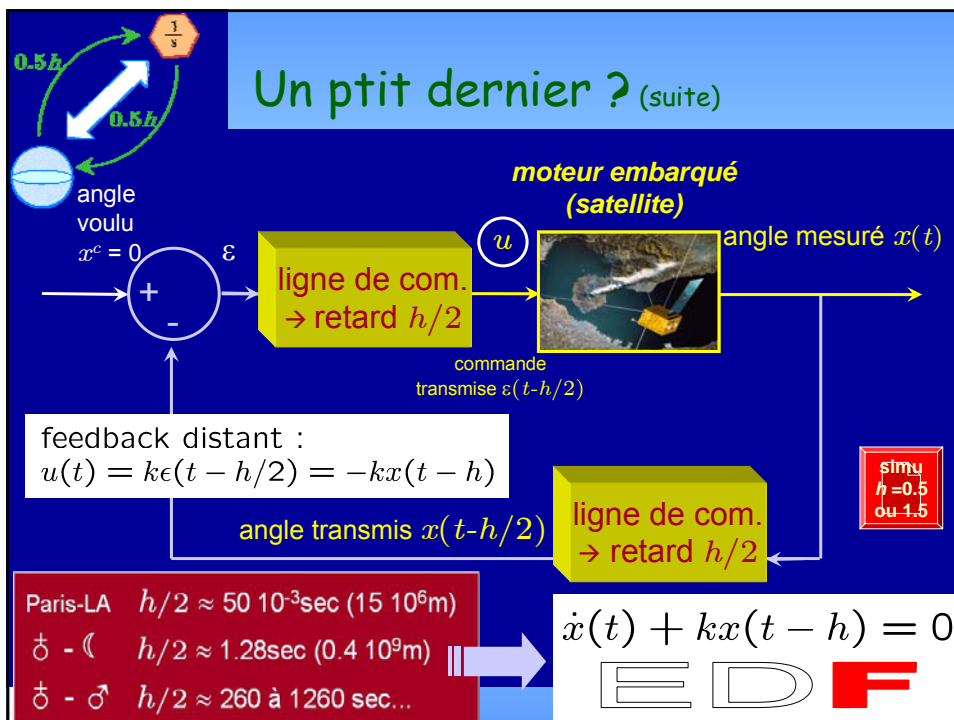
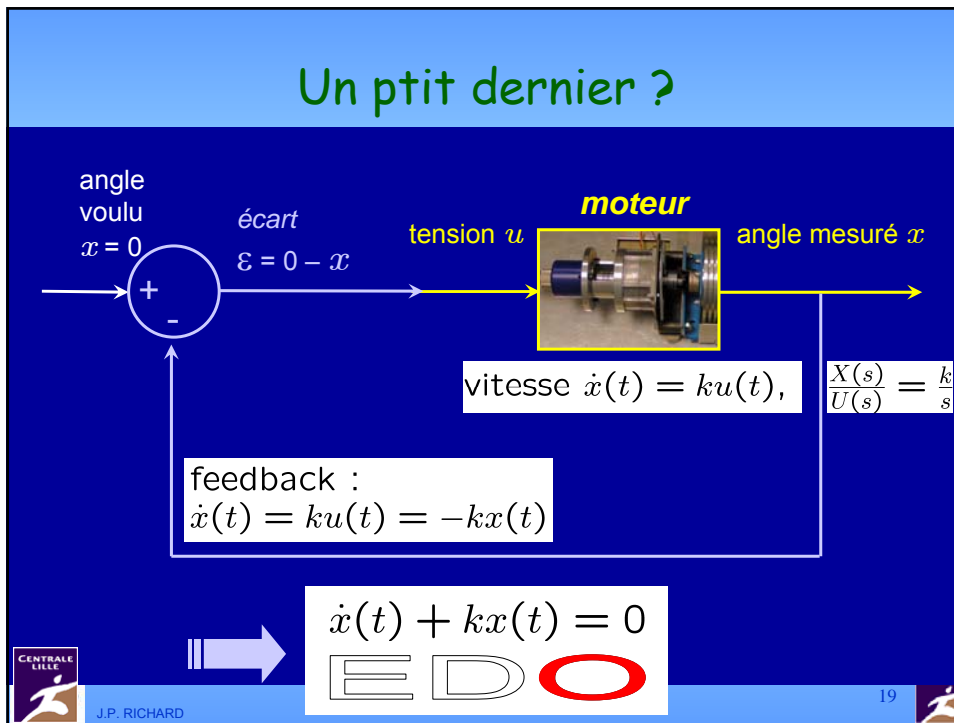
Rem.: systèmes déterministes



J.P. RICHARD

18





## 2 Outils Mathématiques : EDO

### Équations différentielles ordinaires (EDOs) :

$$\frac{d}{dt}x(t) = \dot{x} = f(x, t), \quad t \in \mathcal{T}, \quad x \in \mathcal{X}.$$

intervalles de  $\mathbf{R}$  et de  $\mathbf{R}^n$

« pb de Cauchy »

**Existence d'une solution :** si  $f$  est continue en  $t$  et Lipschitzienne en  $x$  (c.à.d.  $\exists k, \forall t, \|f(t, x_1) - f(t, x_2)\| < k \|x_1 - x_2\|$ ), alors il existe une solution unique, continue et dérivable :

$$x(t) = \phi(t, t_0, x_0), \quad \phi(t_0, t_0, x_0) = x_0.$$

**Point d'équilibre :**  $x_e : \phi(t, t_0, x_e) = x_e, \forall t$

soit (si pb Cauchy OK) :  $f(x_e, t) = 0, \forall t \in \mathcal{T}.$



J.P. RICHARD

21



### (2 Outils Mathématiques : EDO, suite)

#### Exemple 1 :

$$\frac{dx}{dt} = \begin{pmatrix} 1 - x_1^2 - x_2^2 & -1 \\ 1 & 1 - x_1^2 - x_2^2 \end{pmatrix} x, \quad t \in \mathbf{R}, x \in \mathbf{R}^2.$$

$\exists ! x_e = 0$

oui, mais prouvez-le...

Question subsidiaire :  
 Comment voit-on que  
 ce comportement est  
 non-linéaire ?

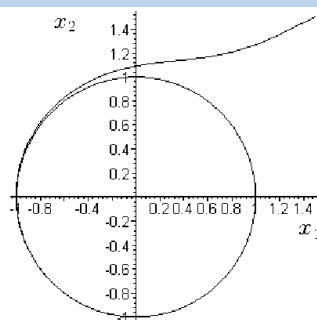


FIG. 4.2: Cercle unité : simulation de (4.16).



(simu1)



(simu2)



J.P. RICHARD

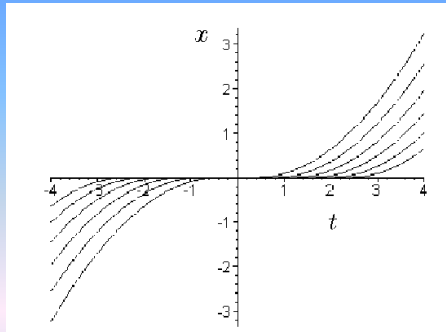
22



(2 Outils Mathématiques : EDO, suite)

**Exemple 2 :**

$$\frac{dx}{dt} = |x|^{\frac{1}{2}}, \quad x \in \mathbb{R},$$

$$x(0) = 0.$$




Essayer les solutions,  $\epsilon > 0$  :

$$\epsilon \in \mathbb{R}_+, \phi_\epsilon : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$$

$$t \mapsto \phi_\epsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t_0 - \epsilon \leq t \leq t_0 + \epsilon \\ \frac{(t-t_0-\epsilon)^2}{4} & \text{si } t_0 + \epsilon \leq t \\ -\frac{(t-t_0+\epsilon)^2}{4} & \text{si } t \leq t_0 - \epsilon \end{cases}.$$

$\dot{x} = |x|^{1/2}$  (infinité de solutions)

Remarque :  $|x|^\alpha$  non lipschitzienne pour  $0 < \alpha < 1$  (essayer  $x = 0$ )



 J.P. RICHARD  23

## Classification des EDO

$\dot{x} = f(x, t)$ Non linéaire, Non autonome	$\supset$	$\dot{x} = A(t)x + b(t)$ Linéaire, Non autonome
$\cup$		
$\dot{x} = f(x)$ Non linéaire, Autonome	$\supset$	$\dot{x} = Ax + b$ Linéaire, Autonome

« non autonome » = « non stationnaire »

Périodique si  $\exists T, f(x, t + T) = f(x, t), \forall x, \forall t.$

 J.P. RICHARD  24

## 2 Outils mathématiques pour EDO : flot

**Flot**  $\Phi_g^t$  associé à  $\frac{dx}{dt} = g(x)$ ,  $t \in \mathcal{T}$ ,  $x \in \mathcal{X}$  et  $g \in \mathcal{C}^\infty$   
 ( $g$  est analytique)

### Définition :

$$\Phi_g^t : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X},$$

$$x_0 \mapsto \phi(t; 0, x_0).$$

( $\phi(t; 0, x_0)$  = la solution)  
 (un point  $\mapsto$  un point sur la traj.)

**Exemple :**  $\frac{dx}{dt} = Ax$

$$\begin{cases} \Phi_A^t = e^{At}, \\ \Phi_A^t(x_0) = e^{At}x_0. \end{cases}$$

### Propriétés :

$x_0 \mapsto \Phi_g^t(x_0)$  est analytique ( $\mathcal{C}^\infty$ )

$$\Phi_g^t \circ \Phi_g^s = \Phi_g^{t+s},$$

$$\Phi_g^0 = Id.$$

$$\Phi_g^t(x_0) = \Phi_{-g}^{-t}(x_0),$$

$$\Phi_g^t \circ \Phi_g^{-t} = Id,$$

$$(\Phi_g^t)^{-1} = \Phi_g^{-t} = \Phi_{-g}^t.$$



J.P. RICHARD



## 2 Outils Mathématiques : flot, non commutativité

### Composition de flots : non commutativité

$$\Phi_{g_1}^t \circ \Phi_{g_2}^s \neq \Phi_{g_2}^s \circ \Phi_{g_1}^t$$

cas linéaire :  $e^{At}e^{Bs} \neq e^{Bs}e^{At}$  (sauf cas part.  $AB = BA$ )

$\Rightarrow$  on va définir le « commutateur » des flots, ou  
 crochet de Lie :  $[g_1, g_2]$   
 qui s'annule lorsqu'il y a commutativité.



J.P. RICHARD

26



## 2 Outils mathématiques : crochet de Lie\* (Lie bracket)

$$f : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}, \quad g : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}, \quad [f, g] : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$$

$$[f, g] = \frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g$$

pour s'en donner une idée...  $\frac{d}{dt} g(x) = \frac{\partial g}{\partial x} \dot{x}(t) = \frac{\partial g}{\partial x} f(x)$   
 $\frac{d}{dt} f(x) = \frac{\partial f}{\partial x} \dot{x}(t) = \frac{\partial f}{\partial x} g(x)$

On va voir que le crochet de Lie s'interprète par la différence de parcours infinitésimal, depuis  $x$  :

- 1- suivant la dynamique  $\dot{x} = f(x)$  puis  $\dot{x} = g(x)$
- 2- suivant la dynamique  $\dot{x} = g(x)$  puis  $\dot{x} = f(x)$



J.P. RICHARD

\* Sophus Lie, 1842-1899, Norvégien

27



## 2 Outils mathématiques : crochet de Lie (suite)

Une interprétation du crochet de Lie en termes de commande :

Système affine en la commande et « sans dérive » :  $\dot{x} = f(x) + g_1(x)u_1 + g_2(x)u_2$

$$\dot{x} = g_1 u_1 + g_2 u_2$$

$u_1, u_2 \in \mathbf{R}$

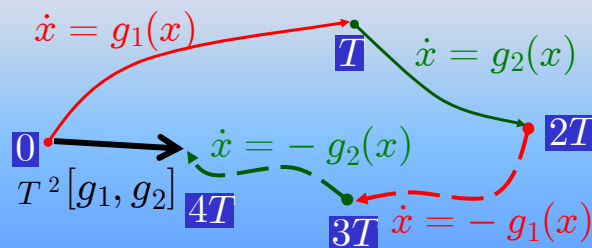
$$[g_1, g_2] = \frac{\partial g_2}{\partial x} g_1 - \frac{\partial g_1}{\partial x} g_2$$

Suite de commandes « aller-retour »

$$\left. \begin{array}{l} t \in [0, T[ \rightarrow u_1 = +1, \quad u_2 = 0 \\ t \in [T, 2T[ \rightarrow u_1 = 0, \quad u_2 = +1 \\ t \in [2T, 3T[ \rightarrow u_1 = -1, \quad u_2 = 0 \\ t \in [3T, 4T[ \rightarrow u_1 = 0, \quad u_2 = -1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} x(4T; 0, x_0) = \\ x_0 + T^2 [g_1, g_2](x_0) + o(T^3) \end{array}$$

$T \rightarrow 0$

proof?  
wait a mn!



J.P. RICHARD

28



2 Outils mathématiques : crochet de Lie (suite)

Cas particulier : système linéaire sans dérive  $\dot{x} = Ax + b_1u_1 + b_2u_2$

$$\dot{x} = g_1u_1 + g_2u_2$$

$$u_1, u_2 \in \mathbf{R}$$

$$[g_1, g_2] = \frac{\partial g_2}{\partial x} g_1 - \frac{\partial g_1}{\partial x} g_2$$

$$[g_1, g_2] = 0b_1 + 0b_2 = 0$$

$$\left. \begin{array}{l} \dot{x} = b_1u_1 + b_2u_2 \\ g_1 = b_1 \\ g_2 = b_2 \end{array} \right\} \forall T \quad x(4T; 0, x_0) = x_0$$

J.P. RICHARD

29

2 Outils mathématiques : crochet de Lie (suite)

$x_T = x_0 + T\dot{x}_0 + \frac{T^2}{2}\ddot{x}_0 + o(T^2) \quad \dot{x} = g_1(x)$

$x_T = x_0 + Tg_1(x_0) + \frac{T^2}{2}\frac{\partial g_1}{\partial x}g_1(x_0) + o(T^2) \quad \ddot{x} = \frac{d}{dt}g_1(x) = \frac{\partial g_1}{\partial x}\dot{x} = \frac{\partial g_1}{\partial x}g_1(x)$

---

$x_{2T} = x_T + Tg_2(x_T) + \frac{T^2}{2}\frac{\partial g_2}{\partial x}g_2(x_T) + o(T^2) \quad \dot{x} = g_2(x)$

$= x_0 + Tg_1(x_0) + \frac{T^2}{2}\frac{\partial g_1}{\partial x}g_1(x_0) + Tg_2(x_0) + T^2\frac{\partial g_2}{\partial x}g_1(x_0) + \frac{T^2}{2}\frac{\partial g_2}{\partial x}g_2(x_0) + o(T^2)$ 
 $x_{2T} = x_0 + T(g_1 + g_2) + \frac{T^2}{2}\frac{\partial g_1}{\partial x}g_1 + \frac{T^2}{2}\frac{\partial g_2}{\partial x}g_2 + T^2\frac{\partial g_2}{\partial x}g_1 + o(T^2)$

---

$x_{3T} = x_{2T} - Tg_1(x_{2T}) + \frac{T^2}{2}\frac{\partial g_1}{\partial x}g_1(x_{2T}) + o(T^2) \quad \dot{x} = -g_1(x)$

$= x_0 + T(\cancel{g_1} + g_2) + \frac{T^2}{2}\frac{\partial g_1}{\partial x}\cancel{g_1} + \frac{T^2}{2}\frac{\partial g_2}{\partial x}g_2 + T^2\frac{\partial g_2}{\partial x}g_1 - T\cancel{g_1} - T^2\frac{\partial g_1}{\partial x}(\cancel{g_1} + g_2) + \frac{T^2}{2}\frac{\partial g_1}{\partial x}g_1$ 
 $= x_0 + Tg_2 + \frac{T^2}{2}\frac{\partial g_2}{\partial x}g_2 + T^2\frac{\partial g_2}{\partial x}g_1 - T^2\frac{\partial g_1}{\partial x}g_2 + o(T^2) \quad + o(T^2)$

---

$x_{4T} = x_{3T} - Tg_2(x_{3T}) + \frac{T^2}{2}\frac{\partial g_2}{\partial x}g_2(x_{3T}) + o(T^2) \quad \dot{x} = -g_2(x)$

$= x_0 + T\cancel{g_2} + \frac{T^2}{2}\frac{\partial g_2}{\partial x}\cancel{g_2} + T^2\frac{\partial g_2}{\partial x}g_1 - T^2\frac{\partial g_1}{\partial x}g_2 - T\cancel{g_2} - T^2\frac{\partial g_2}{\partial x}\cancel{g_2} + \frac{T^2}{2}\frac{\partial g_2}{\partial x}g_2 + o(T^2)$

proof? do it yourself! ⇒

$$x_{4T} = x_0 + T^2\left(\frac{\partial g_2}{\partial x}g_1 - \frac{\partial g_1}{\partial x}g_2\right) + o(T^2) \quad \text{CQFD}$$

2 Outils mathématiques : crochet de Lie (suite)

Propriétés de  $[f, g] = \frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g$

1. **Bilinéaire sur IR :**  $[\alpha_1 f_1 + f_2, g] = \alpha_1 [f_1, g] + [f_2, g]$   
 $[f, \alpha_1 g_1 + g_2] = \alpha_1 [f, g_1] + [f, g_2]$
2. **Anticommutative :**  $[f, g] = -[g, f]$
3. **Identité de Jacobi :**  $[f, [g, h]] + [h, [f, g]] + [g, [h, f]] = 0$
4. **Application aux flots :**  $\forall t, \forall s, \Phi_{g_1}^t \circ \Phi_{g_2}^s = \Phi_{g_2}^s \circ \Phi_{g_1}^t$   
 $\Leftrightarrow [g_1, g_2] = 0$

Remarque :  $\mathcal{C}^\infty$ , muni des opérations  $+$  et  $[\cdot, \cdot]$ , forme un anneau (anticommutatif) et une  $\mathbb{R}$ -algèbre (espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$  muni d'une multiplication bilinéaire).



J.P. RICHARD

31



2 Outils mathématiques : crochet de Lie (suite)

Juste pour l'exemple...  $[f, g] = \frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} u.$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_2^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$[f, g] = \begin{pmatrix} -2x_2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad [[f, g], g] = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$



J.P. RICHARD

32





2 Outils mathématiques : crochet de Lie (suite)

Encore un p'tit, pour la route ?  $[f, g] = \frac{\partial g}{\partial x} f - \frac{\partial f}{\partial x} g$

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} a_1 x_2 x_3 \\ a_2 x_1 x_3 \\ a_3 x_1 x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 0 \end{pmatrix} u = f(x) + g(x)u \quad (u \in \mathbf{R})$$

$$[f, g] = - \begin{pmatrix} a_1 b_2 x_3 \\ a_2 b_1 x_3 \\ a_3 (b_1 x_2 + b_2 x_1) \end{pmatrix}, \quad [[f, g], g] = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2a_3 b_1 b_2 \end{pmatrix} \triangleq g_1$$

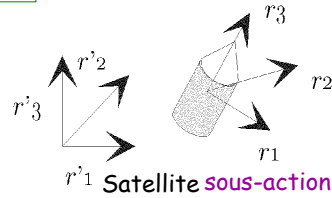
$$(H) : a_1 b_2^2 \neq a_2 b_1^2 \quad [[f, g_1], g] = \begin{pmatrix} 2a_1 a_3 b_1 b_2^2 \\ 2a_2 a_3 b_1^2 b_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \det \{g, g_1, [[f, g_1], g]\} \neq 0 \Rightarrow \exists u(t) \dots$$

$$\begin{cases} j_1 \dot{\omega}_1(t) = \omega_3 \omega_2 (j_2 - j_3) + u_1 \\ j_2 \dot{\omega}_2(t) = \omega_1 \omega_3 (j_3 - j_1) + u_2 \\ j_3 \dot{\omega}_3(t) = \omega_2 \omega_1 (j_1 - j_2) + u_3 \end{cases}$$

$\omega$  : vitesses angulaires,

$J = \text{diag}(j_1, j_2, j_3)$  : matrice d'inertie.



J.P. RICHARD

33

Remarque sur  $(H) : a_1 b_2^2 \neq a_2 b_1^2$

$$[(j_2 - j_3)j_1^{-1}]j_2^{-2} = [(j_3 - j_1)j_2^{-1}]j_1^{-2}$$

$$(j_2 - j_3)j_2^{-1} = (j_3 - j_1)j_1^{-1}$$

$$(j_2 - j_3)j_1 = (j_3 - j_1)j_2$$

$$2j_1 j_2 = j_3 (j_1 + j_2)$$

$$2j_3^{-1} \neq j_1^{-1} + j_2^{-1}$$

Pour que la commande soit « reconfigurable »  
 quel que soit l'actionneur en panne, il faudrait et suffirait que :

$$j_1 \neq j_2 \neq j_3$$



J.P. RICHARD

34



### 3 Stabilité

Définition : soit le système  $\dot{x} = f(x, t)$ ,  $x \in R^n$

Un **point d'équilibre**  $x_e$   $\{\forall t, f(x_e, t) = 0\}$

est **stable** si  $\forall \varepsilon > 0, \forall t_0, \exists \delta(\varepsilon, t_0),$

$$\|x_0 - x_e\| \leq \delta \Rightarrow \|\phi(t; t_0, x_0) - x_e\| \leq \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$$

Il est (globalement) **attractif** si  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t; t_0, x_0) = x_e$

et (globalement) **asymptotiquement stable**

s'il est stable **et** attractif



J.P. RICHARD

35



### 3 Stabilité (définitions, suite)

Définition (suite) :

Le point d'équilibre  $x_e$   $\{\forall t, f(x_e, t) = 0\}$

est **localement attractif** si

$$\forall x_0 \in \mathcal{D}_a \quad (\mathcal{D}_a \text{ voisinage de } x_e) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t; t_0, x_0) = x_e$$

**exponentiellement stable** (localement si  $\rho < +\infty$ ) si

$$\exists \rho, \alpha, \beta > 0, \|x_0 - x_e\| < \rho \Rightarrow$$

$$\|\phi(t; t_0, x_0) - x_e\| \leq e^{-\alpha(t-t_0)} \beta \|x_0 - x_e\|$$



J.P. RICHARD

36



3 Stabilité (définitions, suite)

Définition (suite) :

L'ensemble  $\mathcal{A}$  est (localement) attractif si

$$\forall x_0 \in \mathcal{D}_a \quad (\mathcal{D}_a \text{ voisinage de } \mathcal{A}) \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} d(\phi(t; t_0, x_0), \mathcal{A}) = 0$$


exponentiellement stable (localement) si ... etc.

positivement invariant si


$$\forall x_0 \in \mathcal{A}, \quad \phi(t; t_0, x_0) \in \mathcal{A} \quad \forall t \geq t_0$$

stable si  $\forall \varepsilon > 0, \forall t_0, \exists \delta(\varepsilon, t_0),$   
 $d(x_0, \mathcal{A}) < \delta \Rightarrow d(\phi(t; t_0, x_0), \mathcal{A}) < \varepsilon \quad \forall t \geq t_0$

NB :  $d(x_0, \mathcal{A})$  est la distance d'un point à un ensemble (min des distances)



J.P. RICHARD

37 

3 Stabilité (définitions, suite)

attractif


$\Rightarrow$   
?  
 $\Leftarrow$   
-

stable


$$\begin{cases} \dot{x} = -y, \\ \dot{y} = +x. \end{cases}$$

$$\dot{z} = 0.$$

*trop facile...*



J.P. RICHARD

38 

### 3 Stabilité (définitions, suite)

attractif

stable

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 - \sqrt{x^2 + y^2}) - \frac{1}{2}y(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}), \\ \dot{y} = \frac{1}{2}x(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}) + y(1 - \sqrt{x^2 + y^2}). \end{cases}$$

(simu)

(CI auto)

... et sans simulation ?  
 → étudier :

typo poly

$$v(x) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2),$$

$$\frac{d}{dt}v(x(t)) = ?$$

J.P. RICHARD

### 3 Stabilité (définitions, suite)

Exemple 1 :

Équation de Lotka-Volterra  $\begin{cases} dx/dt = x - xy \\ dy/dt = -y + xy \end{cases}$

Exemple 2 :

Équation... de l'herbe ?  $dx/dt = x(1 - x)$

J.P. RICHARD

40

3 Stabilité (définitions, suite)

**Exemple 3 :**

Équation de Van der Pol

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 2\mu x_2 - x_2^3. \end{cases}$$

$(\mu > 0)$

**0** est instable, non attractif,

**A** est globalement asympt. stable,

**$\partial A$**  est localement asympt. stable.

41

3 Stabilité (définitions, suite)

**Définition (suite) : stabilité absolue**

$$(1) \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx, \\ u = \Phi(y, t). \end{cases}$$

$$\mathcal{F} = \{ \Phi : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m, (u - K_1 y)^\top (u - K_2 y) < 0 \}$$

**Définition**

Le système (1) est **absolument stable** si, pour tout gain  $\Phi$  de la famille  $\mathcal{F}$ , l'équilibre  $x = 0$  est globalement asymptotiquement stable.

42

### 3 Stabilité (définitions, suite)

**Définition (suite) : stabilité BIBO** (bounded input, bounded output)

$$(2) \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x) \end{cases}$$

**Définition** Le système (2) est **BIBO-stable** si, pour toute entrée  $u$  bornée, la sortie  $y$  reste bornée :  $\|u(t)\| < \infty \forall t \Rightarrow \forall t, \|y(t)\| < \infty$ .

**Cas linéaire :**

$$(3) \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx \end{cases}$$

Pour  $A, B, C$  des matrices constantes bornées, si le spectre de  $A$  est dans le demi-plan  $\text{Re}(\lambda) < 0$ , alors le système (3) est BIBO stable.

Autrement dit : en linéaire, si  $y$  converge vers 0 pour  $u = 0$ , alors BIBO OK.  
 → Question : est-ce général ? Réponse : ...

J.P. RICHARD

43

### 3 Stabilité (définitions, suite)

stabilité BIBO (suite)

$$(2) \begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = h(x) \end{cases}$$

**Et en non linéaire ? Pas toujours !** Exemple : (E. Sontag)

$$(4) \begin{cases} \dot{x} = -x + (1 + 2x^2)u \\ y = x \\ u = \frac{1}{\sqrt{2t+2}} \\ x(0) = \sqrt{2} \end{cases}$$

}

$$x(t) = \sqrt{2t+2}$$

Donc ici :  $y$  converge vers 0 pour  $u = 0$ , mais pas BIBO pour autant...  
 (ici,  $u$  tend même vers 0 quand  $t$  augmente)

J.P. RICHARD


44

## Stabilité - rappel en linéaire : Systèmes en temps continu


$$\dot{x} = Ax + b$$

$\Rightarrow \det A \neq 0 \Rightarrow \exists! x_e, \quad x_e = -A^{-1}b$

$\Rightarrow \det A = 0 \Rightarrow \begin{cases} \exists x_e \text{ si } b \neq Ac, \quad c \in \mathbf{R}^n \\ \exists \infty x_e \text{ si } b = Ac, \quad c \in \mathbf{R}^n \\ x_e - c \in \mathcal{E}_\nu \text{ } A|_{\lambda=0} \end{cases}$



J.P. RICHARD

45 

### 3. Stabilité (linéaire continu, suite)

$\text{Re} \{ \text{v.p.}(A) \} < 0$

$\det(sI - A)$   
vérifie Routh-Hurwitz

$-A^*$  vérifie Kotelianski  
 $\mathcal{M}_{i=1 \dots n}(-A) > 0$

$x = 0$   
*asympt. stable pour*  
 $\dot{x} = Ax$


$a_{11} < 0, \begin{vmatrix} a_{11} & |a_{12}| \\ |a_{21}| & a_{22} \end{vmatrix} > 0, \dots$

$\exists B = B^T > 0, \exists C = C^T > 0, A^T B + B A = -C$   
 (éq. Lyapunov cont.)


$\text{Max} \left\{ \sum_{\text{ligne}} a_{ij}^* \right\} < 0$

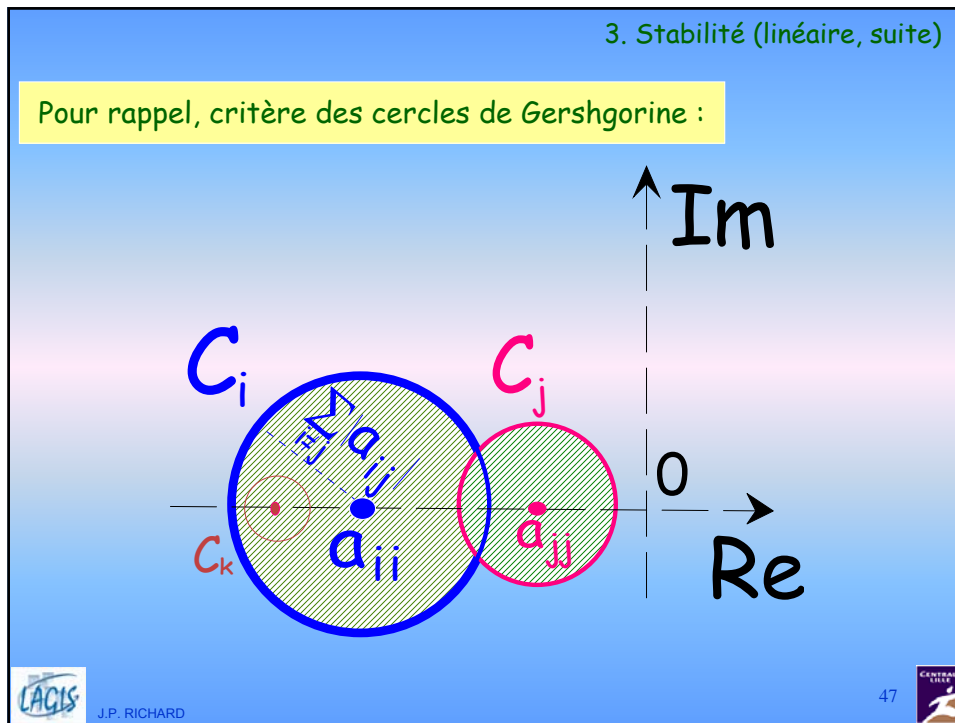
$\text{Max} \left\{ \sum_{\text{colonne}} a_{ij}^* \right\} < 0$

$A^* = \begin{bmatrix} a_{ii} & |a_{ij}| \\ |a_{ji}| & a_{jj} \end{bmatrix} = \{a_{ij}^*\}$



J.P. RICHARD

46 



**Stabilité - rappel en linéaire :**  
**Systemes en temps discret**

$$x_{k+1} = Ax_k + b$$

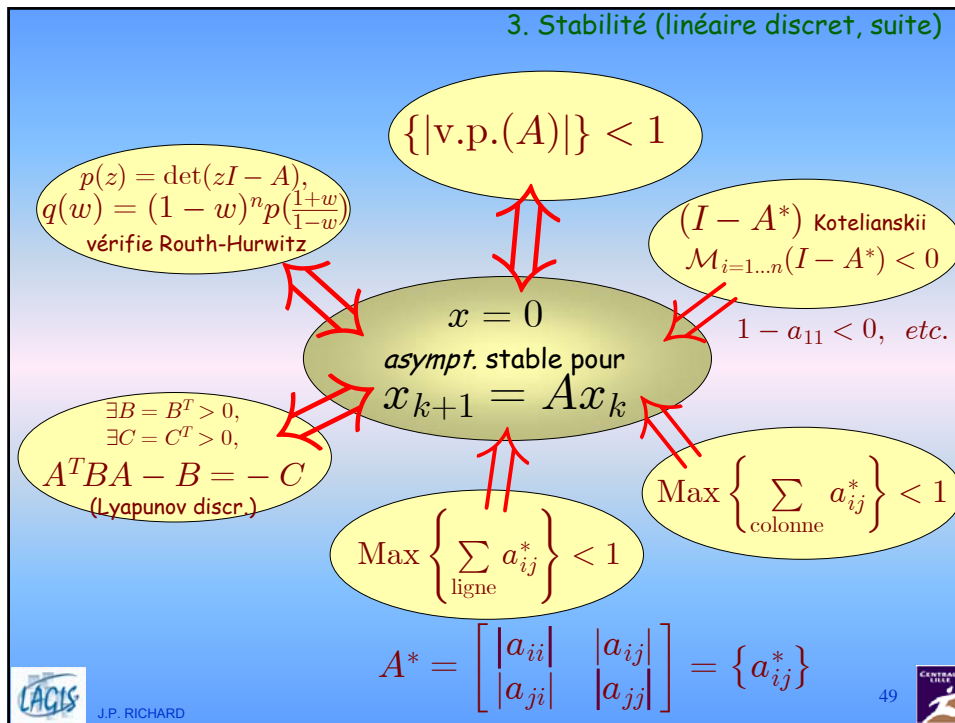
⇒  $\det(I - A) \neq 0 \Rightarrow \exists! x_e, x_e = (I - A)^{-1}b$

⇒  $\det(I - A) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \exists x_e & \text{si } b \neq (I - A)c, c \in \mathbf{R}^n \\ \exists \infty x_e & \text{si } b = (I - A)c, c \in \mathbf{R}^n \\ & x_e - c \in \mathcal{E}_{\mathcal{V} A[\lambda=1]} \end{cases}$

LACIS J.P. RICHARD

48





3. Stabilité : problème en NL

### Stabilité en NL : mais pourquoi tant de théorie ?

- 1) La résolution ?  
 $\dot{x} = f(x, t, u(t)), \quad x \in R^n, \quad u \in R^m.$
- 2) La simulation ?  
 $\dot{x} = f(x), \quad \underline{A} x \leq f(x) \leq \bar{A} x$
- 3) La linéarisation ?  
 $\dot{x} = A(x)x, \quad A(x) \text{ Hurwitz } \forall x \in R^n \Rightarrow ?$

LACIS J.P. RICHARD 50 CENTRALE LILLE

### 3. Stabilité : problème en NL (suite)

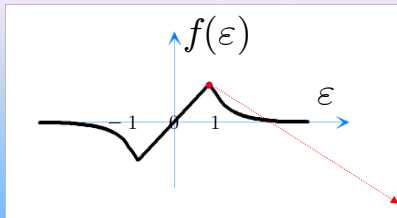
#### Conjecture d'Aizerman

$$\dot{x} = A(x)x, \quad A(x) \text{ Hurwitz } \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow? x_e = 0 \text{ asympt. stable?}$$

#### Contre-exemple (Pliss, 1956)

$$\ddot{y} + f(\dot{y} + y) = 0, \quad \begin{cases} f(\varepsilon) = \frac{\varepsilon}{e(e+1)} & \text{si } |\varepsilon| \leq 1, \\ f(\varepsilon) = \frac{e^{-\varepsilon}}{1+e^\varepsilon} & \text{si } \varepsilon \geq 1. \end{cases}$$



$$\ddot{y} + \frac{e^{-y-\dot{y}}}{1+e^{y+\dot{y}}} = 0$$

$$\dot{y} = e^{-y-\dot{y}} \Rightarrow \dot{y} \geq 0$$

● diverge alors que Routh vérifié  $\forall (y, \dot{y})$



J.P. RICHARD

51



### Stabilité : méthodes d'étude

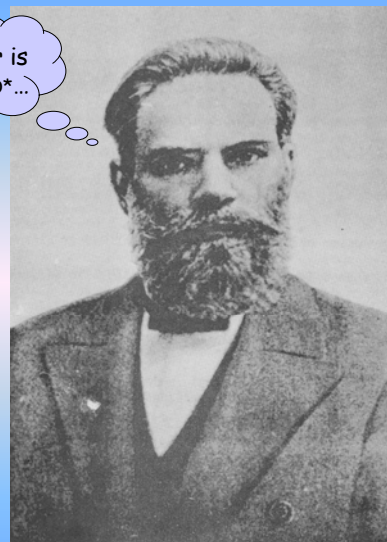
nonlinear is  
 kharacho\*...

Alexander Mikhaïlovich

- 1ère méthode de Lyapunov
- Équivalences linéaires locales
- 2ème méthode de Lyapunov
- Méthodes de comparaison

Mathématicien et physicien russe, membre de l'Académie des sciences. Après des études à l'université de Saint-Petersbourg, il est assistant puis professeur à l'université de Kharkov. En 1902, il est nommé professeur à l'université de Saint-Petersbourg. Élève de P. L. Tchebychev, il élabore dans sa thèse (1892) une méthode générale pour la solution des problèmes de stabilité. Avant lui, les problèmes de stabilité étaient habituellement résolus en linéarisant les équations différentielles et en négligeant tout ce qui était d'ordre supérieur.

\* *Le non-linéaire, c'est wonderful...*



A. M. LYAPUNOV

1857 - 1918



J.P. RICHARD

52



### 3. Stabilité : 1ère méthode de Lyapunov

$$\dot{x} = f(x), \quad f(0) = 0$$

$$\rightarrow \dot{x} = A_0 x + q(x) \quad (\text{NL})$$

$$A_0 = \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]_{x=0} \quad (\text{jacobienne en } 0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{q^T q}{x^T x} = 0 \quad (q(x) \text{ négligeable en } 0)$$

$$\dot{z} = A_0 z \quad (\text{L})$$

(linéarisé en 0)

1er Théorème de Lyapunov :

$z = 0$  As. Stable pour (L)  $\Rightarrow$   $x = 0$  As. Stable pour (NL)

$z = 0$  Instable pour (L)  $\Rightarrow$   $x = 0$  Instable pour (NL)



J.P. RICHARD

53



### 3. Stabilité (1ère m.L., suite)

#### Exemple

$$\begin{cases} \dot{x} = x(x - 1) \\ x(t = 0) = x_0 \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 1, \quad \begin{cases} x_{e0} = 0, & A_0 = -1, & \text{as. stable} \\ x_{e01} = 1, & A_1 = +1, & \text{instable} \end{cases}$$

$$x = \frac{x_0}{x_0 - (x_0 - 1)e^t} \quad \Rightarrow \quad \exists ? t > 0, \quad e^t = \frac{x_0}{x_0 - 1} ?$$

si oui, explosion...



J.P. RICHARD

54





3. Stabilité (1ère m.L., suite)

## Limites de la 1ère m. L ?

1) Cas critique ( $A$  juste stable) non considéré  
2) Aspect qualitatif seul : sert à «trier» les pts d'équilibre

↓

1) Théorèmes d'équivalence locale  
2) 2nde méthode de Lyapunov

J.P. RICHARD55 

## 3. Stabilité : équivalence locale à un champ linéaire



Soit  $A \in \mathbf{R}^{n \times n}$   $\sigma(A)$  son spectre, décomposé en :

- $\sigma_s(A) = \{\lambda \in \sigma(A) : \operatorname{Re}(\lambda) < 0\}$  « asympt. stable »
- $\sigma_c(A) = \{\lambda \in \sigma(A) : \operatorname{Re}(\lambda) = 0\}$  « centre »
- $\sigma_i(A) = \{\lambda \in \sigma(A) : \operatorname{Re}(\lambda) > 0\}$  « instable »

**Définition :**  $A$  est *asymptotiquement stable* ssi  $\sigma_i(A) = \sigma_c(A) = \emptyset$ .  
 $A$  est *hyperbolique* ssi  $\sigma_c(A) = \emptyset$ .  
L'équilibre  $x_e$  de  $\dot{x} = f(x)$  est *hyperbolique* ssi la jacobienne  $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_e}$  l'est.  
Un équilibre non hyperbolique est dit *dégénéré*.

### Exemple 1

$\dot{x} = x(x - 1) \Rightarrow x_e = 0$  et  $x_e = 1$  sont hyperboliques.

J.P. RICHARD56 

### 3. Stabilité : équivalence locale à un champ linéaire

Soit  $A \in \mathbf{R}^n$ ,  $\sigma(A)$  son spectre, décomposé en :

- $\sigma_s(A) = \{\lambda \in \sigma(A) : \text{Re}(\lambda) < 0\}$  « asympt. stable »
- $\sigma_c(A) = \{\lambda \in \sigma(A) : \text{Re}(\lambda) = 0\}$  « centre »
- $\sigma_i(A) = \{\lambda \in \sigma(A) : \text{Re}(\lambda) > 0\}$  « instable »

**Définition :**  $A$  est asymptotiquement stable ssi  $\sigma_i(A) = \sigma_c(A) = \emptyset$ .  
 $A$  est hyperbolique ssi  $\sigma_c(A) = \emptyset$ .  
 L'équilibre  $x_e$  de  $\dot{x} = f(x)$  est hyperbolique ssi la jacobienne  $\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x_e}$  l'est.  
 Un équilibre non hyperbolique est dit dégénéré.

**Exemple 2**

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x}_1 = x_1 x_2 \\ \dot{x}_2 = x_1(x_2 - 1) \end{array} \right\} \rightarrow \text{Seuls équilibres : } x_e = (0, \alpha)^T$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{pmatrix} x_2 & x_1 \\ x_2 - 1 & x_1 \end{pmatrix} \rightarrow x_e = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \alpha - 1 & 0 \end{pmatrix}$$

non hyperboliques  $\forall \alpha$ ,  
instables pour  $\alpha \geq 0$ .

57

### Structure d'un flot en linéaire

### 3. Stabilité (équiv. locale, suite)

$\Rightarrow A \in \mathbf{R}^n$ ,  $\sigma(A) \begin{cases} \sigma_s(A) = \{\lambda \in \sigma(A) : \text{Re}(\lambda) < 0\} \\ \sigma_c(A) = \{\lambda \in \sigma(A) : \text{Re}(\lambda) = 0\} \\ \sigma_i(A) = \{\lambda \in \sigma(A) : \text{Re}(\lambda) > 0\} \end{cases}$

L'espace  $\mathbf{R}^n$  est alors décomposé en 3 sous-espaces :

$$\mathbf{R}^n = \mathbf{E}_s(A) \oplus \mathbf{E}_c(A) \oplus \mathbf{E}_i(A)$$

engendré par vect. pps associés à  $\sigma_s(A)$   $\sigma_c(A)$   $\sigma_i(A)$   
 et de dimensions  $n_s$   $n_c$   $n_i$   $n = n_s + n_c + n_i$

58

**Structure d'un flot en NON linéaire** 3. Stabilité (équiv. locale, suite)

**Définitions :** variétés stable / instable locales d'un point singulier  $x = 0 \in \mathcal{U}$   
 (vis-à-vis d'un voisinage  $\mathcal{U} \subset \mathbb{R}^n$ )

**Variété stable locale :**  
 $W_s^{loc}(0) = \{x_0 \in \mathcal{U} : \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t; x_0) = 0 \text{ et } x(t; x_0) \in \mathcal{U} \forall t \geq 0\}$

**Variété instable locale :**  
 $W_i^{loc}(0) = \{x_0 \in \mathcal{U} : \lim_{t \rightarrow +\infty} x(-t; x_0) = 0 \text{ et } x(-t; x_0) \in \mathcal{U} \forall t \geq 0\}$

LACIS J.P. RICHARD 59

**Structure d'un flot en NON linéaire** 3. Stabilité (équiv. locale, suite)

**Théorème 1 : (cas hyperbolique) (1964)**

*de Hartman-Grobman :* si  $x = 0$  est un point singulier hyperbolique de  $f$ , alors il existe un homéomorphisme  $h$  d'un voisinage  $\mathcal{U}$  de  $0$  dans  $\mathcal{U}$  qui transforme chaque trajectoire de  $\dot{x} = f(x)$  en une orbite de son linéarisé tangent  $\dot{z} = Az$  en respectant le sens de parcours (on dit alors que  $f$  est topologiquement équivalente à  $A$ ) :

$$\begin{cases} x(t; x_0) = h(e^{At} z_0), \\ z_0 = h^{-1}(x_0), \quad \tau(t) \text{ fonction croissante.} \end{cases}$$

$(h^{-1} = \text{« redressement » de trajectoires})$

LACIS J.P. RICHARD 60

**Structure d'un flot en NON linéaire** 3. Stabilité (équiv. locale, suite)

**Théorème 2 : (cas hyperbolique)**

*de Hadamard-Perron (ou « de la variété stable ») :*  
 sous les hypothèses précédentes (hyperbolicité), il existe des variétés stable et instable locales de  $f$  en  $0$ , de même dimension que celles du linéarisé :

$$\dim W_s^{loc}(0) = \dim E_s = n_s ,$$

$$\dim W_i^{loc}(0) = \dim E_i = n_i .$$

Ces variétés sont *tangentes* à l'origine  $x = 0$  et ont même régularité que  $f$  (si  $f \in C^\infty$ , les variétés  $W^{loc}$  sont continûment différentiables).

LACIS J.P. RICHARD 61

**Structure d'un flot en NON linéaire** 3. Stabilité (équiv. locale, suite)

**Théorème 3 : (cas non hyperbolique)**

*de Kalley (ou « de la variété centre ») : (1967)*  
 Si  $f$  est de classe  $C^r_{(\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n)}$  et admet  $0$  comme point singulier, alors il existe :

- $W_s^{loc}(0)$  et  $W_i^{loc}(0)$  variétés (st/inst) invariantes de classe  $C^r$ , tangentes à  $E_s(A)$  et  $E_i(A)$  en  $x = 0$ , définies de façon unique.
- $W_c^{loc}(0)$  variété centre invariante, de classe  $C^{r-1}$ , tangente à  $E_c(A)$  en  $x = 0$ , définie de façon non nécessairement unique.

**Théorème 4 : (toujours le cas non hyperbolique)**

*de Henry et Carr (réduction à la variété centre) : (1981) SI Wi vide*  
 Si  $W_c^{loc}(0) \neq \emptyset$ , la stabilité asymptotique de  $x = 0$  pour le système obtenu par projection de  $\dot{x} = f(x)$  sur la variété centre  $W_c^{loc}(0)$  implique la stabilité asymptotique de  $x = 0$  pour  $\dot{x} = f(x)$ .

LACIS J.P. RICHARD 62

**Exemple** 3. Stabilité (équiv. locale, suite)

(E)  $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_1 x_2 \end{cases} \Rightarrow$  Linéarisé :  $\dot{z} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} z$  pas de conclusion par la 1ère M.L.

$E_s = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbf{R} \right\}$   $E_c = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}, b \in \mathbf{R} \right\}$



**Variété centre :**  $W_c^{loc}(0) = \{x, x_1 = g(x_2)\} \rightarrow$  trouver  $g$  ?  
 $\Rightarrow$  développement en série de Taylor :  $g(x_2) = g_0 + g_1 x_2 + g_2 x_2^2 + g_3 x_2^3 + \dots$

$\Rightarrow 0 \in W_c(0) \Rightarrow g_0 = 0$

$\Rightarrow W_c(0)$  tangente à  $E_c$  en  $x = 0$  :  $x = \begin{pmatrix} g(x_2) \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + o(x_2) \\ b + o(x_2) \end{pmatrix} \Rightarrow g_1 = 0$

$\Rightarrow W_c(0)$  invariante par (E) :  $\frac{d}{dt}(x_1 - g(x_2)) = 0 = \dot{x}_1 - \frac{\partial g}{\partial x_2} \dot{x}_2$   
 $\Rightarrow 0 = -x_1 - x_2^2 - \frac{\partial g}{\partial x_2} x_1 x_2$   
 $= -x_1 - x_2^2 - (2g_2 x_2 + 3g_3 x_2^2 + \dots) x_1 x_2$

identif. puissances de  $x_2 \Rightarrow g_2 = -1, g_3 = 0, \dots$

 J.P. RICHARD 63 

**Exemple (suite)** 3. Stabilité (équiv. locale, suite)



(E)  $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - x_2^2 \\ \dot{x}_2 = x_1 x_2 \end{cases} \Rightarrow$  Linéarisé :  $\dot{z} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} z$  pas de conclusion par la 1ère M.L.

$E_s = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, a \in \mathbf{R} \right\}$   $E_c = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}, b \in \mathbf{R} \right\}$

**Variété centre :**  $W_c^{loc}(0) = \{x, x_1 = g(x_2)\}$   
 $\Rightarrow g(x_2) = -x_2^2 + 0x_2^3 + o(x_2^3)$

**Dynamique «réduite» à la variété centre :**  $\dot{x}_2 = x_2 g(x_2) = -x_2^3 + o(x_2^4)$   
 or  $\dot{x}_2 = -x_2^3$  converge asymptotiquement en  $\frac{1}{\sqrt{t}}$   
 $x_2(t) = (x_{20}^{-2} + 2t)^{-\frac{1}{2}}$

$\Rightarrow x = 0$  asymptotiquement stable (non exponentiellement)

 J.P. RICHARD 64 



### Exemple (interprétation)

### 3. Stabilité (équiv. locale, suite)

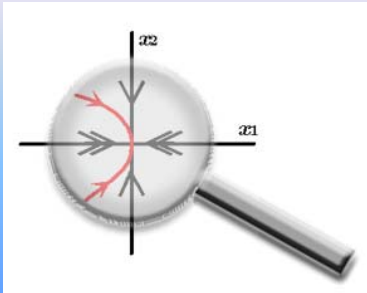
(E)  $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 - x_2^2, \\ \dot{x}_2 = x_1 x_2. \end{cases}$        $\dot{z} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} z$

Linéarisé, variété centre, système réduit...

**Mais, que diable, n'aurait-on pas pu faire plus simple ?**

$x_1$  converge exponentiellement ( $\dot{x}_1 = -x_1 + \dots$ )  
 $x_2$  n'a pas de terme du 1er ordre dans son linéarisé  
 donc  $x_1$  converge bien plus vite que  $x_2$ . Ensuite,  $\dot{x}_1 = 0$  pendant que  $x_2$  évolue.  
 On prend donc  $\dot{x}_1 = 0$  et on obtient :  $x_1 = -x_2^2 \Rightarrow \dot{x}_2 = -x_2^3$

asymptotiquement stable  
 (non exponentiellement)



« Ceci est une loupe » (R. Magritte)

LACIS J.P. RICHARD 65 CENTRALE LILLE

## 3. Stabilité :


### 2ème méthode de Lyapunov (« méthode directe »)

**Problème**

Étudier la convergence de  
 $\dot{x} = f(x), \quad x(0) = x_0$   
 sans résoudre cette équation ?

**idée... de génie**

Utiliser une « distance » de  $x(t)$  à l'équilibre  $x_e$ ,  
 pour se ramener à un système scalaire plus simple (syst. de comparaison).



Par exemple, si  $x_e = 0$ , soit  $v(x)$  une fonction vérifiant :

$$\begin{cases} v(x) > 0 & \forall x \neq 0, \\ v(0) = 0 \\ \frac{d}{dt} v(x(t)) < 0 & \forall t \text{ et } \forall x \neq 0, \end{cases}$$

alors  $v(x(t))$  décroît vers 0, et  $x(t)$  aussi.

LACIS J.P. RICHARD 66 CENTRALE LILLE

Principe des « fonctions de Lyapunov » 3. Stabilité (2ème M.L., suite)

$$\dot{x} = f(x, t), \quad v(x) > 0,$$

$$\dot{v} = \frac{dv(x(t))}{dt} = \frac{\partial v}{\partial x} \frac{dx}{dt}$$

$$= \frac{\partial v}{\partial x} f(x, t).$$

inconnu  $\Rightarrow \forall x \in \mathcal{D}...$

$$\dot{v} = \underbrace{[\text{grad } v(x)]^T}_{\text{connu}} \underbrace{f(x, t)}_{\text{connu}} < 0 ?$$

LACIS J.P. RICHARD 67 CENTRALE LILLE

Principe des « fonctions de Lyapunov » 3. Stabilité (2ème M.L., suite)

Interprétation de  $\dot{v} = [\text{grad } v(x)]^T f(x, t) < 0 ?$

LACIS J.P. RICHARD 68 CENTRALE LILLE

### 3. Stabilité : Théorèmes

#### Notations

$(h_0 > 0)$

$$\mathcal{V}_{h_0} = \{x \in \mathbf{R}^n, \|x\| < h_0\} \quad \overline{\mathcal{V}}_{h_0} = \dots \leq \dots$$

$$\mathcal{V}_{h_0, t_0} = \{(x, t) \in \mathbf{R}^{n+1}, \|x\| < h_0, t \geq t_0\} \quad \overline{\mathcal{V}}_{h_0, t_0} = \dots \leq \dots$$

#### Définitions

**Dérivée à droite** (au sens de Dini) :

$$D^+(v(x(t))) = \limsup_{\varepsilon \searrow 0^+} \frac{v(x(t+\varepsilon; t_0, x_0)) - v(x(t; t_0, x_0))}{\varepsilon} \quad (\text{sera aussi notée } \dot{v})$$

Soit  $v \in C^0(\mathcal{V}_{h_0})$ , avec  $\frac{\partial v}{\partial x}$  continue p.p., à sauts bornés.

$v(x)$  **définie positive** :  $v(x) > 0 \quad \forall x \in \mathcal{V}_{h_0} - \{0\}, \quad v(0) = 0.$

$v(x)$  **semi-définie positive** :  $v(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{V}_{h_0}, \quad v(0) = 0.$

« définie négative »  
 ... c'est pareil dans l'autre sens.

Soit  $w \in C^0(\mathcal{V}_{h_0, t_0})$ , avec  $\frac{\partial w}{\partial x}$  continue p.p., à sauts bornés.

$w(x, t)$  **déf. pos.** :  $\exists v(x)$  déf. pos.,  $w(x, t) \geq v(x), \quad w(0, t) = 0 \quad \forall t \geq t_0.$

$w(x, t)$  **semi-déf. pos.** :  $w(x, t) \geq 0 \quad \forall (x, t) \in \mathcal{V}_{h_0, t_0}, \quad w(0, t) = 0 \quad \forall t \geq t_0.$



J.P. RICHARD

69



$$(S) \begin{cases} \dot{x} = f(x, t), \\ 0 = f(0, t) \quad \forall t. \end{cases}$$

#### 3. Stabilité simple : Théorème

**Théorème : stabilité simple** (Lyapunov, 1892)

L'équilibre  $x = 0$  du système (S) est stable s'il existe une fonction  $v(x, t)$  définie positive dont la dérivée  $\dot{v}(x, t)$  (à droite le cas échéant) le long des traj. (S) soit semi-définie négative.

Démonstration ?

$$v(x(t), t) = v(x(t_0), t_0) + \underbrace{\int_{t_0}^t \dot{v}(x(\theta), \theta) d\theta}_{\leq 0} \leq v(x(t_0), t_0)$$



J.P. RICHARD

70



$$(S) \begin{cases} \dot{x} = f(x, t), \\ 0 = f(0, t) \quad \forall t. \end{cases}$$


**3. Stabilité asymptotique : Théorème**

**Théorème : stabilité asymptotique** (Lyapunov, 1892)  
 L'équilibre  $x = 0$  du système (S) est asymptotiquement stable s'il existe une fonction  $v(x, t)$  définie positive dont la dérivée  $\dot{v}(x, t)$  (à droite le cas échéant) le long des traj. (S) soit définie négative.

**Démonstration ?**


$$\begin{cases} t > t_0, \\ x(t) \neq 0, \end{cases} \Rightarrow v(x(t), t) = v(x(t_0), t_0) + \underbrace{\int_{t_0}^t \dot{v}(x(\theta), \theta) d\theta}_{\leq \int_{t_0}^t w(x(\theta)) d\theta} < v(x(t_0), t_0) < 0$$

$\Rightarrow v(x(t))$  positive, décroissante, ne peut «s'arrêter» ( $\dot{v}(x(t)) = 0$ ) qu'en  $x = 0$ .



J.P. RICHARD

71



$$(S) \begin{cases} \dot{x} = f(x, t), \\ 0 = f(0, t) \quad \forall t. \end{cases}$$

**3. Stabilité asymptotique globale : Théorème**

**Théorème : stabilité asymptotique globale** (Krasovskii, 1954)  
 L'équilibre  $x = 0$  du système (S) est globalement asymptotiquement stable s'il existe une fonction  $v(x, t)$  définie positive, non bornée en rayon, décroissante, dont la dérivée  $\dot{v}(x, t)$  (à droite le cas échéant) le long de (S) soit définie négative.

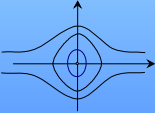
$\Rightarrow$  conditions supplémentaires sur  $v(x, t)$  :


**non bornée en rayon** :  $\forall t, \lim_{\|x\| \rightarrow \infty} v(x, t) = +\infty$  (t.q.  $v(x) = cte$  courbe fermée)

**décroissante** : uniformité de la convergence  $\lim_{x \rightarrow 0} v(x, t) = 0$  par rapport à  $t$ .

$\Rightarrow$  contre-exemples :  $v(x, t) = \frac{\|x\|}{1+t^2}$


$$v(x) = \frac{x_1^2}{1+x_1^2} + x_2^2$$





J.P. RICHARD

72



**3. Stabilité asymptotique exponentielle : Théorème**

$$(S) \begin{cases} \dot{x} = f(x, t), \\ 0 = f(0, t) \quad \forall t. \end{cases}$$

**Théorème : stabilité exponentielle** (en  $e^{-\alpha t}$ )  
 L'équilibre  $x = 0$  du système (S) est (localement) exponentiellement stable s'il existe une constante  $\alpha > 0$  et une fonction  $v(x)$  définie positive sur  $\mathcal{V}_{h_0}$  dont la dérivée  $\dot{v}(x(t))$  (à droite le cas échéant) le long de (S) vérifie :

$$\dot{v}(x(t)) \leq -\alpha v(x(t)), \quad \forall x \in \mathcal{V}_{h_0}, \quad \forall t \in \mathbf{R}, \quad \forall t_0.$$


Démonstration basée sur principe de comparaison (Ici, cas scalaire. Cas vectoriel, p. 74 : inég. dif.)

$$\left. \begin{array}{l} \dot{z} = g(z) \leq -\alpha z, \\ \dot{y} = -\alpha y, \\ y(t_0) = y_0 \geq z(t_0) = z_0, \end{array} \right\} \Rightarrow y(t) \geq z(t) \quad \forall t \geq t_0.$$


En effet supposons  $\exists t_1$ , premier instant où  $y(t_1) = z(t_1)$ . Alors :

$$\dot{y}(t_1) - \dot{z}(t_1) = -\alpha y(t_1) - g(z(t_1)) = -\alpha z(t_1) - g(z(t_1)) \geq 0$$

donc à  $t_1$  l'écart  $y(t) - z(t)$  ne peut décroître: il reste positif,  $y(t)$  reste au dessus de  $z(t)$ .




J.P. RICHARD

73 


**3. Stabilité : Fonction de Lyapunov**

**Définition : fonction candidate, fonction de Lyapunov**  
 Une fonction  $v(x)$  (ou  $v(x, t)$ ) définie positive sur  $\mathcal{V}_{h_0}$  et vérifiant l'un des théorèmes précédents (stabilité simple, asymptotique ou exponentielle, locale ou globale), sera appelée **fonction de Lyapunov** pour le système (S).  
 Pour la même fonction avant test sur le signe de  $\dot{v}(x)$  (ou  $\dot{v}(x, t)$ ), nous parlerons de **fonction candidate**.

*Remarque :* d'autres auteurs parlent de « fonctions de Lyapunov » même sans avoir vérifié la condition sur  $\dot{v}(x)$ . Dans la version ci-dessus, on a :  
 existence d'une fonction de Lyapunov  $\Rightarrow$  équilibre stable



J.P. RICHARD

74 

$$(S) \begin{cases} \dot{x} = f(x, t), \\ 0 = f(0, t) \quad \forall t. \end{cases}$$

**3. Stabilité : Théorème d'instabilité**

**Théorème : instabilité** (Chetaev 1934)

L'équilibre  $x = 0$  du système (S) est instable dans les deux cas suivants :

- ➡ s'il existe  $v(x)$  définie en signe dont la dérivée  $\dot{v}$  soit définie de même signe ;
- ➡ s'il existe  $v(x)$  indéfinie en signe dont la dérivée  $\dot{v}$  soit définie en signe.

**Démonstration :**

- ➡ premier cas évident ( $v > 0, \dot{v} > 0 \dots$ )
- ➡ deuxième cas plus amusant ( $v \pm, \dot{v} > 0$ )

$\forall \varepsilon > 0, \exists \eta, \|x_0\| < \eta \Rightarrow \|x(t)\| < \varepsilon$

J.P. RICHARD

75

$\dot{v} \leq 0 ?$

**3. Stabilité : principe d'invariance de LaSalle**

**Théorème : principe d'invariance (LaSalle)**

Soit  $v(x)$  définie positive ( $v(0) = 0, v(x) > 0$ )  
 non bornée en rayon ( $\lim_{\|x\| \rightarrow +\infty} v(x) = +\infty$ )  
 dérivable ( $\mathcal{C}^1$ ).

Alors une CS de stabilité asymptotique globale de  $x = 0$  est que :

- 1)  $\dot{v} \leq 0 \quad \forall x \in \mathbf{R}^n$
- 2)  $\dot{v}(x(t)) \equiv 0$  ne peut se produire sur une trajectoire autre que  $x(t) \equiv 0$ .

J.P. RICHARD

76

### 3. Stabilité locale : domaine d'attraction

Estimation du domaine d'attraction d'un équilibre :  
 (exemple dit « très important »)

$$\ddot{y} + \dot{y}(a + b\dot{y}^2) + y = 0 \quad (\text{système mécanique à frottement non linéaire})$$

$x = \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix} \Rightarrow \dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -(a + b\dot{y}^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix} = A(x)x$


Points d'équilibre ?  $\Rightarrow \det A(x) \neq 0 \Rightarrow \exists! x_e = 0$

Stabilité ?  $\Rightarrow$  1ère m.L.  $\Rightarrow A(0) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -a \end{bmatrix} \Rightarrow$  As. stable pour  $a > 0$ .

Stab. globale ?  $\Rightarrow$  2è m.L.  $\Rightarrow v(x) = \frac{1}{2}x^T x$   
 $\Rightarrow \dot{v}(x) = x^T [A(x) + A^T(x)] x = -(a + b\dot{y}^2)\dot{y}^2$


$a > 0, b \geq 0 \Rightarrow$  Stab. globale

$a > 0, b < 0 \Rightarrow ?$



J.P. RICHARD

77



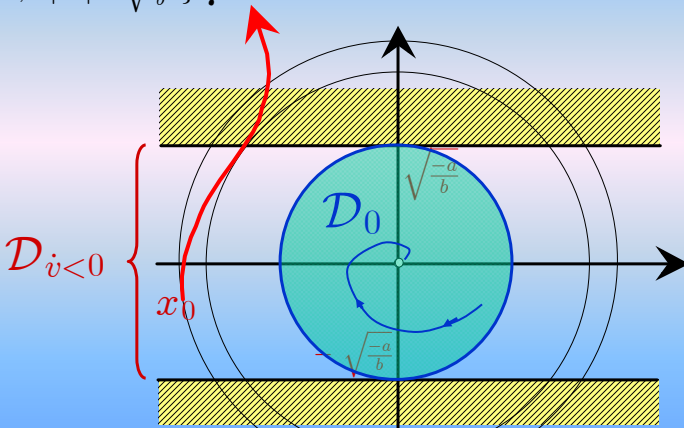
(suite de l'exemple dit « très important »)

### 3. Stabilité locale : domaine d'attraction (suite)


$\dot{x} = \begin{bmatrix} \dot{y} \\ \ddot{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -(a + b\dot{y}^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ \dot{y} \end{bmatrix} = A(x)x \quad v(x) = \frac{1}{2}x^T x, \quad \dot{v} = -(a + b\dot{y}^2)\dot{y}^2$

$a > 0, b < 0 \Rightarrow$  Trouver  $\mathcal{D}_0$  un ensemble de C.I. assurant la convergence des solutions ?

$\mathcal{D}_{\dot{v} < 0} = \{x \in \mathbb{R}^2, |x_2| < \sqrt{\frac{-a}{b}}\} ?$




$\mathcal{D}_0 = \{x \in \mathbb{R}^n, v(x) < cte\} \subset \mathcal{D}_{\dot{v} < 0}$



J.P. RICHARD

78



3. Stabilité locale : Théorème d'estimation du domaine d'attraction

**Théorème : estimation du domaine de stab. asymptotique**

Soit  $v(x)$  une fonction de Lyapunov locale sur  $\mathcal{V}_{h_0}$ , et

$$\mathcal{D}_{\dot{v} < 0} = \{x \in \mathbf{R}^n, \dot{v}(x) = \text{grad}^T v f(x, t) < 0 \quad \forall t \in \mathbf{R}\}.$$

Soit  $\mathcal{D}_0 = \{x \in \mathbf{R}^n, v(x) < \alpha\} \subset \mathcal{D}_{\dot{v} < 0}$

où  $\alpha > 0$  est la plus grande constante permettant l'inclusion.

Alors  $\mathcal{D}_0$  est une estimation du domaine de stabilité asympt.

de  $x = 0$ , c'est-à-dire :  $\forall x_0 \in \mathcal{D}_0, \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t; t_0, x_0) = 0$ .

De plus,  $\mathcal{D}_0$  est positivement invariant, c'est-à-dire :

$$\forall x_0 \in \mathcal{D}_0, x(t; t_0, x_0) \in \mathcal{D}_0 \quad \forall t \geq t_0$$



3. Stabilité : fonctions candidates

Recherche de fonctions de Lyapunov



fonctions « candidates »

$$v \in \mathcal{C}^0(\mathbf{R}^n), \quad \begin{cases} v(x) > 0 \quad \forall x \neq 0, \\ \text{dérivable p.p., } \dot{v} \text{ à sauts bornés} \\ v(0) = 0 \end{cases}$$





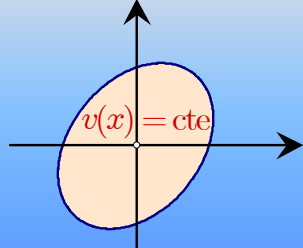
### 3. Stabilité : fonctions candidates quadratiques

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = f(x, t) \\ 0 = f(0, t) \end{array} \right\} \Rightarrow \dot{x} = A(x, t)x$$

⇒ Fonctions candidates quadratiques

$$v(x) = x^T P x, \quad P = P^T > 0$$

$$\dot{v} = \dot{x}^T P x + x^T P \dot{x} = x^T (A^T P + P A) x$$

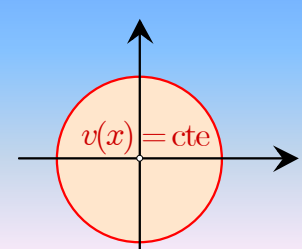
$$\underbrace{A(x, t)^T P + P A(x, t)}_{\text{équation de Lyapunov}} = -C(x, t) \leq ? \quad C < 0$$


$v(x) = \text{cte}$

LACIS J.P. RICHARD 81

### 3. Stabilité : fonctions candidates Holder 2

⇒ Norme de Holder 2 (euclidienne)

$$v(x) = \sqrt{x^T x} \quad (P = Id)$$


$$\dot{v} = \frac{x^T (A + A^T) x}{2\sqrt{x^T x}} \Rightarrow A(\cdot) + A(\cdot)^T < 0?$$

Cas particuliers :  $A(x, t) = A(x, t)^T \Rightarrow$  conditions du linéaire

$$A(x, t) + A(x, t)^T = -\Delta(x, t) \text{ diagonale}$$

LACIS J.P. RICHARD 82

### 3. Stabilité : fonctions candidates Holder 1

⇒ Norme de Holder 1 (de la somme)

$$v(x) = \sum_{i=1}^n |x_i|$$

$$\dot{v} = \sum_{i=1}^n \dot{x}_i \operatorname{sign} x_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \operatorname{sign} x_i$$

$$\leq \sum_j \left[ a_{jj} |x_j| + \sum_{i \neq j} |a_{ij}| |x_i| \right]$$

$$\leq \max_{j=1 \dots n} \left[ a_{jj} + \sum_{i \neq j} |a_{ij}| \right] \sum_i |x_i|$$

indice ligne

$$A(x, t) = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_{ii} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^*(x, t) = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_{ii} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

Max des sommes en colonnes

83

### 3. Stabilité : fonctions candidates de Holder ∞

⇒ Norme de Holder ∞ (du max)

$$v(x) = \max_{i=1, \dots, n} |x_i|$$

$$\dot{v}(x) = \dot{x}_{i_M} \operatorname{sign} x_{i_M} = \sum_j a_{i_M j} x_j \operatorname{sign} x_{i_M}$$

$$\leq \max_i \left[ a_{ii} |x_i| + \sum_{j \neq i} |a_{ij}| |x_j| \right]$$

$$\leq \max_i \left[ a_{ii} + \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right] \max_i |x_i|$$

indice de colonne

$$A(x, t) = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_{ii} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow A^*(x, t) = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & a_{ii} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

Max des sommes

84

3. Stabilité : exemple

**Exemple 1**

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1.5 & \sin x_1 \\ \cos x_3 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & -2 + x_3^2 \end{bmatrix} x$$

$v(x) = \max_{i=1,\dots,n} |x_i|$

$\mathcal{D}_{\dot{v}<0} \Rightarrow |x_1| < \frac{\pi}{6} \text{ et } |x_3| < 1$

$\mathcal{D}_0 \Rightarrow \left\{ x \in \mathbf{R}^3, \max |x_i| < \frac{\pi}{6} \right\}$

LACIS J.P. RICHARD 85

3. Stabilité : exemple

**Exemple 1**

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -2 & 1.5 & \sin x_1 \\ \cos x_3 & -3 & 1 \\ -1 & 0 & -2 + x_3^2 \end{bmatrix} x$$

$v(x) = \sum_{i=1}^n |x_i|$

$\mathcal{D}_{\dot{v}<0} \Rightarrow \sin |x_1| + x_3^2 < 1$

$\mathcal{D}_0 \Rightarrow \left\{ x \in \mathbf{R}^3, |x_1| + |x_2| + |x_3| < \dots \right\}$

LACIS J.P. RICHARD 86

### 3. Inégalités différentielles

**Principe :** (1)  $\dot{x} \leq f(t, x)$        $\dot{z} = f(t, z)$  (2)

solution :  $x(t; t_0, x_0) \leq ?$  solution :  $z(t; t_0, z_0)$

**Contraintes (C.N.) :**  $x \in \mathbf{R}^n \Rightarrow z \in \mathbf{R}^n$   
 $x_0 \leq z_0$

**Utilisation :** (principe de comparaison) Si  $x(t) \geq 0$  ( $\forall t$ ) et si (2) converge vers 0, alors  $x(t)$  converge aussi vers 0.

**Exemple :**  $\dot{x} = -\frac{2+\sin t}{1+x^2}x \Leftrightarrow \frac{d}{dt}|x| \leq -|x|$  *sauf en  $x=0$  (val. abs. non dériv.)*  
 $\dot{z} = -z$  converge vers 0  $\Rightarrow ?$   $|x|$  aussi ? *généraliser la dérivée*  
*démontrer le résultat*

87

### 3. Inégalités différentielles

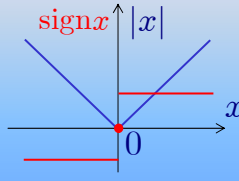
#### Boîte à outils - 1

**Dérivée de Lie (à droite) :**  $D^+x(t) = \limsup_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{x(t+\theta) - x(t)}{\theta}$

**Exemple :**  $\dot{x} = -\frac{2+\sin t}{1+x^2}x$

$$D^+|x(t)| = D^+[x \operatorname{sign}x] = \frac{dx}{dt} \operatorname{sign}x = -\frac{2+\sin t}{1+x^2}|x| \leq -|x|$$

$\Rightarrow D^+|x| \leq -|x|$  même en  $x = 0$  (val. abs. dérivable à droite)



... il reste à montrer :

$\dot{z} = -z$  converge vers 0  $\Rightarrow |x|$  aussi ?

88

Boîte à outils - 2

3. Inégalités différentielles

**Fonction quasi-monotone non décroissante (QMND) :**

la fonction  $f : \mathcal{T} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \subset \mathbf{R}^n$ ,  $(t, x) \mapsto f(t, x)$  est QMND en  $x$  si :


$$\forall t \in \mathcal{T}, \forall (x, x') \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}, \forall i \in \{1, \dots, n\},$$

$$(x \leq x') \text{ et } (x_i = x'_i) \Rightarrow f_i(t, x) \leq f_i(t, x').$$


$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_i \\ x_n \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_i \\ x'_n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} f_1(x) \\ f_i(x) \\ f_n(x) \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} f_1(x') \\ f_i(x') \\ f_n(x') \end{bmatrix}$$

Exemples : (cas linéaire)  $f(x) = Mx$  QMND  $\Leftrightarrow m_{ij} \geq 0 \quad \forall i \neq j$

(cas NL stat.)  $f(x)$  QMND (local<sup>mt</sup> en 0)  $\Leftrightarrow \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]_{x=0}$  QMND

  
J.P. RICHARD

*Définition :  $M$  est une « -M matrice » (l'opposée d'une matrice de Metzler) si elle est Hurwitz et si  $Mx$  est QMND.*

89 

Un résultat de base...

3. Inégalités différentielles

(1)  $D^+x(t) \leq f(t, x)$

$\dot{z} = f(t, z)$

(2)

**Lemme (de Ważewski-Kamke-Lakshmikantham-Leela) :**


Supposons que  $f$  :


- vérifie les conditions d'existence et unicité de solution pour (2) ;
- est quasi-monotone non décroissante en  $x$ .

Alors, les solutions de (1) avec  $x_0 \leq z_0$  vérifient :

$$x(t; t_0, x_0) \leq z(t; t_0, z_0).$$

*Remarque : théorème généralisable au cas de solution non unique et d'équations définies presque partout (voir [RIC 02] chap.5.)*

  
J.P. RICHARD

90 

### Application à la stabilité

### 3. Inégalités différentielles

(1)  $\dot{x}(t) = A(t, x)x(t)$      $A(t, x)$  bornée sur  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$

$$p(x) \triangleq \begin{bmatrix} |x_1| \\ |x_i| \\ |x_n| \end{bmatrix}$$

$$M \triangleq \sup_{\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n} A^*(t, x)$$

$$A^*(x, t) = \begin{bmatrix} \cdot & | \cdot | & | \cdot | \\ | \cdot | & a_{ii} & | \cdot | \\ \cdot & | \cdot | & \cdot \end{bmatrix}$$

$D^+p(x) \leq Mp(x)$

$\Rightarrow$  **Théorème 1** : Si  $M$  est de Hurwitz, alors  $x = 0$  est glob. exponentiellement stable pour (1).

**Démonstration** :  $M$  est QMND par construction (c'est une  $-M$  matrice)

*Remarque*: les  $-M$  matrices ont de nombreuses propriétés. –  $M^{-1}$  est à composantes  $\geq 0$ ,  $\exists$  un vect. ppe  $u > 0$  associé à la val. ppe de plus gde partie réelle de  $M$ , etc.

J.P. RICHARD
91

### Généralisation

### 3. Inégalités différentielles

(1)  $\dot{x}(t) = A(t, x)x(t)$      $A(t, x)$  bornée sur  $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_i \\ x_p \end{bmatrix} \leftarrow x_i \in \mathbf{R}^{n_i}$$

$$V(x) \triangleq \begin{bmatrix} v_1(x_1) \\ v_i(x_i) \\ v_p(x_p) \end{bmatrix}$$

$v_i(x_i)$  fonctions Lyapunov-candidates vérifiant l'égalité triangulaire (normes, par ex):

$v_i \in C^0, v_i(x_i) \geq 0$

$v_i(x_i) = 0 \Leftrightarrow x_i = 0$

$v_i(x_i + y_i) \leq v_i(x_i) + v_i(y_i)$

$D^+V(x) \leq g(V(x)), \quad g(z_e) = 0, \quad z_e \geq 0.$

$\Rightarrow$  **Théorème 2** : Si  $g(z)$  est QMND, si  $\mathcal{D}_0^g$  est une estim. du d.s.a. (dom. de stab. asympt.) de  $z_e$  contenant 0, alors :

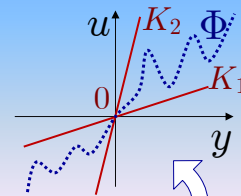
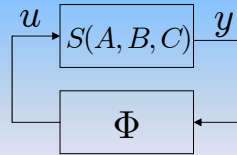
$\mathcal{A} = \{x, V(x) \leq z_e\}$  est un ens. attractif et

$\mathcal{D}_0 = \{x, V(x) \in \mathcal{D}_0^g\}$  est une estim. de son d.s.a.

J.P. RICHARD
92

### 3. Stabilité absolue

$$(1) \begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, \\ y = Cx, \\ u = \Phi(y, t). \end{cases}$$



$$\mathcal{F} = \left\{ \Phi : \mathbf{R}^m \rightarrow \mathbf{R}^m, (u - K_1 y)^\top (u - K_2 y) < 0 \right\}$$

#### Définition

Le système (1) est absolument stable si, pour tout gain  $\Phi$  de la famille  $\mathcal{F}$ , l'équilibre  $x = 0$  est globalement asymptotiquement stable.



A

J.P. RICHARD

93



### 3. Stabilité absolue : théorème du cercle

#### Stabilité absolue : théorème du cercle



J.P. RICHARD

94



### 3. Stabilité absolue : théorème de Popov

## Stabilité absolue : théorème de Popov



J.P. RICHARD

95



### 3. Stabilité absolue : exemple

## Exemple



J.P. RICHARD

96





## 4 Commandabilité

### • Introduction

Systèmes « linéaires en la commande »

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x) + G(x)u, & (1) \\ x &\in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m. \end{aligned}$$

$\mathcal{U}_{adm}$  classe des commandes admissibles  
 (les fonctions constantes par morceaux suffisent, car elles permettent d'approcher toute commande Riemann intégrable)



J.P. RICHARD

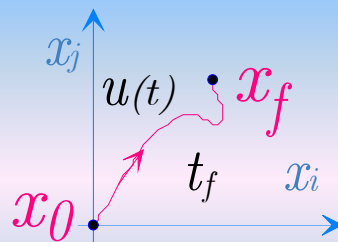
97



### 4 Commandabilité (introduction, suite)

### • Position du problème, définition

Existe-t-il  $u(t)$  permettant de passer de  $x_0$  à  $x_f$ , et en quel temps  $t_f$  ?



**Définition :** Le système (1) est *commandable* (resp. *asymptotiquement commandable*) si étant donnés deux points arbitraires  $x_0$  et  $x_f$ , il existe un temps fini  $t_f$  (resp. fini ou non) et une entrée admissible  $u$  tels que  $x(t_f; 0, x_0, u [0, t_f]) = x_f$  (resp.  $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t; 0, x_0, u [0, t]) = x_f$ ).



J.P. RICHARD

98



#### 4 Commandabilité (suite)

##### • Rappel du Linéaire

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \end{cases}$$

notations :  $\mathcal{C}_{(A,B)} = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B]$

$$W_c(t) = \int_0^t e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} d\tau$$

$$u_f(t) = B^T e^{A(t_f-t)} W_c(t_f)^{-1} (x_f - e^{At_f} x_0)$$



J.P. RICHARD

99



#### 4 Commandabilité (rappel du linéaire, suite)

##### Théorème (cas linéaire, stationnaire, sans retard)

« La paire  $(A, B)$  est commandable » équivaut à:

- 1)  $\mathcal{C}_{(A,B)}$  est de rang plein (Kalman)
- 2)  $W_c(t)$  est inversible pour **au moins** un temps  $t > 0$
- 3) le système peut se mettre sous forme compagne de commandabilité (forme de Luenberger) par changement de base (régulier)
- 4)  $\forall s \in \mathbb{C}, \text{Rang}[B, sI - A] = n$  (Hautus-Popov)

Donc en linéaire, commandable  $\Rightarrow$  commandable  $\forall t_f > 0$ .

Preuve :  $u_f(t)$  fait passer de  $x_0$  à  $x_f$  en  $t_f$  secondes.



J.P. RICHARD

100



4 Commandabilité (suite)

• Commandabilité à partir du linéarisé

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u,$$

$(x_e, u_e)$  **équilibre** (c.à.d.  $f(x_e) + G(x_e)u_e = 0$ ).

**Linéarisé** :  $\dot{x} = Ax + Bu$ , (autour de cet équilibre)

avec  $A = J_f(x_e) + H, \quad B = G(x_e),$

$$J_f(x_e) = \left[ \frac{\partial f}{\partial x} \right]_{x_e}$$

et  $H$  solution de  $Hx = \left[ \frac{\partial G}{\partial x} \right]_{x_e} z u_e$ .



J.P. RICHARD

101

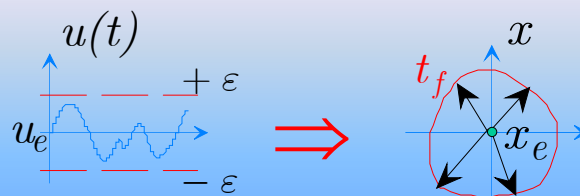


4 Commandabilité (à partir du linéarisé, suite)

Théorème:

Si le système linéarisé est commandable alors le système non linéaire est «localement commandable» au sens suivant :

$\forall t_f > 0, \forall \varepsilon > 0$ , l'ensemble des points atteignables en un temps  $t_f$  partant de  $x_e$  avec des entrées admissibles vérifiant  $\|u - u_e\| < \varepsilon$  contient un voisinage de  $x_e$ .



J.P. RICHARD

102



### 4 Commandabilité (à partir du linéarisé, suite)

**Preuve.** Résultat du linéaire :  $n$  points  $z^i = (0, \dots, 1, \dots, 0)^T$  (1 à la  $i^{\text{ème}}$  place), (1.3) étant commandable on peut trouver  $n$  fonctions  $u^i(t)$  qui amènent les trajectoires issues de l'origine en chacun des  $n$  points  $z^i$  et ce en un temps donné  $t_f$ . Ainsi, partant de l'origine la commande

$$u_\xi = \sum_{i=1}^n \xi^i u^i, \quad (1.4)$$

amène la trajectoire au point

$$z(t_f) = \int_0^{t_f} \exp(A(t-\tau))B \left( \sum_{i=1}^n \xi^i u^i(\tau) \right) d\tau = \xi. \quad (1.5)$$

Pour  $\varepsilon > 0$  donné, on peut trouver un  $\delta > 0$  tel que  $\|\xi\| < \delta$  et  $\|u\| < \varepsilon$ . En notant  $x(t, \xi)$  la solution de (1.1) avec  $u = u_\varepsilon + u_\xi$  démarant de  $x_\varepsilon$ , il suffit de montrer que  $\xi \mapsto x(t_f, \xi)$  est un difféomorphisme local au voisinage de  $\xi = 0$ . Pour cela il suffit de montrer que la matrice  $M(t) = \left. \frac{\partial x(t, \xi)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0}$  est inversible pour  $t = t_f$  (Théorème de la fonction implicite).

Or

$$\frac{\partial x(t, \xi)}{\partial t} = f(x(t, \xi)) + G(x(t, \xi))(u_\varepsilon + u_\xi(t)),$$


en différenciant par rapport à  $\xi$ , on obtient

$$\begin{aligned} M(t) &= \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x_\varepsilon} M(t) + G(x(t, \xi=0))(u^1, \dots, u^n) + \left( \left. \frac{\partial g_1}{\partial x} \right|_{x=x_\varepsilon} M(t), \dots, \left. \frac{\partial g_m}{\partial x} \right|_{x=x_\varepsilon} M(t) \right) u_\varepsilon \\ &= AM(t) + B(u^1, \dots, u^n), M(0) = 0, \end{aligned}$$


donc

$$M(t_f) = \int_0^{t_f} \exp(A(t-\tau))B(u^1, \dots, u^n)(\tau) d\tau = (z^1, \dots, z^n) = Id.$$

■

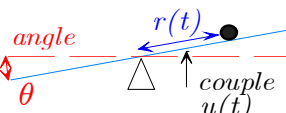


J.P. RICHARD



### 4 Commandabilité (à partir du linéarisé, suite)

**Exemple 5** Bille sur un rail : (cf. section modélisation) le système d'équations d'Euler-Lagrange :



$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = D_i. \quad (1.6)$$

$$(mr^2 + J)\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mgr \cos(\theta) = u, \quad (1.7)$$

$$m\ddot{r} + mg \sin(\theta) - mr\dot{\theta}^2 = 0. \quad (1.8)$$

Linéarisé (équilibre  $u = r = \dot{r} = \theta = \dot{\theta} = 0$ )

$$(mr^2 + J)\ddot{\theta} + mgr \cos(\theta) = u, \quad (1.9)$$


$$\ddot{r} + g\theta = 0. \quad (1.10)$$

En posant  $x = (r \ \dot{r} \ \theta \ \dot{\theta})^T$  on obtient :


$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\frac{2gr}{J} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{J} \end{pmatrix} u, \quad (1.11)$$

Ce qui donne

$$C(A, B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{g}{J} \\ 0 & 0 & -\frac{g}{J} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J} & 0 & 0 \\ \frac{1}{J} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{inversible} \Rightarrow \text{loc. com.}$$



J.P. RICHARD



#### 4 Commandabilité (à partir du linéarisé, suite)

Exemple 6 Cuve chauffante

$x_1 = h$  hauteur d'eau ( $\exists$  «fuite»)  $Q_e = S \frac{dh}{dt} + \alpha \sqrt{h}$ , (1.12)

$x_2 = \theta_s$  température  $\frac{d\theta_s}{dt} = \frac{P_u - Q_e \rho c (\theta_s - \theta_a)}{S h \rho c}$ . (1.13)

$u_1 = Q_e$  débit alim.

$u_2 = P_u$  puissance chauffe

En notant  $x_1 = h$  la première sortie,  $x_2 = \theta_s$  la seconde,  $u_1 = Q_e$  la première entrée et  $u_2 = P_u$  la seconde on obtient

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{1}{S}(u_1 - \alpha \sqrt{y_1}),$$

$$\frac{dy_2}{dt} = \frac{u_2 - u_1 \rho c (y_2 - \theta_a)}{S \rho c y_1}$$

Pour un régime nominal  $Q_{e,n} = 20l/mn$ ,  $h_n = 0.6m$ ,  $\theta_a = 50^\circ C$ , avec valeur numérique suivante  $\theta_a = 20^\circ C$ ,  $S = 1$ ,  $\alpha = \frac{20}{\sqrt{0.6}} l/(m \times mn)$  le modèle linéarisé est

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3600} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1800} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -50 & \frac{1}{12 \times 10^4} \end{pmatrix}, \text{ (loc. commandable)}$$

$$x \in (m, ^\circ C), u \in (m^3/s, W)$$



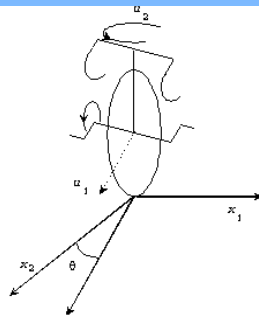
J.P. RICHARD

105



#### 4 Commandabilité (à partir du linéarisé, suite)

- CNS ? un contre exemple (syst. non holonome)



(monocycle autour de 0)

$$\frac{dx_1}{dt} = \sin(\theta)u_1,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \cos(\theta)u_1,$$

$$\frac{d\theta}{dt} = u_2.$$

$$A = 0, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

... paire non com. !  
 (alors, comment font-ils ?)

« La vérité est ailleurs »  
 [X-Files]

$$u(t) = \begin{cases} (1, 0), & t \in [0, \varepsilon[ \\ (0, 1), & t \in [\varepsilon, 2\varepsilon[ \\ (-1, 0), & t \in [2\varepsilon, 3\varepsilon[ \\ (0, -1), & t \in [3\varepsilon, 4\varepsilon[ \end{cases}$$



J.P. RICHARD

106



**4 Commandabilité (à partir du linéarisé, contre-exemple, suite)**

**Interprétation : on utilise ici la non-commutativité des flots de commande *non-linéaire*.**

**Linéaire :**  $\dot{x} = Ax + Bu, A = 0$  (ici, mais ok  $\forall A$ )  
 $\Rightarrow x(t_f) = x_0 + B \int_0^{t_f} u_1(\tau) d\tau$   
 $x(2t_f) = x_0 + B \int_0^{t_f} u_1(\tau) d\tau + B \int_{t_f}^{2t_f} u_2(\tau) d\tau$   
 $= x_0$  si  $u_1 = -u_2$ ,


ce qui revient à  $\Phi_{Bu_1}^t \circ \Phi_{Bu_2}^s = \Phi_{Bu_2}^s \circ \Phi_{Bu_1}^t = \Phi_{B(u_1+u_2)}^t$

**Ici, NL :**  $\Phi_{g_1}^t \circ \Phi_{g_2}^s \neq \Phi_{g_2}^s \circ \Phi_{g_1}^t$

$g_1 = (\sin(\theta), \cos(\theta), 0)^T, g_2 = (0, 0, 1)^T \Rightarrow$


$\Phi_{g_1}^t : \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \theta_0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_{10} + \sin(\theta_0)t \\ x_{20} + \cos(\theta_0)t \\ \theta_0 \end{pmatrix},$

$\Phi_{g_2}^t : \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \theta_0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \theta_0 + t \end{pmatrix},$



J.P. RICHARD


107



**4 Commandabilité (à partir du linéarisé, contre-exemple, suite)**


$$\begin{aligned}
 x(\epsilon) &= x_0 + \epsilon g_1(x_0) + \frac{1}{2}\epsilon^2 \left( \frac{\partial g_1}{\partial z} \right)_{z=x_0} g_1(x_0) + o(\epsilon^2), \\
 x(2\epsilon) &= x(\epsilon) + \epsilon g_2(x(\epsilon)) + \frac{1}{2}\epsilon^2 \left( \frac{\partial g_2}{\partial z} \right)_{z=x(\epsilon)} g_2(x(\epsilon)) + o(\epsilon^2) \\
 &= x_0 + \epsilon (g_1(x_0) + g_2(x_0)) + \epsilon^2 \left( \frac{\partial g_2}{\partial z} \right)_{z=x_0} g_1(x_0) + \frac{1}{2}\epsilon^2 \left( \frac{\partial g_1}{\partial z} \right)_{z=x_0} g_1(x_0) \\
 &\quad + \frac{1}{2}\epsilon^2 \left( \frac{\partial g_2}{\partial z} \right)_{z=x_0} g_2(x_0) + o(\epsilon^2) \\
 x(3\epsilon) &= x(2\epsilon) - \epsilon g_1(x(2\epsilon)) + \frac{1}{2}\epsilon^2 \left( \frac{\partial g_1}{\partial z} \right)_{z=x(2\epsilon)} g_1(x(2\epsilon)) + o(\epsilon^2) \\
 &= x_0 + \epsilon (g_1(x_0) + g_2(x_0)) + \epsilon^2 \left( \frac{\partial g_2}{\partial z} \right)_{z=x_0} g_1(x_0) + \epsilon^2 \left( \frac{\partial g_1}{\partial z} \right)_{z=x_0} g_1(x_0) \\
 &\quad + \frac{1}{2}\epsilon^2 \left( \frac{\partial g_1}{\partial z} \right)_{z=x_0} g_2(x_0) - \epsilon \left( g_1(x_0) + \epsilon \left( \frac{\partial g_1}{\partial z} \right)_{z=x_0} (g_1(x_0) + g_2(x_0)) \right) + o(\epsilon^2) \\
 &= x_0 + \epsilon g_2(x_0) + \epsilon^2 \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_2}{\partial z} \right)_{z=x_0} g_2(x_0) + \left( \frac{\partial g_2}{\partial z} \right)_{z=x_0} g_1(x_0) - \left( \frac{\partial g_1}{\partial z} \right)_{z=x_0} g_2(x_0) \right) + o(\epsilon^2) \\
 &= x_0 + \epsilon g_2(x_0) + \epsilon^2 \left( \frac{1}{2} \left( \frac{\partial g_2}{\partial z} \right)_{z=x_0} g_2(x_0) + [g_1, g_2](x_0) \right) + o(\epsilon^2) \\
 x(4\epsilon) &= x(3\epsilon) - \epsilon g_2(x(3\epsilon)) + \frac{1}{2}\epsilon^2 \left( \frac{\partial g_2}{\partial z} \right)_{z=x(3\epsilon)} g_2(x(3\epsilon)) + o(\epsilon^2) \\
 &= x_0 + \epsilon g_2(x_0) + \epsilon^2 \left( \left( \frac{\partial g_2}{\partial z} \right)_{z=x_0} g_2(x_0) + [g_1, g_2](x_0) \right) - \epsilon \left( g_2(x_0) + \epsilon \left( \frac{\partial g_2}{\partial z} \right)_{z=x_0} g_2(x_0) \right) + o(\epsilon^2) \\
 &= (Id + \epsilon^2 [g_1, g_2])(x_0) + o(\epsilon^2)
 \end{aligned}$$

on constate que tout se passe comme si pendant ce petit intervalle de temps le système avait été soumis à une équation différentielle du type  $\dot{x} = [g_1, g_2](x)$ .



J.P. RICHARD

108



## 4 Commandabilité en Non-Linéaire : définitions

**Définition :** l'ensemble  $\mathcal{A}_{\mathcal{V}}^T(x_0)$  des **états atteignables** depuis  $x_0$  en un temps  $T$  dans  $\mathcal{V}$  un voisinage de  $x_0$  est

$$\mathcal{A}_{\mathcal{V}}^T(x_0) = \left\{ \begin{array}{l} x_f \in R^n : \exists u \in \mathcal{U}_{adm} : \\ x(t; 0, x_0, u_{[0,T]}) \in \mathcal{V} \quad \forall t \in [0, T] \\ \text{et} \quad x(T; 0, x_0, u_{[0,T]}) = x_f. \end{array} \right\}$$



J.P. RICHARD

109



### 4 Commandabilité en NL (définitions, suite)

**Algèbre de Lie :** somme  $f + g$ , produit  $[f, g]$ .

$\{f, g_1, \dots, g_m\}$  sous-algèbre engendrée par les  $\{f, g_1, \dots, g_m\}$ .

#### • Distribution d'accessibilité

L'**algèbre d'accessibilité** notée  $\mathcal{A}(f, g_1, \dots, g_m)$  est la plus petite sous-algèbre de champs de vecteurs analytiques définis sur  $R^n$  qui contienne les champs de vecteurs engendrés par  $\{f, g_1, \dots, g_m\}$

$$\mathcal{A}(f, g_1, \dots, g_m) = \left\{ \begin{array}{l} [h_k, [h_{k-1}, [\dots [h_2, h_1]]]], \\ h_j \in \{f, g_1, \dots, g_m\}; j = 1, \dots, k; k = 0, \dots, \infty \end{array} \right\}$$

La **distribution d'accessibilité** est la distr. engendrée par  $\mathcal{A}(f, g_1, \dots, g_m)$ :

$$A(x) = \text{vect} \{h(x), h \in \mathcal{A}(f, g_1, \dots, g_m)\} \quad (x \in R^n).$$



J.P. RICHARD

110



#### 4 Commandabilité en NL (définitions, suite)

- Cas mono-entrée

$$\mathcal{A}(f, g) = \left\{ h : h = f \text{ ou } (\text{Ad}f)^k g, \right. \\ \left. \text{pour un } k \geq 0 \text{ (fini ou non)} \right\}.$$

avec  $(\text{Ad})g = [f, [f, g]]$ ,  
 $(\text{Ad})^2 g = [f, [f, [f, g]]]$ ,  
 $(\text{Ad})^k g = [f, [f, [\dots [f, g]]]]$ ,  $k$  fois.

... et on retrouvera le linéaire en testant le rang de

$$\dim(\text{vect} \{g, (\text{Ad}f)g, (\text{Ad}f)^2 g, \dots\}) \quad !$$



J.P. RICHARD

111



## 4 Commandabilité en Non-Linéaire : théorèmes

**Théorème 12** Si  $\dim(A(x_0)) = n$ , alors pour tout  $\mathcal{V}$  (voisinage de  $x_0$ ) et tout  $T > 0$  l'ensemble des états atteignables depuis  $x_0$  en un temps  $\tau \leq T$  dans  $\mathcal{V}$  contient un ouvert non vide de  $\mathbb{R}^n$  : dans ce cas le système (4.1) est dit localement accessible depuis  $x_0$ . Si cette dernière propriété est vraie pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  alors le système est dit localement accessible.

**Définition 13** Le système (4.1) est fortement accessible depuis  $x_0$  si pour tout  $\mathcal{V}$  (voisinage de  $x_0$ ) l'ensemble des points atteignables en un temps donné  $T$  depuis contient un ensemble ouvert non vide de  $\mathbb{R}^n$  pour  $T$  suffisamment petit.

**Définition 14** L'algèbre d'accessibilité forte notée  $\mathcal{AF}(g_1, \dots, g_m)$  est la plus petite sous-algèbre de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs analytiques définis sur  $\mathbb{R}^n$  qui contient les champs de vecteurs  $\{g_1, \dots, g_m\}$  et qui soit invariante par  $f$  : c'est-à-dire  $\forall h \in \mathcal{AF}(g_1, \dots, g_m) : [f, h] \in \mathcal{AF}(g_1, \dots, g_m)$ . La distribution d'accessibilité forte est la distribution engendrée par  $\mathcal{AF}(g_1, \dots, g_m)$  :

$$\mathcal{AF}(x) = \text{vect}\{h(x) : h \in \mathcal{AF}(g_1, \dots, g_m)\}, x \in \mathbb{R}^n, \quad (4.25)$$

**Théorème 15** Si  $\dim(\mathcal{AF}(x_0)) = n$ , alors le système est dit fortement accessible depuis  $x_0$ . Si cette dernière propriété est vraie pour tout  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  alors le système est dit fortement accessible.

**Théorème 17** Si  $f = 0$  (système sans terme de dérive) ou si  $f(x) \in \text{vect}\{g_1(x), \dots, g_m(x)\}, \forall x \in \mathbb{R}^n$  et  $\dim(A(x)) = n, \forall x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow$  le système est commandable.



J.P. RICHARD

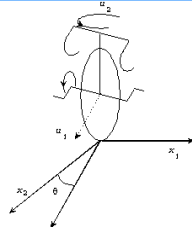
112





4 Commandabilité en NL (suite)

Exemple 1 : retour sur le monocycle...



(monocycle)

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= \sin(\theta)u_1, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \cos(\theta)u_1, \\ \frac{d\theta}{dt} &= u_2. \end{aligned}$$

$$[g_1, g_2] = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ -\sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$([g_1, g_2], g_1, g_2) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$\Rightarrow \dim(\text{vect} \{ [g_1, g_2], g_1, g_2 \}) = 3.$   
 $f = 0 \Rightarrow$  **commandable**



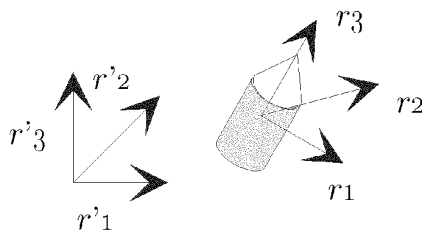
J.P. RICHARD

113



4 Commandabilité en NL (suite)

Exemple 2 : satellite



$$\begin{aligned} j_1 \dot{\omega}_1(t) &= \omega_3 \omega_2 (j_2 - j_3) + \sum_{i=1}^m (b_i)_1 u_i, \\ j_2 \dot{\omega}_2(t) &= \omega_1 \omega_3 (j_3 - j_1) + \sum_{i=1}^m (b_i)_2 u_i, \\ j_3 \dot{\omega}_3(t) &= \omega_2 \omega_1 (j_1 - j_2) + \sum_{i=1}^m (b_i)_3 u_i. \end{aligned}$$

$m$  propulseurs par jets  $u_i. \Rightarrow$  **commandable ?**



J.P. RICHARD

114



#### 4 Commandabilité en NL (exemple 2, suite)

2 paires de jets :  $b_1 = (1, 0, 0)^T, b_2 = (0, 1, 0)^T$

$$f = (\omega_3 \omega_2 \frac{j_2 - j_3}{j_1}, \omega_1 \omega_3 \frac{j_3 - j_1}{j_2}, \omega_2 \omega_1 \frac{j_1 - j_2}{j_3})^T$$

$$g_1 = (\frac{1}{j_1}, 0, 0)^T \quad g_2 = (0, \frac{1}{j_2}, 0)^T$$

$$\begin{aligned} [g_1, f](\omega) &= (0, \omega_3 \frac{j_3 - j_1}{j_1 j_2}, \omega_2 \frac{j_1 - j_2}{j_1 j_3})^T \\ [g_2, f](\omega) &= (\omega_3 \frac{j_2 - j_3}{j_1 j_2}, 0, \omega_1 \frac{j_1 - j_2}{j_2 j_3})^T \\ [g_2, [g_1, f]](\omega) &= [g_1, [g_2, f]](\omega) \\ [g_2, [g_1, f]](\omega) &= (0, 0, \frac{j_1 - j_2}{j_1 j_2 j_3})^T \end{aligned}$$

⇒ Fortement accessible



J.P. RICHARD

115



#### 4 Commandabilité en NL (suite)

### • Décomposition canonique

**Théorème 20** Si  $\dim(A(x_0)) = k < n$ , alors il existe  $\mathcal{V}$  (voisinage de  $x_0$ ) et un système de coordonnées locales permettant de définir une sous-variété de dimension  $k$  telle que la restriction du système à cette sous-variété soit localement accessible depuis  $x_0$ . Dans des coordonnées locales le système peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} \dot{z}^1 &= f^1(z) + G_1(z)u \\ \dot{z}^2 &= f^2(z), \\ z^1 &= (z_1, \dots, z_k), \\ z^2 &= (z_{k+1}, \dots, z_n), \end{aligned}$$

c'est-à-dire qu'il existe un difféomorphisme local ( $z = \phi(x)$ ) pour lequel les trajectoires vérifient le système précédent.



J.P. RICHARD

116

