

## 6) Equations Différentielles Fonctionnelles :

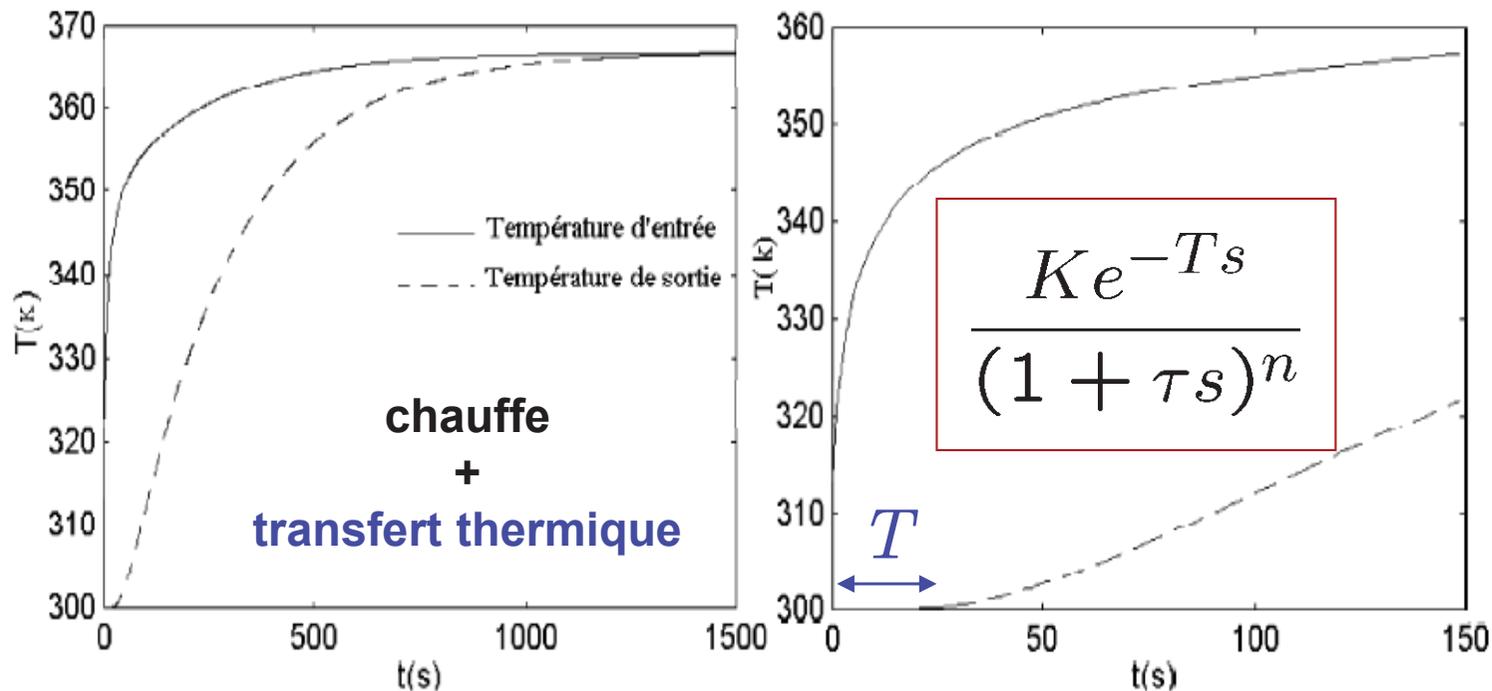
cas particulier des

systemes à retards

# Retard : exemple classique

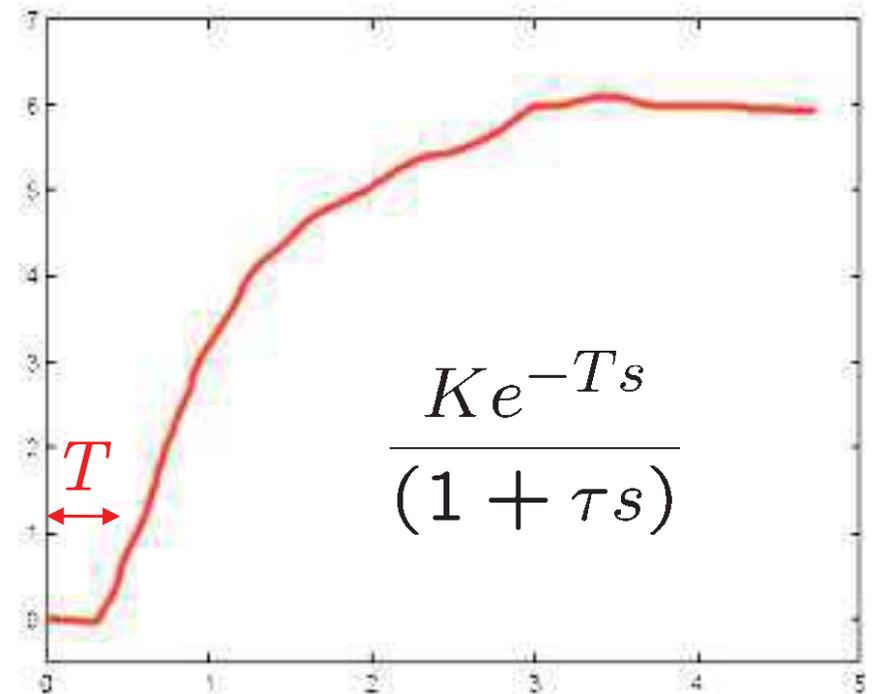
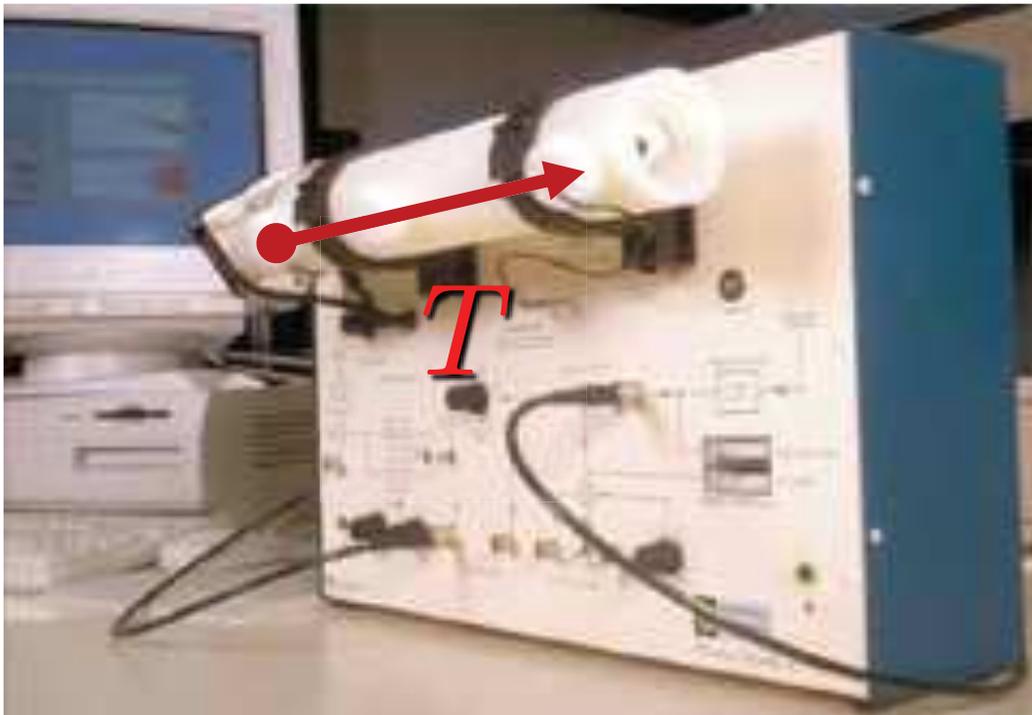
## Modèles de type Strejč-Broïda pour la commande industrielle

- usage fréquent en génie des procédés
- approximation simple et générique
- commande PID ? ... marche mal si  $T > \tau$
- prédicteur de Smith ou « GPID »



# Retard : autre exemple classique

... un grand classique des TP d'automatique (Feedback)

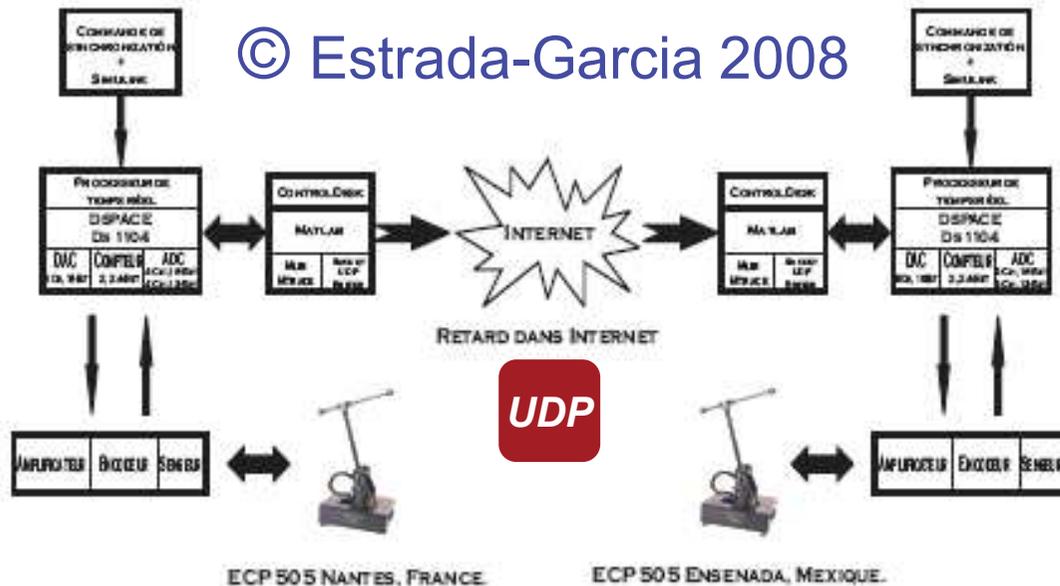


$$\left. \begin{array}{l} T \approx 20 \cdot 10^{-3} \text{ sec}, \\ \tau \approx 1 \text{ sec}. \end{array} \right\} \text{PID ok}$$

# Retard : un exemple un peu plus récent...

PhD H.J. Estrada-Garcia 2008 (+Moog, Marquez-Martinez)

© Estrada-Garcia 2008



But : synchronisation d'un pendule esclave (Nantes) sur un pendule maître (Ensenada).

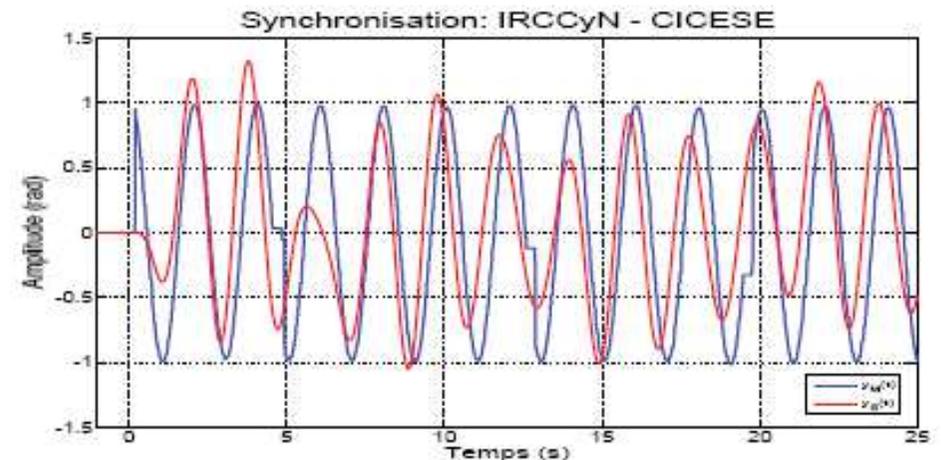
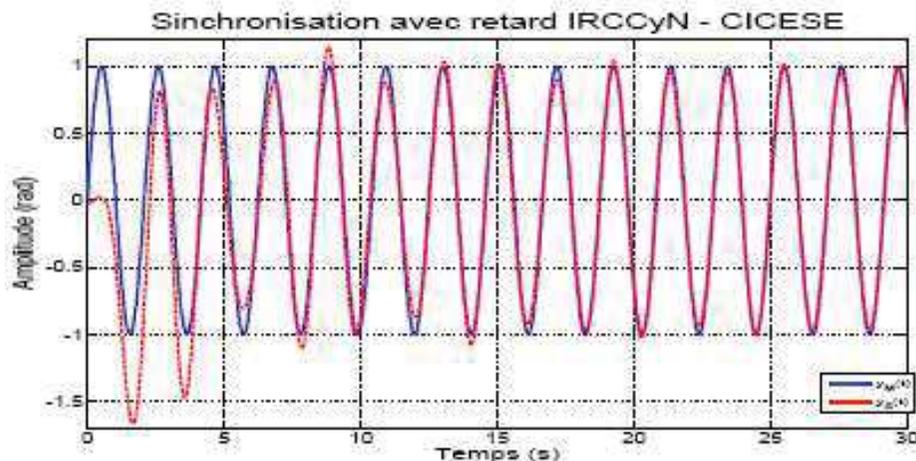
$y^{ref}$  supposée connue par les deux.

Stratégie :

- 1) *buffers* à 300ms =  $\tau$
- 2) commande tq écart m/e régi par :

$$e^{(3)}(t) + a_1 \ddot{e}(t - \tau) + b_1 \dot{e}(t - \tau) + c_1 e(t - \tau) = 0.$$

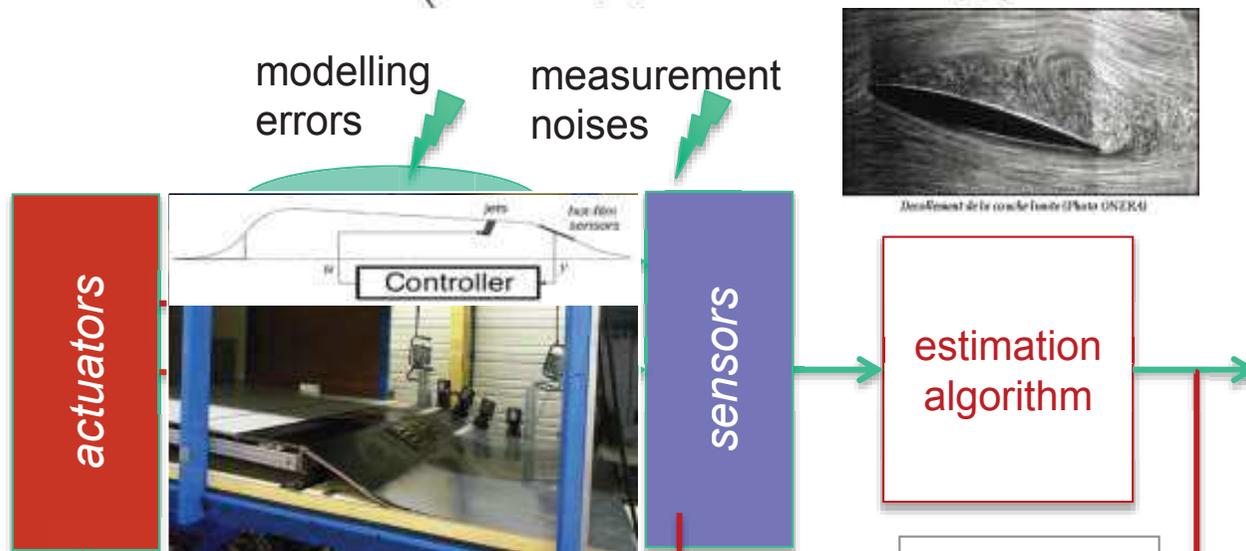
→ commande causale



# Retard : un exemple en cours

PhD en cours (Feingessicht + Polyakov, Kerhervé, Richard + IEMN, LML, Onera, etc.)

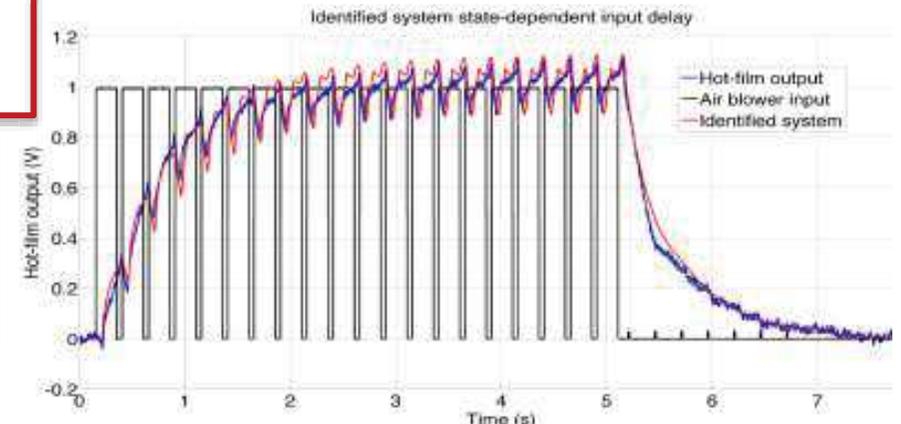
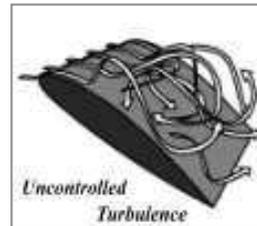
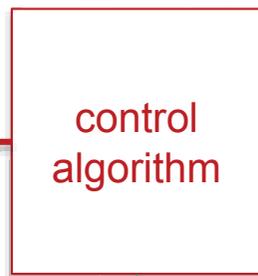
$$\dot{y}(t) = \frac{1}{T} \left( -y(t) + \sum_{i=1}^2 (a_i y(t - \tau_i T)) + \sum_{l=1}^2 (b_l u(t - h_l T)) + \sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^2 (c_{jl} u(t - h_l T) y(t - \tilde{\tau}_j T)) \right)$$



Modèles ?

- Navier Stokes...
- non linéaire + retard(s)

Contrôle? cf [YouTube](#)



*Bilinear, Delayed* : vous trouvez ça compliqué ?

$$\dot{y}(t) = \frac{1}{T} \left( -y(t) + \sum_{i=1}^2 (a_i y(t - \tau_i T)) + \sum_{l=1}^2 (b_l u(t - h_l T)) + \sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^2 (c_{jl} u(t - h_l T) y(t - \tilde{\tau}_j T)) \right)$$

*versus*



## Navier-Stokes Equations

### 3 - dimensional - unsteady

**Glenn  
Research  
Center**

---

Coordinates: (x,y,z)	Time : t    Pressure: p	Heat Flux: q
Velocity Components: (u,v,w)	Density: ρ    Stress: τ	Reynolds Number: Re
	Total Energy: Et	Prandtl Number: Pr

**Continuity:**  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$

**X - Momentum:**  $\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re_r} \left[ \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right]$

**Y - Momentum:**  $\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re_r} \left[ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right]$

**Z - Momentum:**  $\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w^2)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re_r} \left[ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right]$

**Energy:**

$$\frac{\partial(E_T)}{\partial t} + \frac{\partial(uE_T)}{\partial x} + \frac{\partial(vE_T)}{\partial y} + \frac{\partial(wE_T)}{\partial z} = -\frac{\partial(up)}{\partial x} - \frac{\partial(vp)}{\partial y} - \frac{\partial(wp)}{\partial z} - \frac{1}{Re_r Pr_r} \left[ \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right]$$

$$+ \frac{1}{Re_r} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (u \tau_{xx} + v \tau_{xy} + w \tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y} (u \tau_{xy} + v \tau_{yy} + w \tau_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z} (u \tau_{xz} + v \tau_{yz} + w \tau_{zz}) \right]$$

# A pretty old topic?

- applied topic, ok
- already old one, sure (2 centuries)
- but contemporary, as well?

<http://www.journals.elsevier.com/automatica/most-downloaded-articles>

# Much a do about delay ?

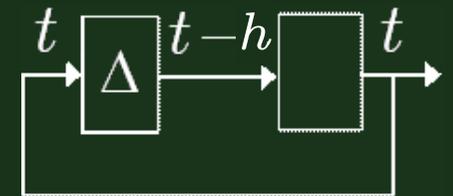


- **problème appliqué** (biblio : cf. Niculescu 2001, Richard 2003, Fridman 2014)

(ingénierie, télécom., temps réel, aéronautique, biologie, populations, etc.)

- **problème toujours ouvert dans de nombreux cas**

(bouclage, retards variables, retards inconnus, identification, etc.)



- **problème de dim. infinie «le plus simple»**

(équations fonctionnelles = cas particulier des EDP )

- **problème à surprises**

(dégradation/amélioration par ajout de retard, modèle d'échantillonnage, etc.)

# *Plan de la partie SàR*

## Particularités des SàR

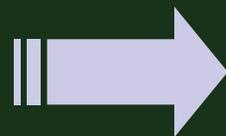
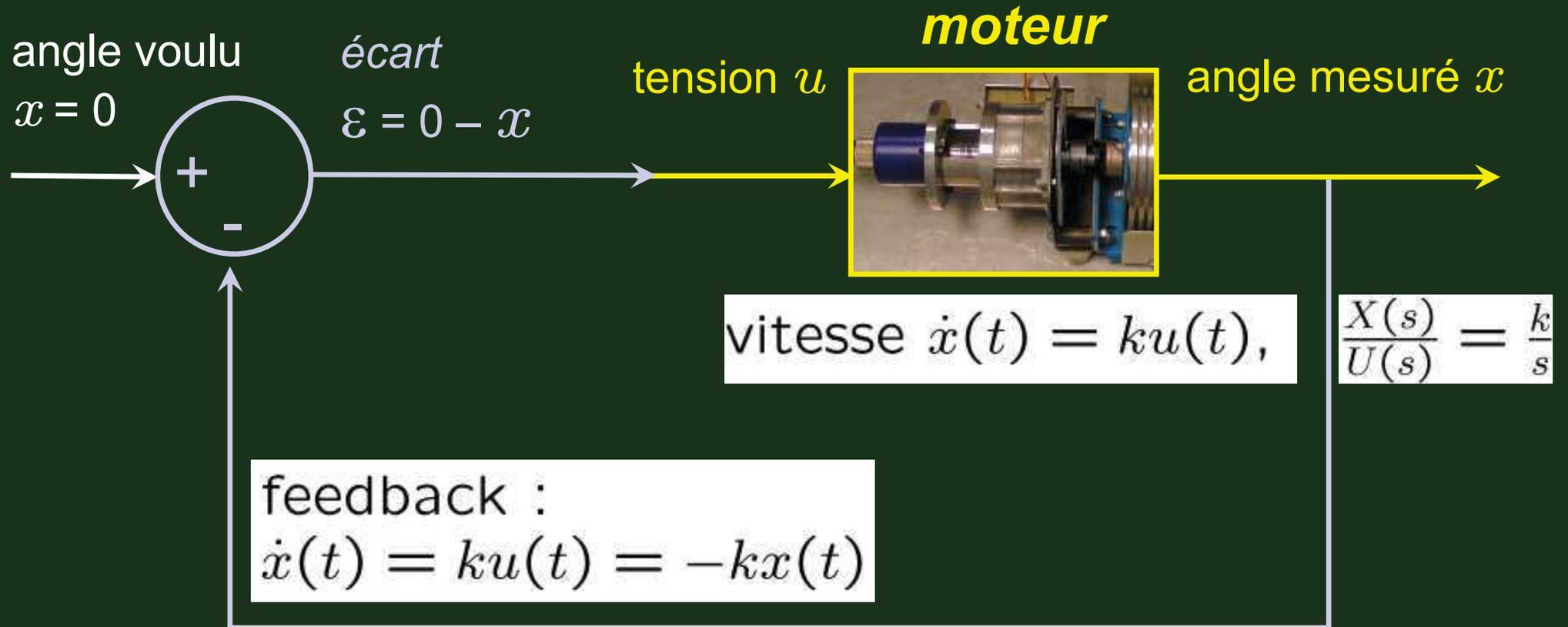
- motivations
- 1<sup>er</sup> exemple (télé-op.) → notions de base (stabilité, état, dimension infinie)
- 2<sup>ème</sup> exemple : retard variable → contre-exemple
- 3<sup>ème</sup> exemple : échantillonnage asynchrone → intérêt

## Généralités mathématiques

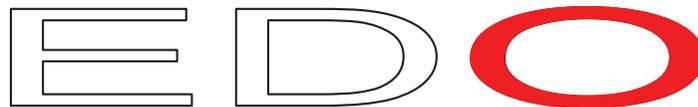
- classification (et exemples)
- problème de Cauchy
- **stabilité**
- formalismes (modèles)
- commande (+ commandabilité) et **prédiction**
- petite bibliographie

# Particularités

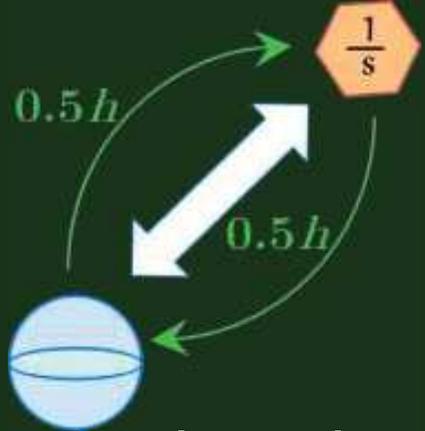
# Un exemple simple



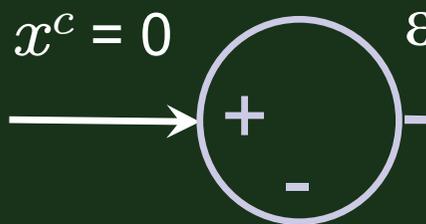
$$\dot{x}(t) + kx(t) = 0$$



# Exemple simple (suite)



angle voulu  
 $x^c = 0$



**moteur embarqué (satellite)**



angle mesuré  $x(t)$

commande transmise  $\varepsilon(t-h/2)$

feedback distant :  
 $u(t) = k\varepsilon(t - h/2) = -kx(t - h)$

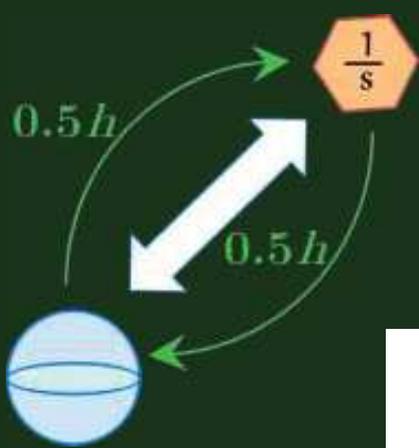
angle transmis  $x(t-h/2)$



Paris-LA	$h/2 \approx 50 \cdot 10^{-3} \text{sec}$	$(15 \cdot 10^6 \text{m})$
♁ - ☾	$h/2 \approx 1.28 \text{sec}$	$(0.4 \cdot 10^9 \text{m})$
♁ - ♂	$h/2 \approx 260 \text{ à } 1260 \text{ sec...}$	

$$\dot{x}(t) + kx(t - h) = 0$$

# Exemple simple (suite)



$$\dot{x}(t) + x(t - h) = 0$$

(cas  $h = 1, k = 1$ )

$$\dot{x}(t) = -x(t - 1)$$

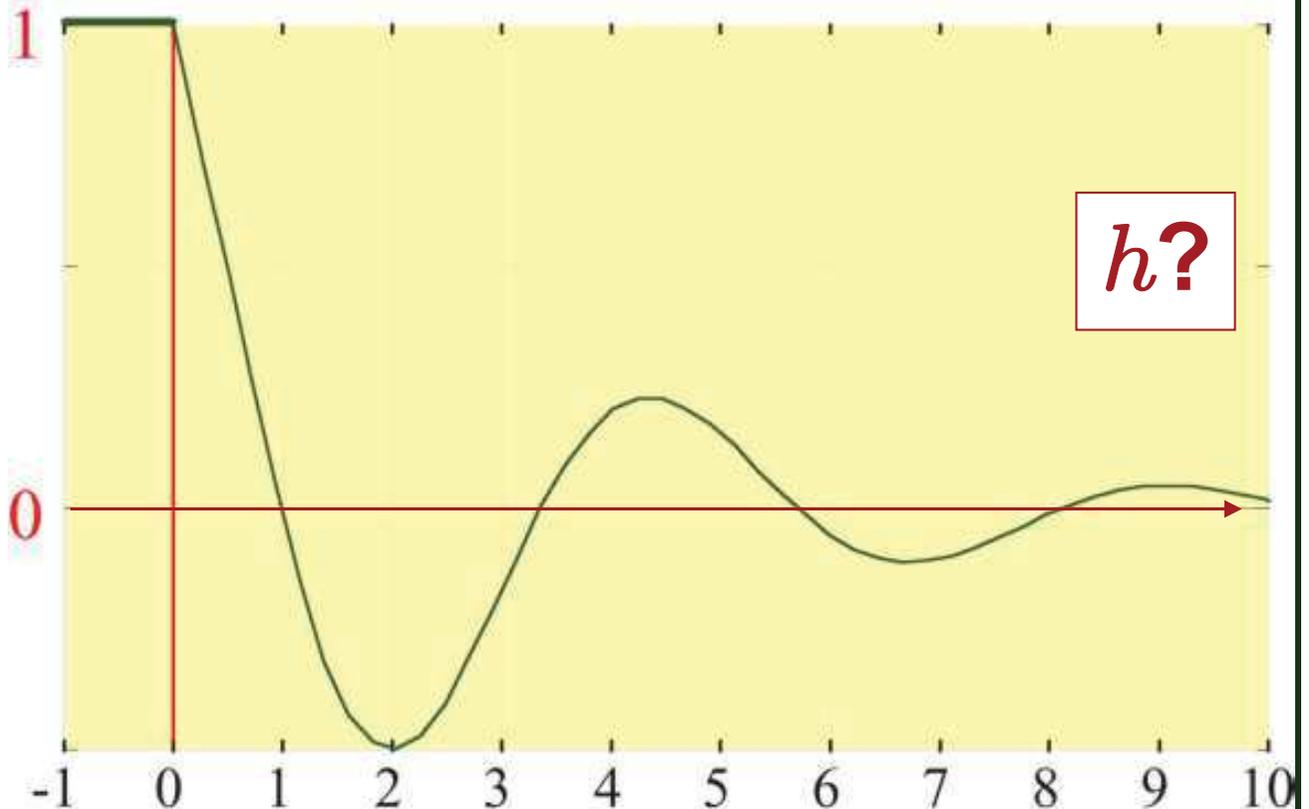
C.I.  $t = 0 : x(t = 0) = 1$  ??

$t \in [-1, 0] : x(t) = 1$  (C.I.)

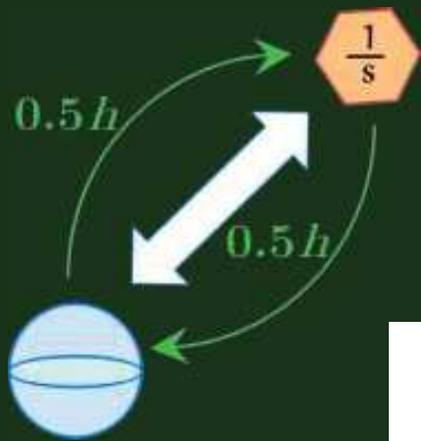
$t \in [0, 1] : x(t) = 1 - t,$

$t \in [1, 2] : x(t) = \frac{1}{2} - t + \frac{t^2}{2},$

etc.



# Exemple simple (suite)



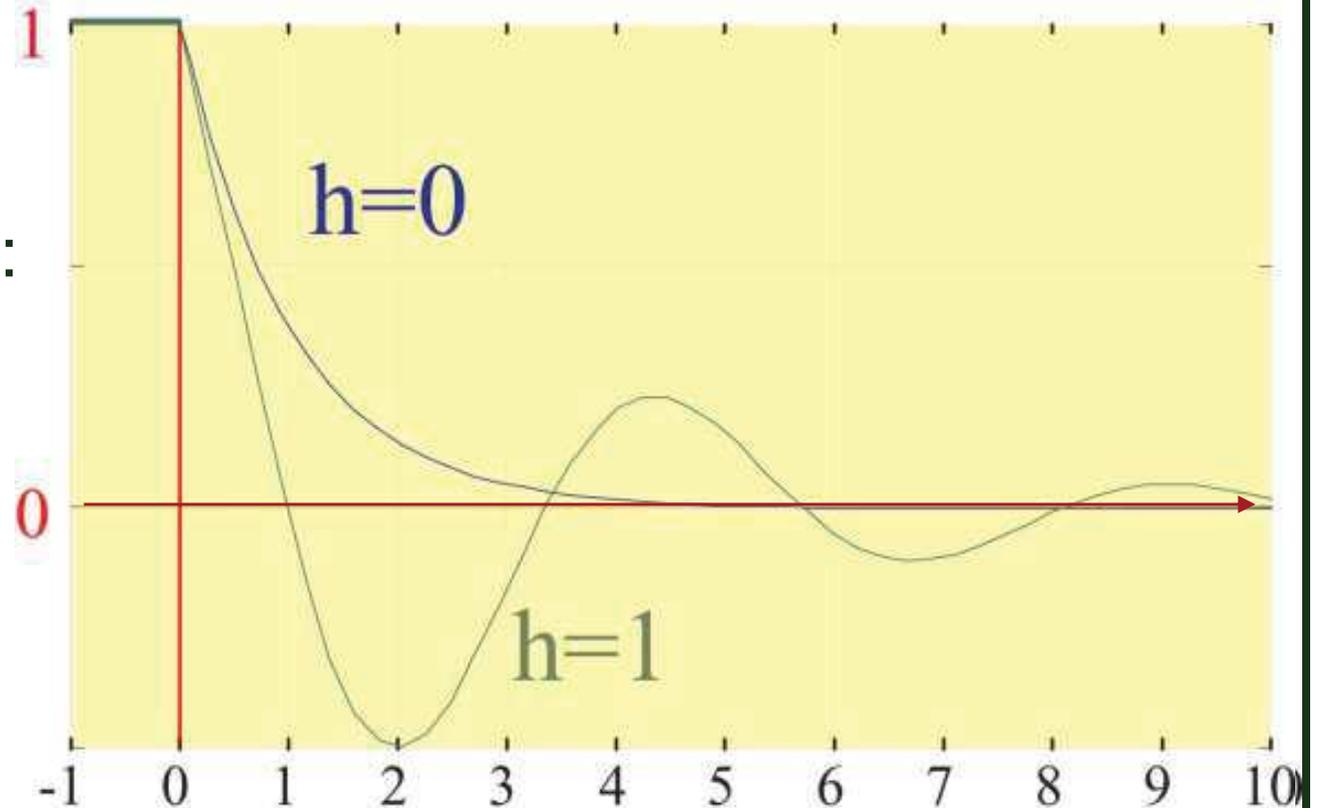
$$\dot{x}(t) + x(t - h) = 0$$

selon  $h$  ?

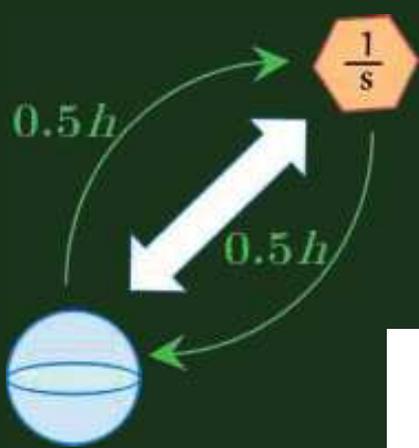
$$\dot{x}(t) + x(t - 1) = 0$$

à comparer avec ( $h=0$ ) :

$$\dot{x}(t) + x(t) = 0$$



# Exemple simple (suite)

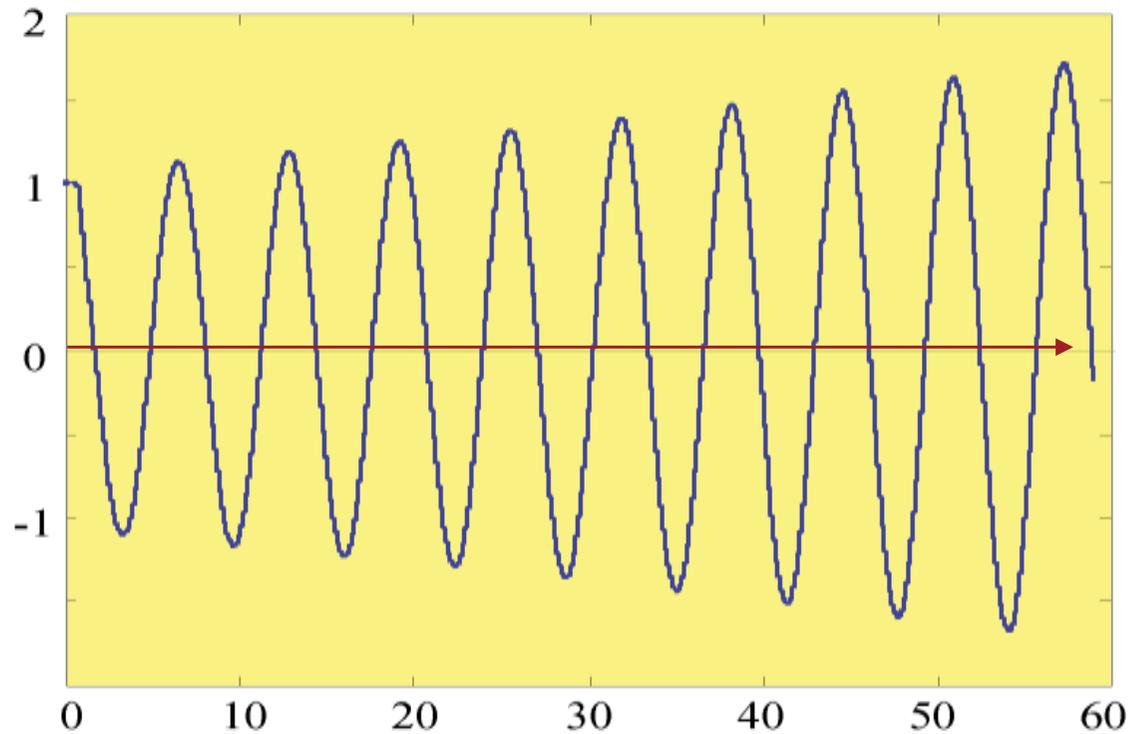


$$\dot{x}(t) + x(t - h) = 0$$

$$h = 1.6$$

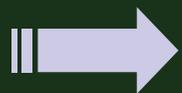
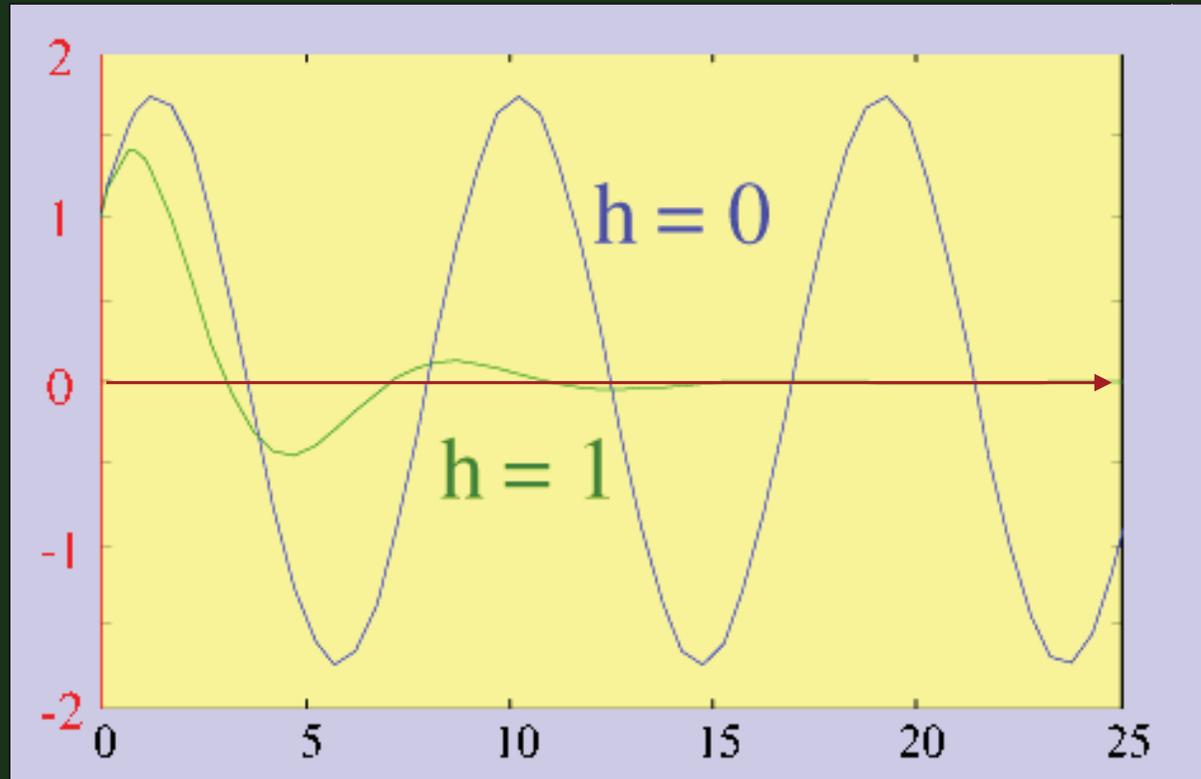
$$\dot{x}(t) + x(t - 1.6) = 0$$

$t \in [-1, 0] : x(t) = 1$  (même C.I.)



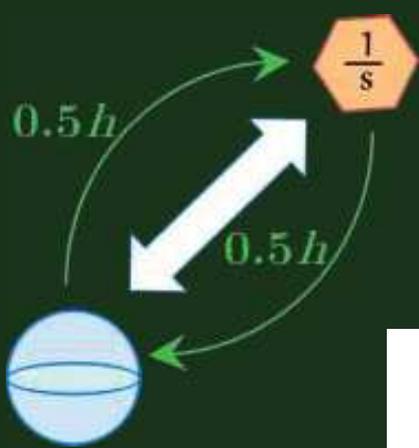
(parenthèse...)

$$\ddot{y}(t) + y(t) - \frac{1}{2}y(t-h) = 0$$



*le retard peut aussi avoir un effet stabilisant*

ici, effet de dérivée :  $y(t-h) \approx y(t) - h\dot{y}(t)$



# Retour à l'exemple simple...

$$\dot{x}(t) + x(t - h) = 0$$

$$h = \frac{\pi}{2}$$

$$\dot{x}(t) + x\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}x(t) = -x\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

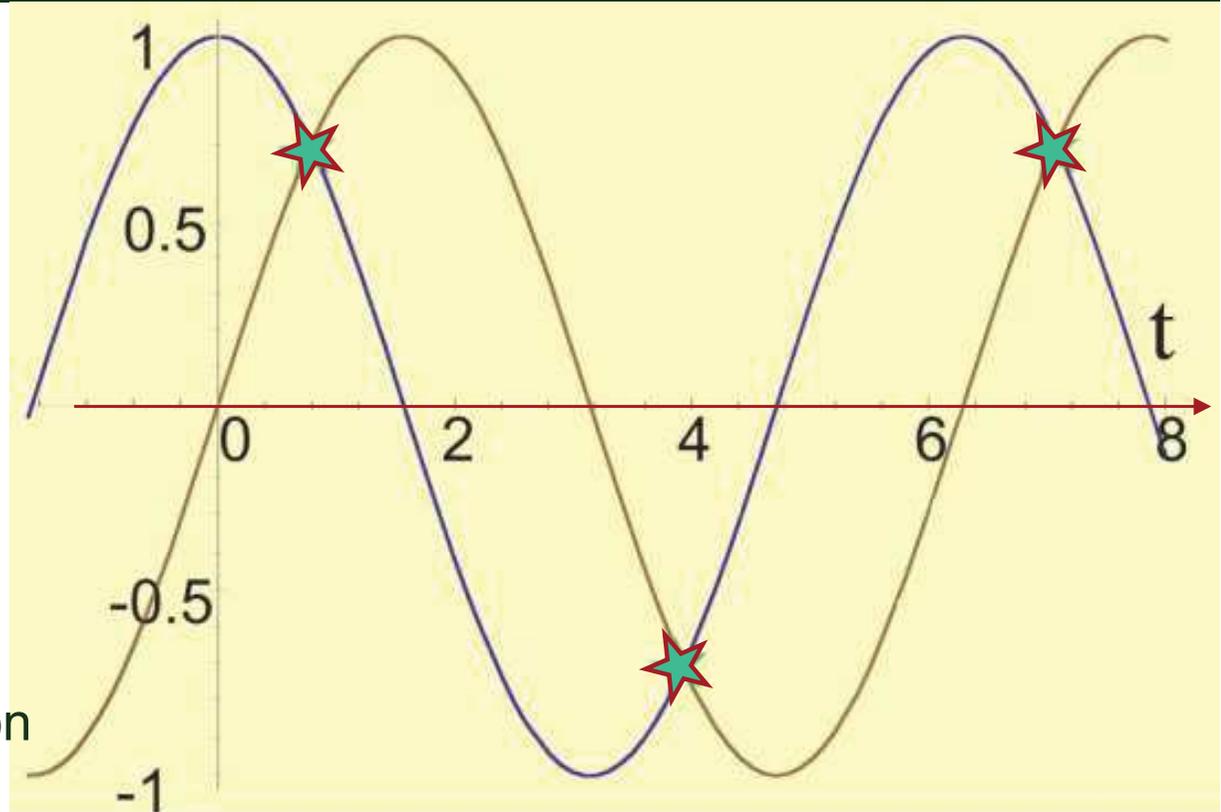
$$x(t) = \cos t,$$

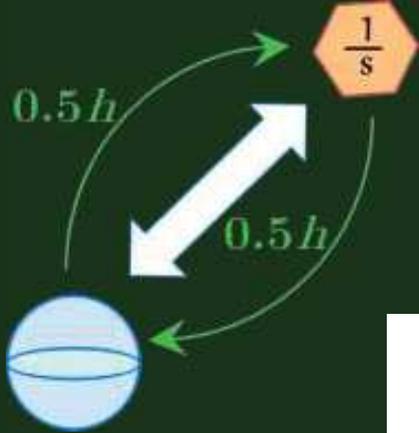
$$x(t) = \sin t,$$

...

→ notion d'« état » ?

variable  $\phi(t)$  générant une solution unique à partir de l'instant  $t$





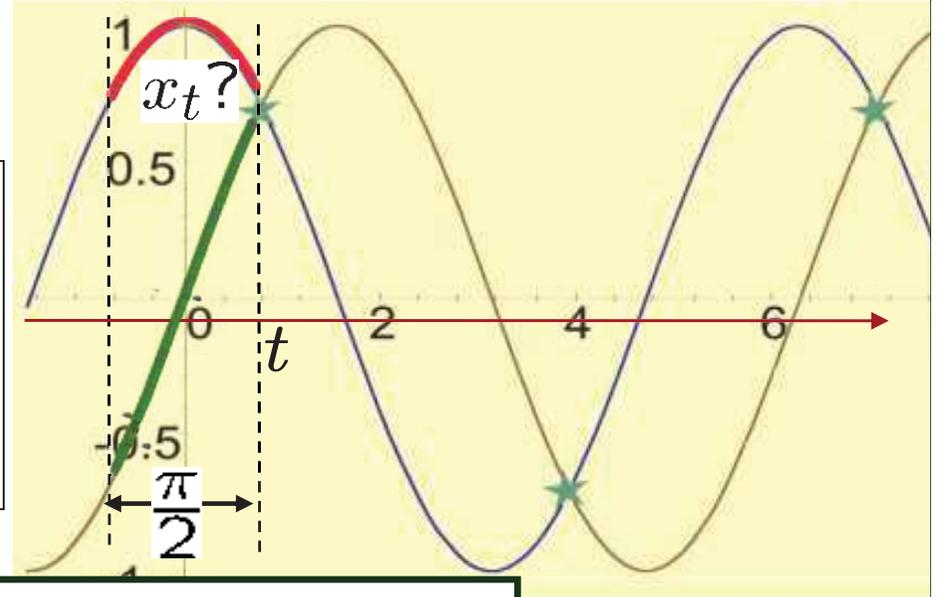
# Exemple simple (suite)

$$\dot{x}(t) + x(t - h) = 0$$

$$h = \frac{\pi}{2}$$

(notation de Shimanov, 1960)

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x_t, t, u_t), & t &\geq t_0, \\ x_t(\theta) &= x(t + \theta), & -h &\leq \theta \leq 0, \\ u_t(\theta) &= u(t + \theta), & -h &\leq \theta \leq 0, \\ x(\theta) &= \varphi(\theta), & t_0 - h &\leq \theta \leq t_0, \end{aligned}$$

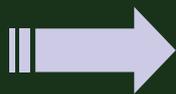


→ notion d' « état » ?

variable  $X(t)$  générant une solution unique à partir de l'instant  $t$

fonction  $x_t = \text{état}$  à l'instant  $t$

vecteur  $x(t) = x_t(0)$  solution à  $t$

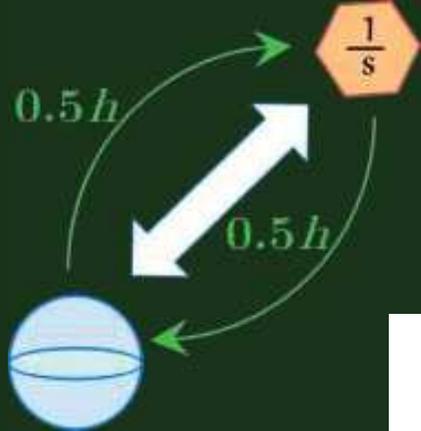


fonction  $x_t$



**sys. dim. infinie**

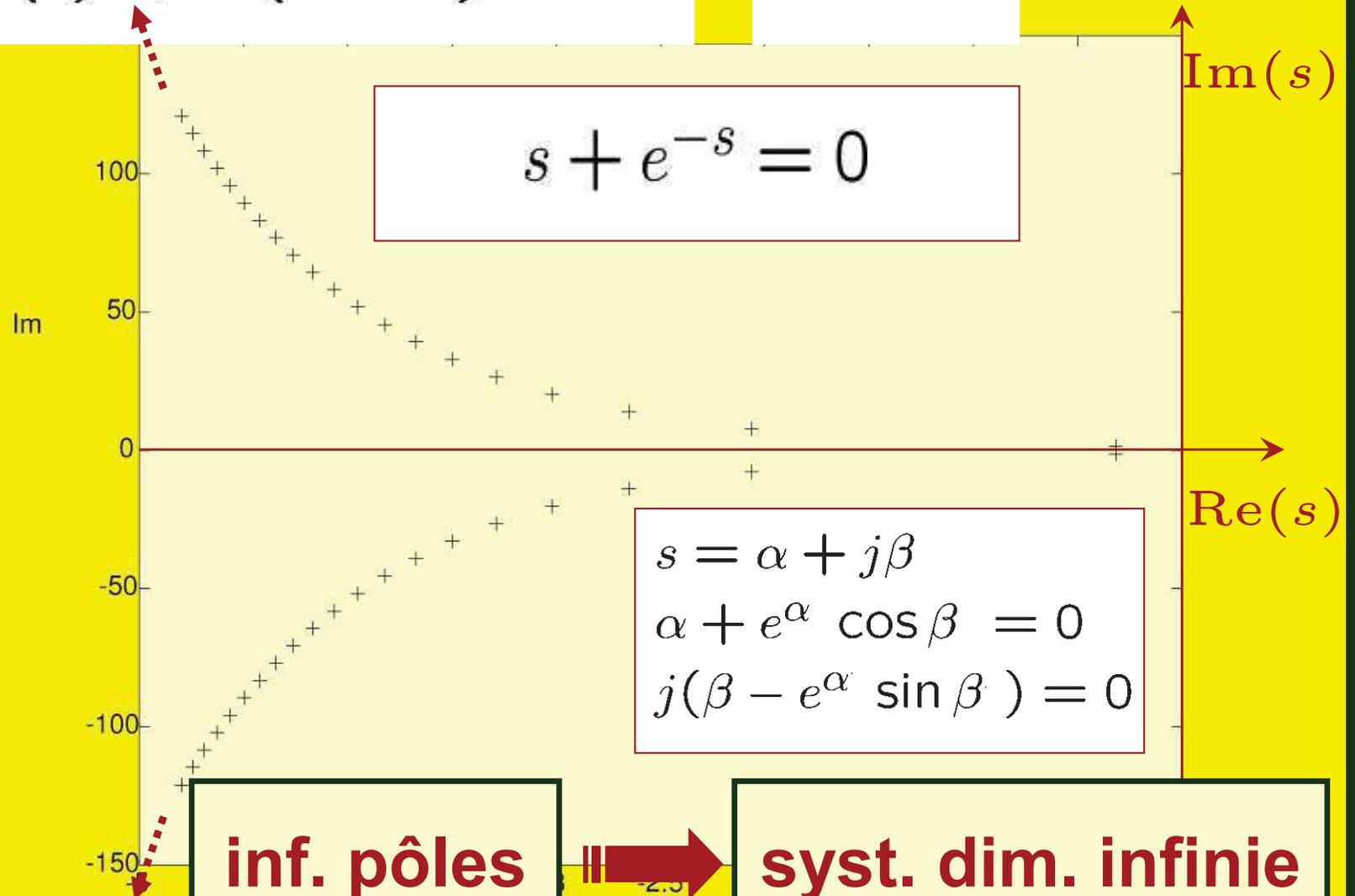
# Exemple simple (suite)



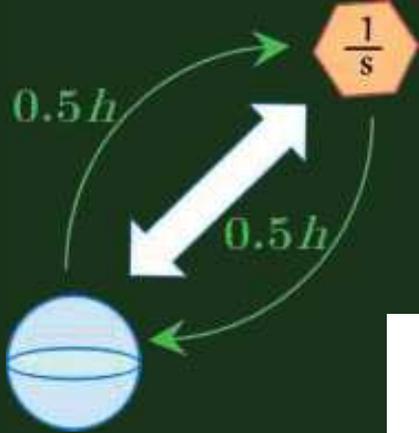
$$\dot{x}(t) + x(t - h) = 0$$

$$h = 1$$

pôles?



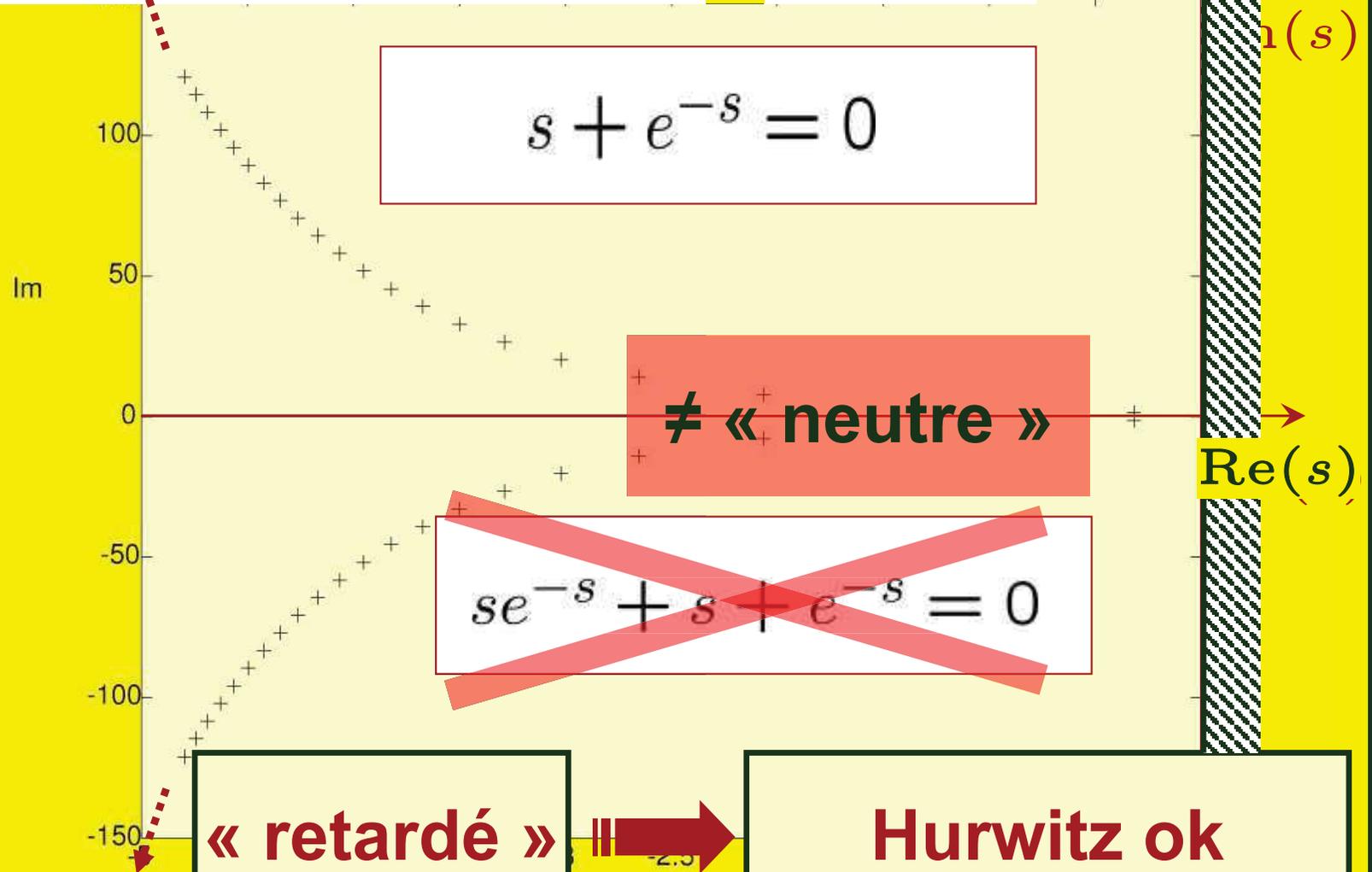
# Exemple simple (suite)



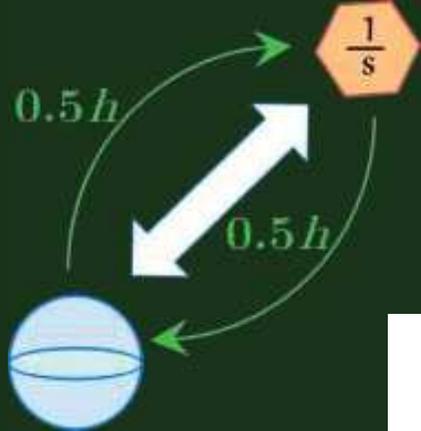
$$\dot{x}(t) + x(t - h) = 0$$

$$h = 1$$

critère  
de  
stabilité  
?



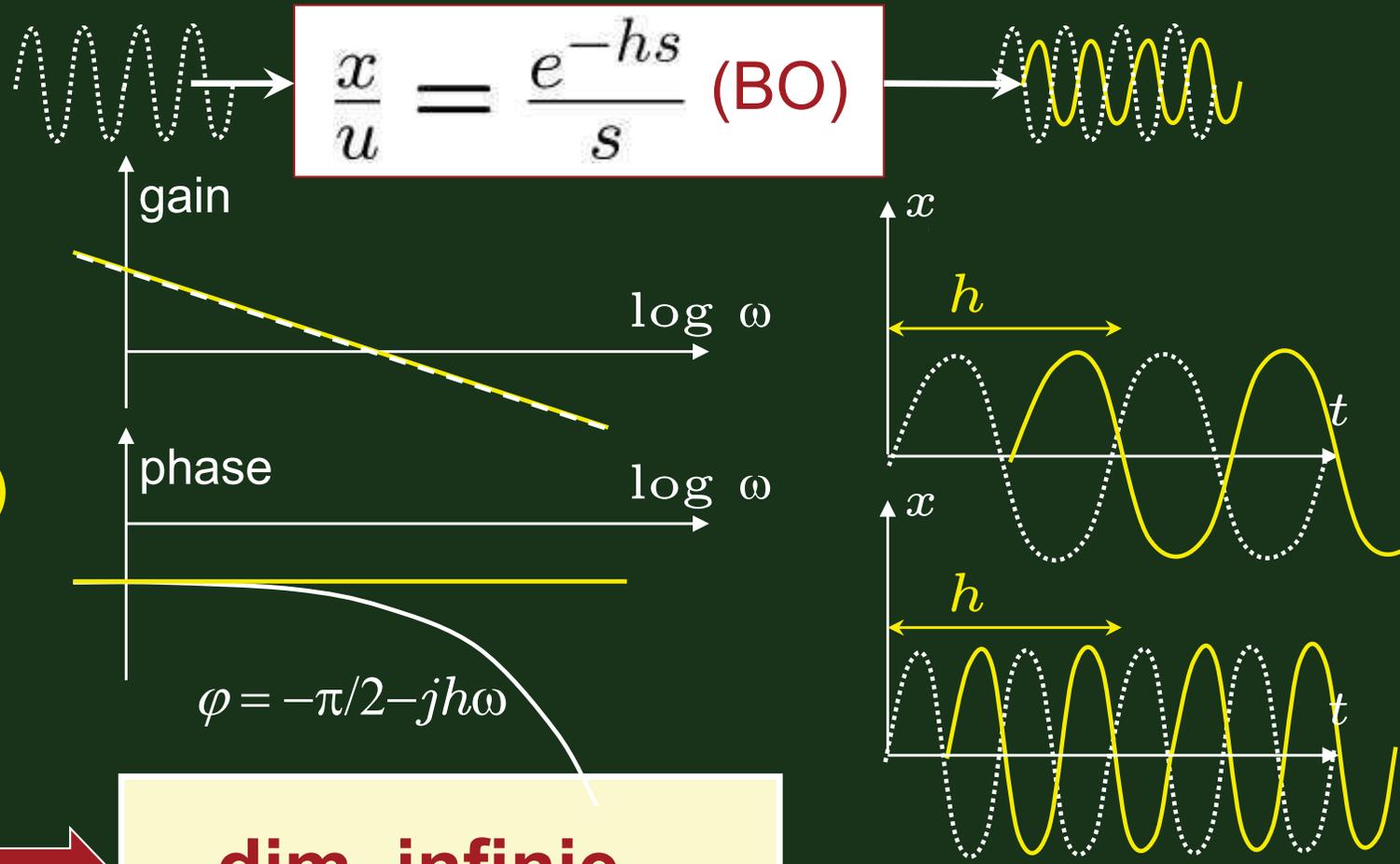
# Exemple simple (suite)



$$\dot{x}(t) + x(t - h) = 0$$

comportement fréquentiel ?  
(Bode, boucle ouv.)

déphasage  $\rightarrow \infty$

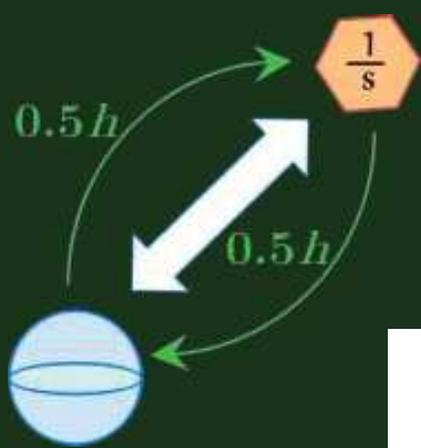


$$\frac{x}{u} = \frac{e^{-hs}}{s} \text{ (BO)}$$

**phase  $-\infty$**



**dim. infinie...**



## Exemple simple (fin!)

$$\dot{x}(t) + x(t - h) = 0$$

### *Résumons-nous...*

retard  $\Rightarrow$  forte influence sur la stabilité  
 état fonctionnel  
 nombre de pôles infini (Hurwitz OK, Routh non)  
 déphasage important (  $\rightarrow -\infty$  )

### *et, jusqu'ici, c'est assez simple*

retard constant  
 système linéaire « 1<sup>er</sup> ordre »

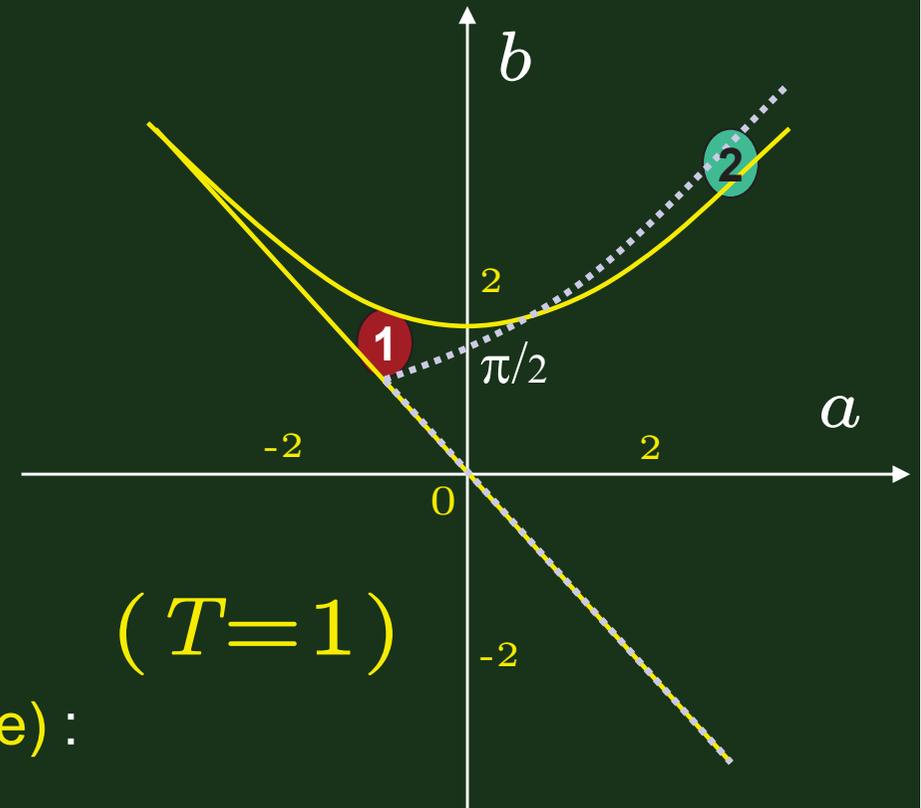
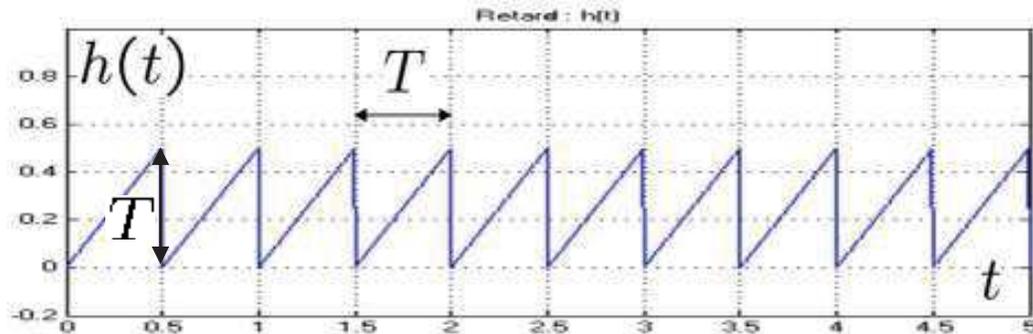
*pareil pour retards variables  $h(t)$  ?*

un contre-exemple...

# (contre-)exemple à retard variable

$$\dot{x}(t) = -ax(t) - bx(t - h(t)) \quad (1)$$

$$h(t) = t - kT \text{ pour } kT < t \leq (k+1)T$$



est asymptotiquement stable ssi (zone jaune) :

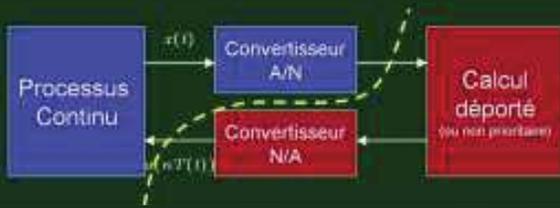
$$\left| \left(1 + \frac{b}{a}\right)e^{-aT} - \frac{b}{a} \right| < 1 \quad \text{si } a \neq 0$$

$$|1 - bT| < 1 \quad \text{si } a = 0$$

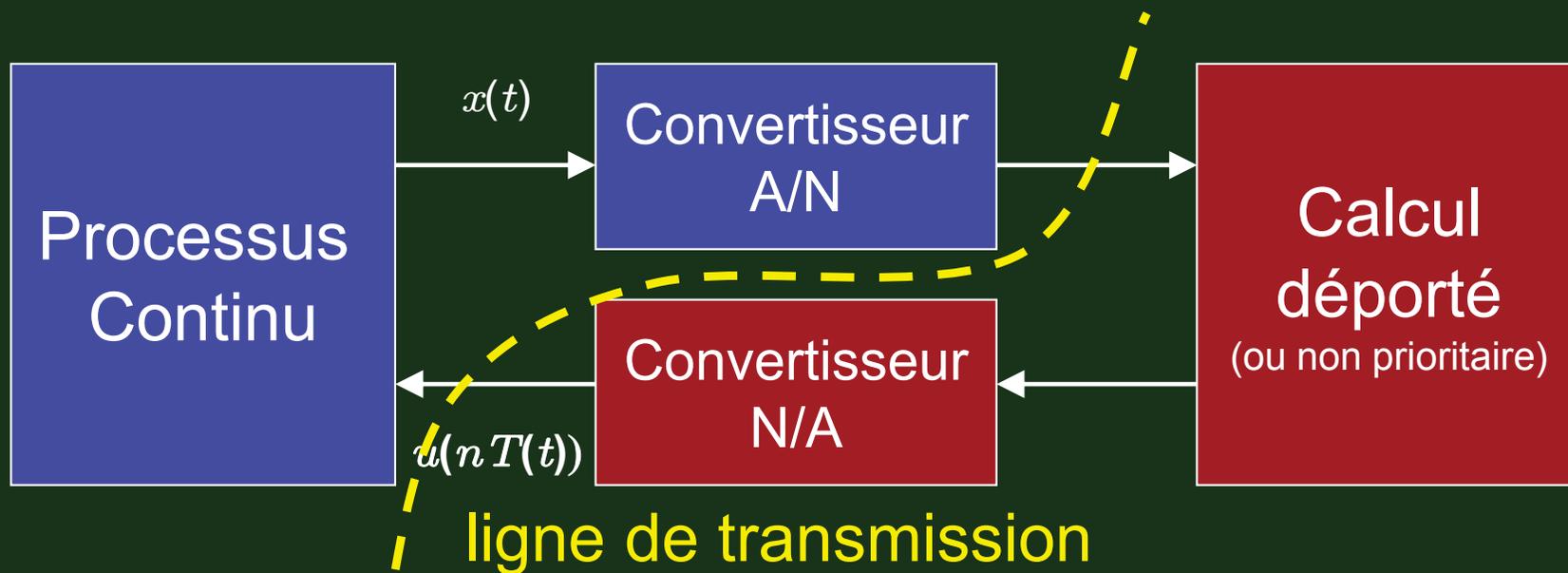
- 1 stable  $h(t) < 1$  - instable  $h = \text{cte} < 1$
- 2 instable  $h(t) < 1$  - stable  $h = \text{cte} < 1$

et, pour  $h = \text{cste} \in [0, 1]$  ssi (zone grise)

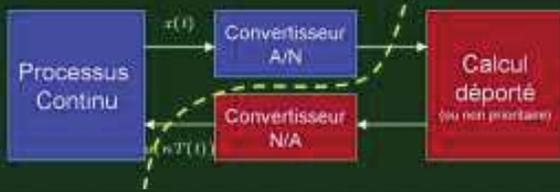
OK, mais ce type de  $h(t)$  est-il réaliste ? un autre exemple...



# 3<sup>e</sup> exemple : asynchronous sampling



$$u(t) = g(x(nT(t)))$$



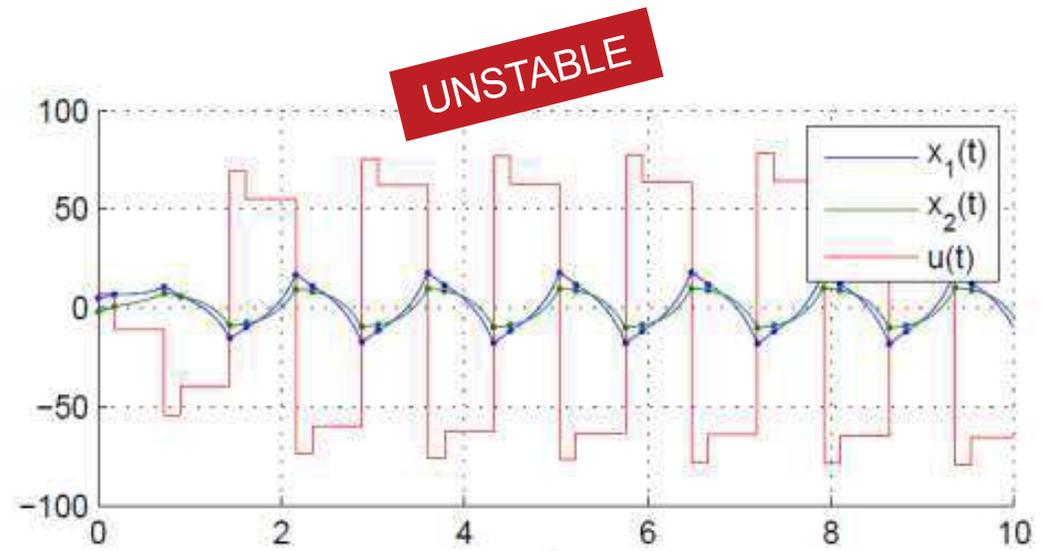
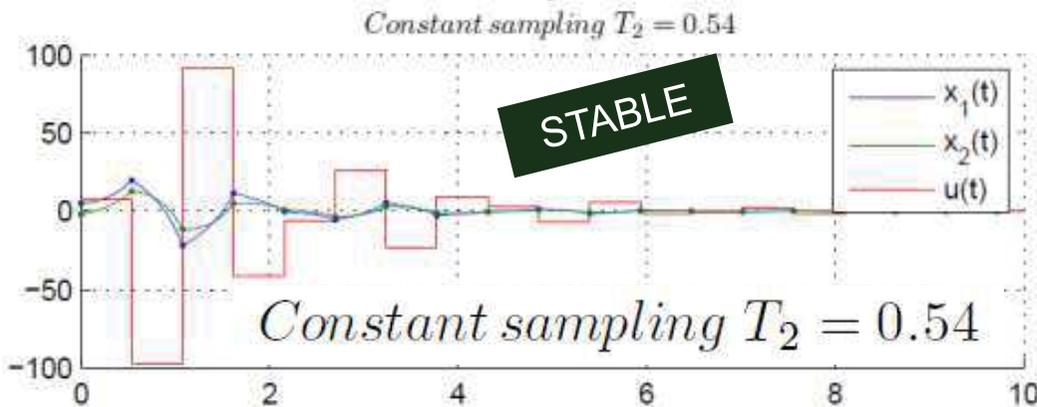
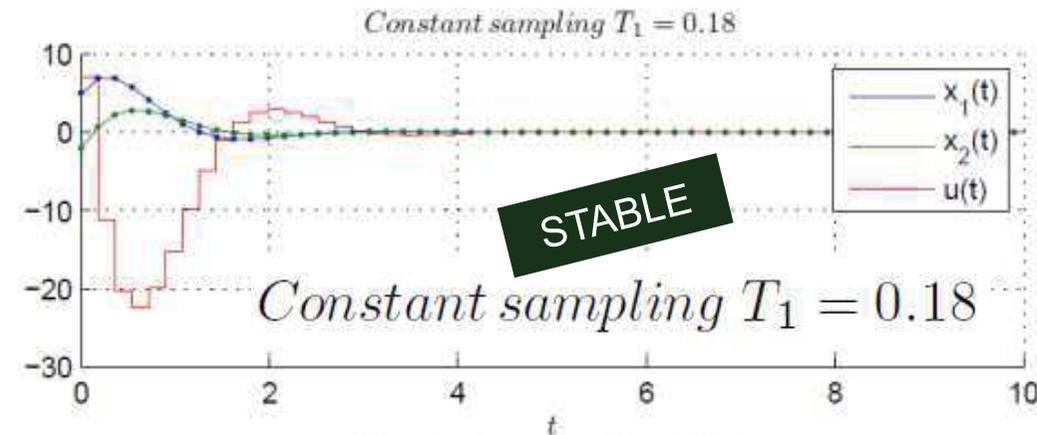
Time-varying sampling:  
→ any consequence?

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BKx(t_k), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

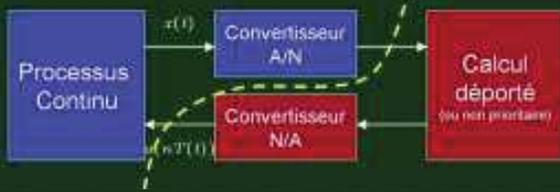
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.6 \end{bmatrix}, \quad K = -\begin{bmatrix} 1 & 6 \end{bmatrix}. \quad t_{k+1} = t_k + h_k$$

variations of the sampling interval  $h_k$  may induce instability.

[Zhang, Branicky, Phillips. - IEEE Ctrl.Syst.Mag. 2001]



$T_1 \rightarrow T_2 \rightarrow T_1 \dots$

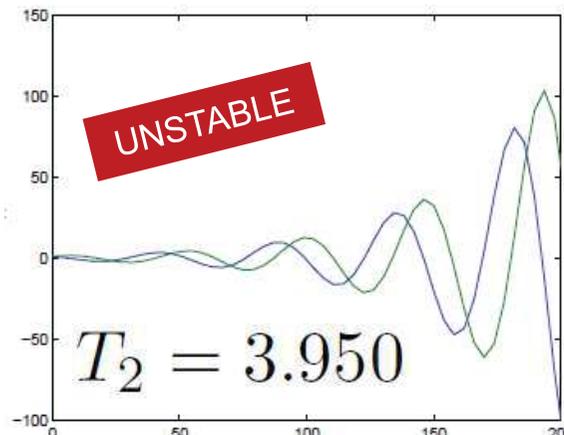
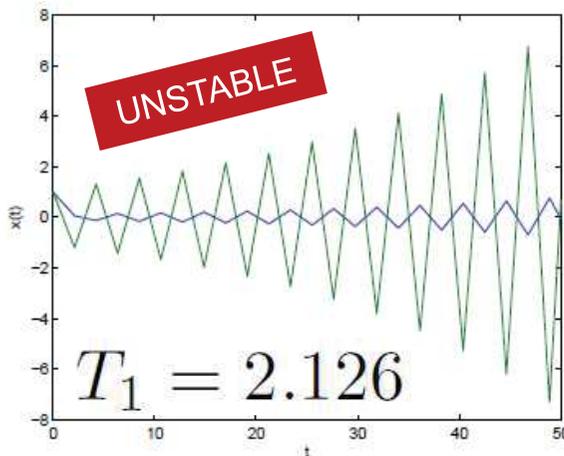


Time-varying sampling:  
→ any consequence?

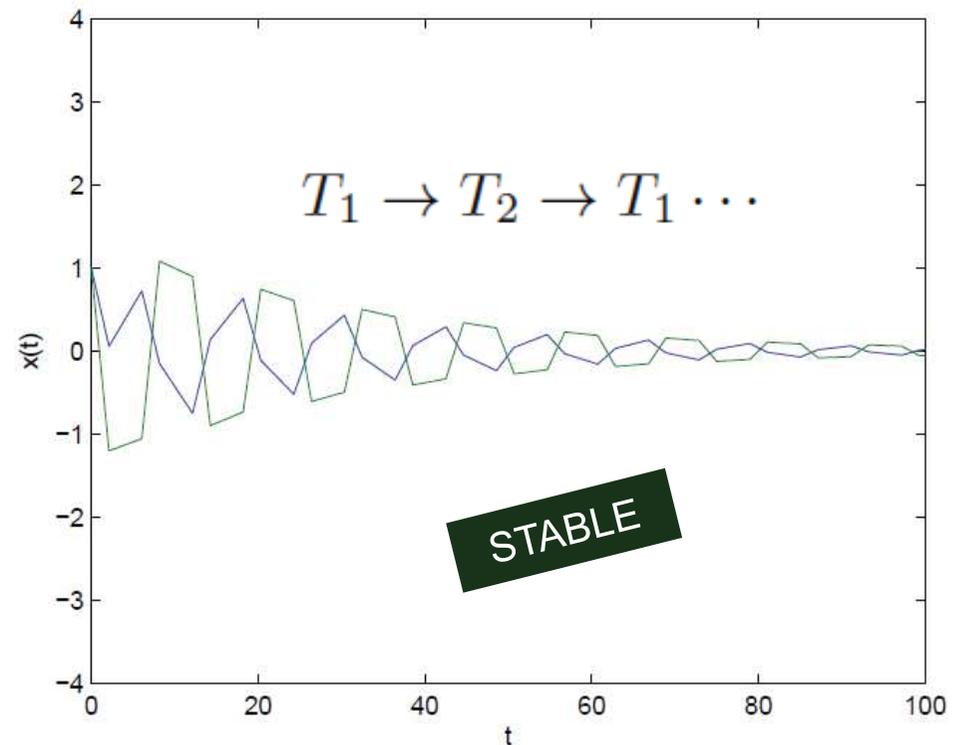
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BKx(t_k), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

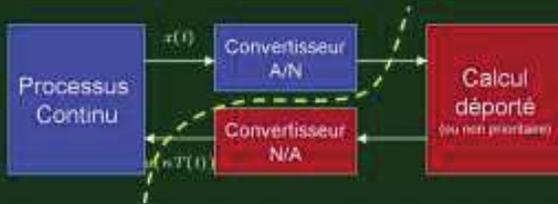
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad t_{k+1} = t_k + h_k$$

variations of the sampling interval  $h_k$  may induce instability



[Gu, Kharitonov, Chen - Birkhauser 2003]





## Models for aperiodic sampling

*Input-Output approach*

*Hybrid / Impulsive syst.*

*Input delay systems*

"Tutorial on Arbitrary and State-Dependent Sampling "

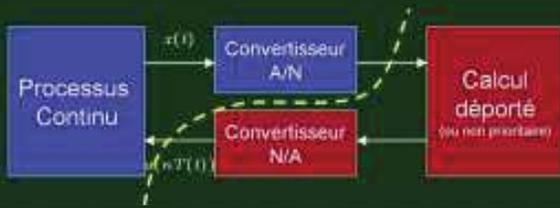
C. FITER, H. OMRAN, L. HETEL, J.P. RICHARD

European Control Conf., Strasbourg, France, 2014

"A robust stability framework for time-varying sampling"

C. FITER, L. HETEL, W. PERRUQUETTI, J.P. RICHARD

Automatica, 45: 56-64, 2015.

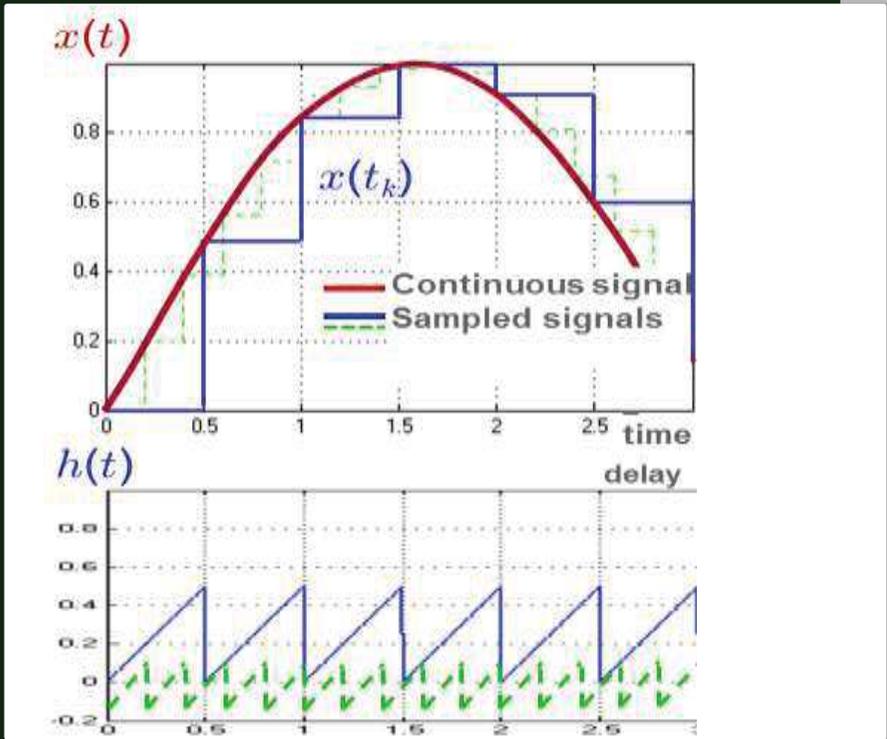


# Models for aperiodic sampling

*Input-Output approach*

*Hybrid / Impulsive syst.*

*Input delay systems*



$$x(t_k) = x(t - [t - t_k]) = x(t - h(t))$$

+ stability techniques for TDS

*Lyapunov-Krasovskii functionals*

$$V(t, x_t, \dot{x}_t) = x^T(t)Px(t) + (\bar{h} - \tau(t)) \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds$$

*Mikheev-Sobolev-Fridman AutRem.Ctrl 1988,*

*Nešić -Teel-Kokotović CDC1998,*

*Fridman-Seuret-Richard Aut 04, Fridman Aut 10, Seuret Aut 12,*

*Karafyllis-Krstić TAC 12,*

*Mazenc-Malisoff-Dinh Aut 13*



# Généralités

# Classification

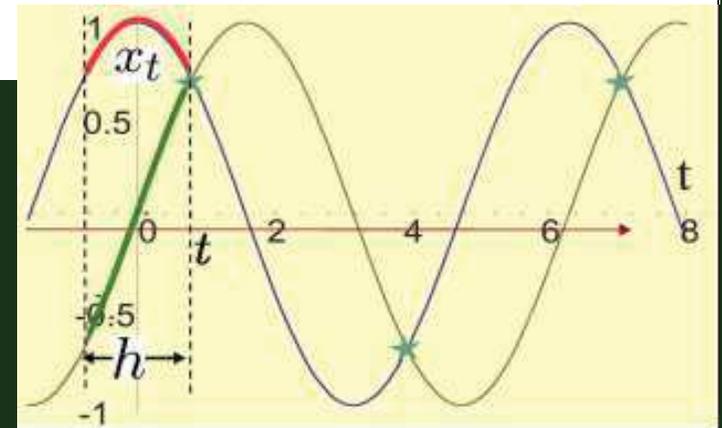
- systèmes de type retardé

$$\dot{x}(t) = f(x_t, t, u_t)$$

$$\begin{aligned} x_t(\theta) &= x(t + \theta), & -h \leq \theta \leq 0, \\ u_t(\theta) &= u(t + \theta), & -h \leq \theta \leq 0, \\ x(\theta) &= \varphi(\theta), & t_0 - h \leq \theta \leq t_0, \end{aligned}$$

- systèmes de type neutre

$$\dot{x}(t) = f(x_t, \dot{x}_t, t, u_t)$$

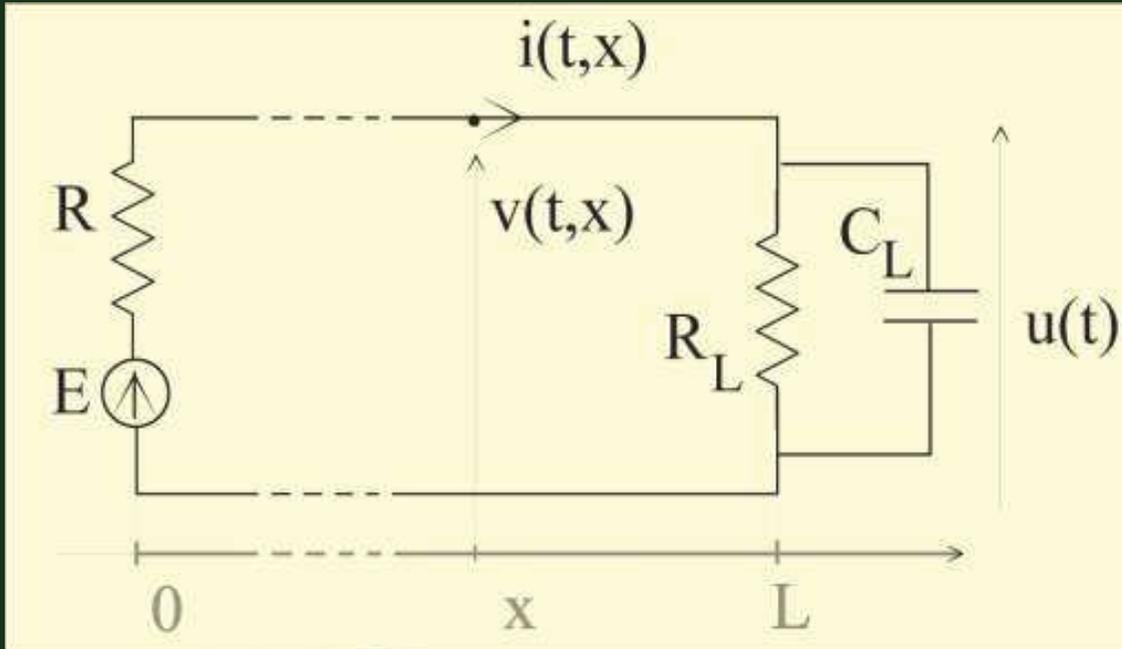


## Classification

# exemple 5

- système de type neutre :  
ligne de transmission sans perte

$$\dot{x}(t) = f(x_t, \dot{x}_t, t, u_t)$$



$$\begin{cases} L \frac{\partial i}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial x} , \\ C \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial i}{\partial x} , \end{cases}$$

+ conditions aux limites ( $x=0, L$ ) :

$$\begin{cases} v(t, 0) = E - Ri(t, 0) , \\ i(t, L) = \frac{1}{R_L}u(t) + C_L \frac{du}{dt}(t) . \end{cases}$$

transformation de d'Alembert  $(v, i) \rightarrow (\phi, \psi)$  :

$$v(t, x) = \phi(x - ct) + \psi(x + ct)$$

$$Zi(t, x) = \phi(x - ct) - \psi(x + ct)$$

$$c = (LC)^{-1/2}, \quad Z = (L/C)^{1/2}$$

$$\tau = 2L/c, \quad \kappa = (Z - R)/(Z + R)$$

$$\dot{u}(t) - \kappa \dot{u}(t - \tau) + \alpha u(t) + \beta u(t - \tau) = \alpha E$$

## Classification

# exemple 6

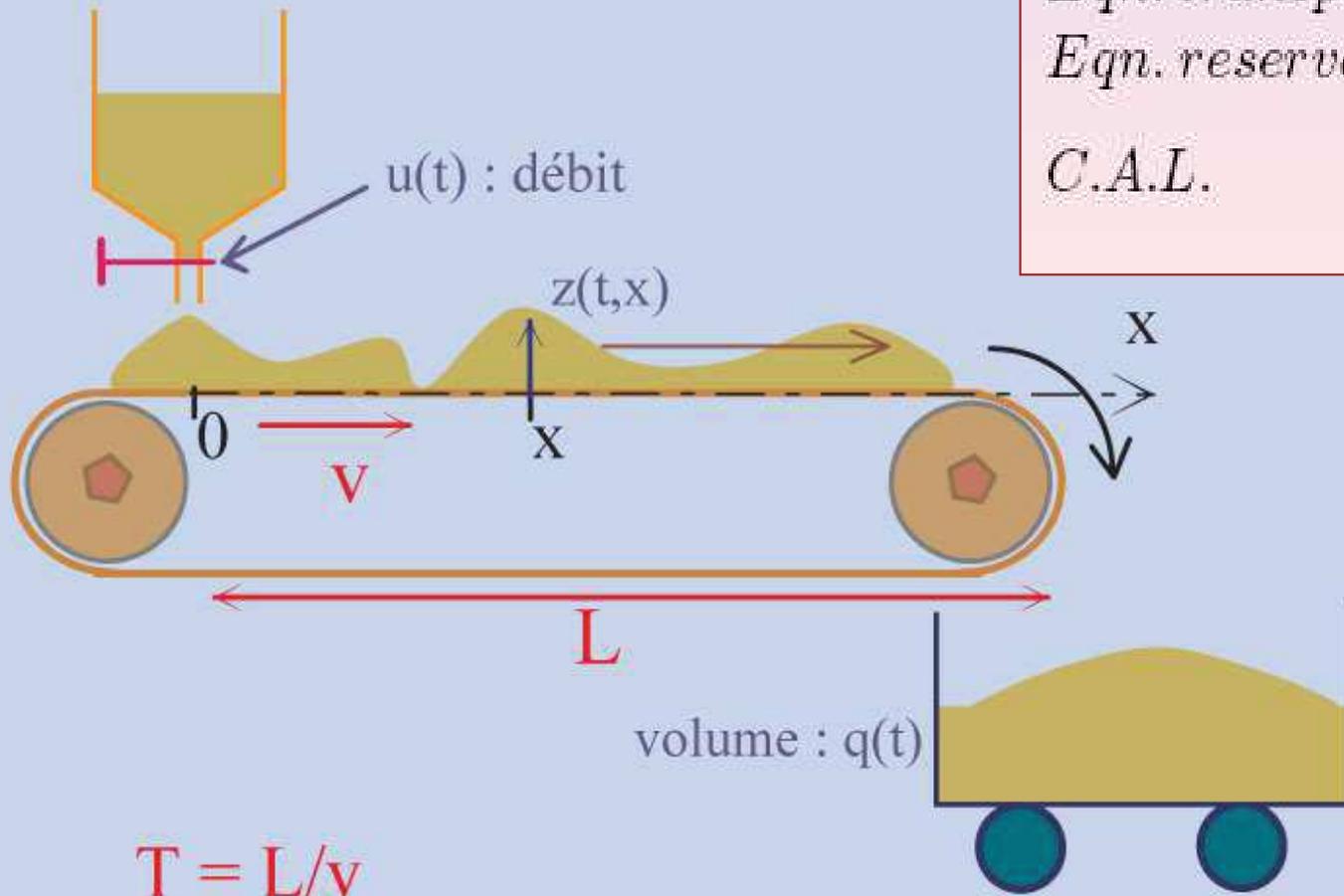
- système de type retardé :  
équation de transport

$$\dot{x}(t) = f(x_t, t, u_t)$$

$$\text{Eqn. transport : } \frac{\partial z}{\partial t} + v \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\text{Eqn. reservoir : } \dot{q}(t) = y(t)$$

$$\text{C.A.L. } \begin{cases} y(t) = H \frac{\partial z}{\partial t}(t, L) \\ H \frac{\partial z}{\partial t}(t, 0) = u(t) \end{cases}$$



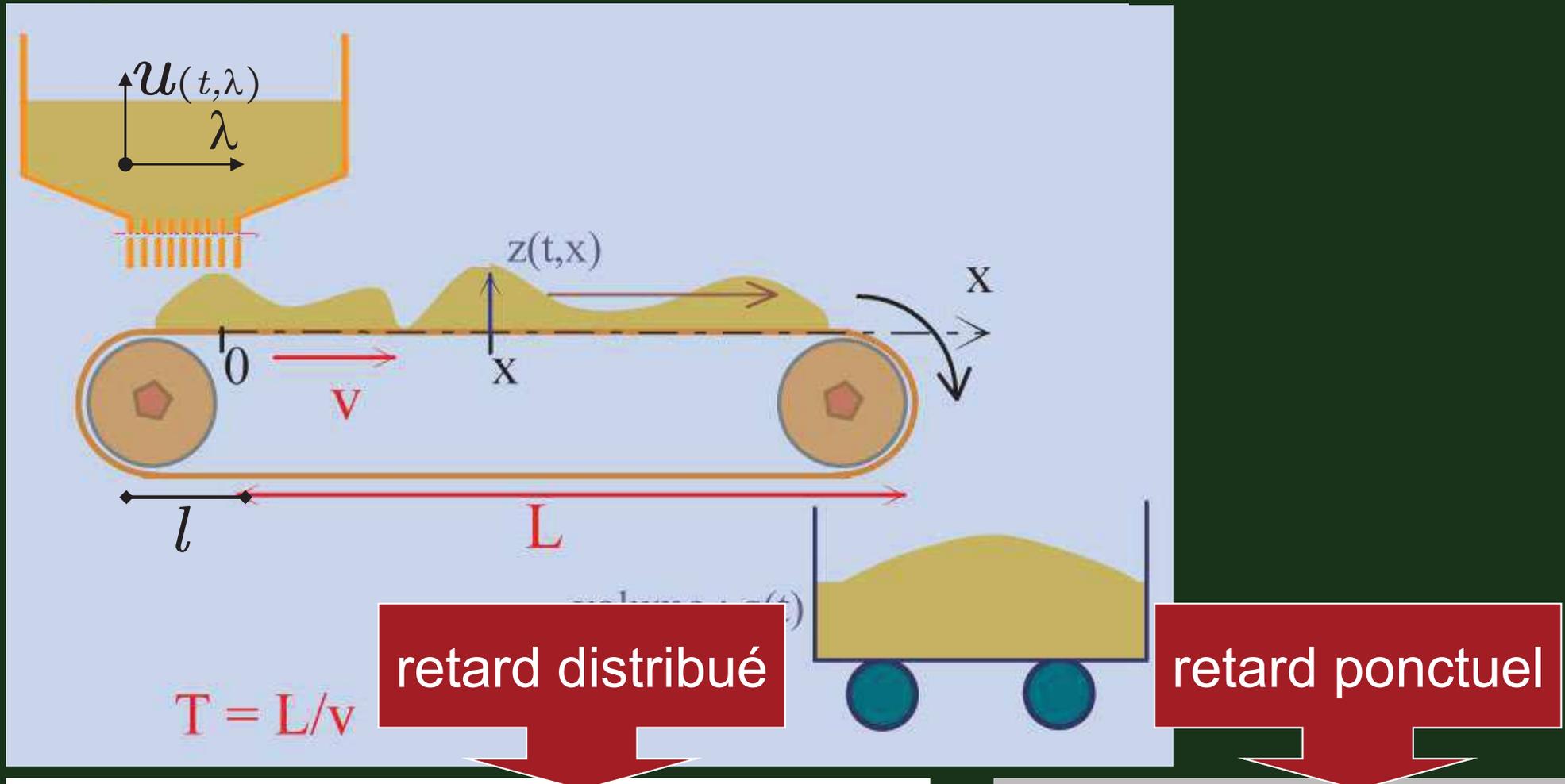
$$\dot{q}(t) = u\left(t - \frac{L}{v}\right)$$

## Classification

# exemple 6 bis

- système de type retardé :  
équation de transport

$$\dot{x}(t) = f(x_t, t, u_t)$$

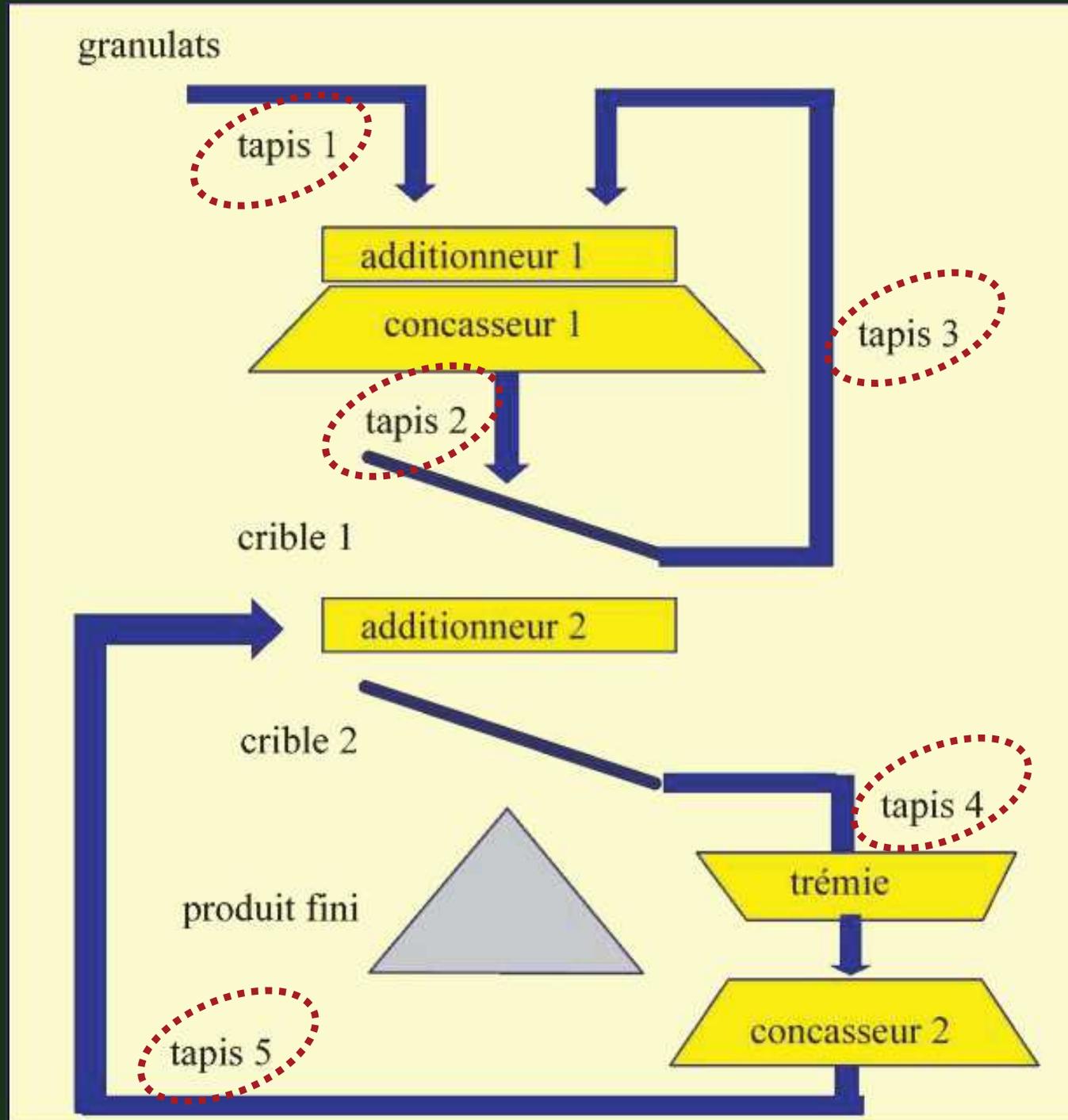


$$\dot{q}(t) = \int_{-l}^0 u\left(t - \frac{L}{v} + \frac{\lambda}{v}, \lambda\right) d\lambda$$

$$\dot{q}(t) = u\left(t - \frac{L}{v}\right)$$

## Classification

NB : la réalité est un peu plus compliquée...



# Exemple 7 : macro-modèle de réseau

- modèle « par session » (ATM, TCP)

[Mascolo 99] → contrôle de congestion par prédicteur de Smith

$$\dot{x}_j(t) = \sum_{i=1}^{n_j} u_{ij}(t - \tau_{ij}) - d_j$$

$x_j$  niveau du tampon mémoire associé à la session  $l_j$

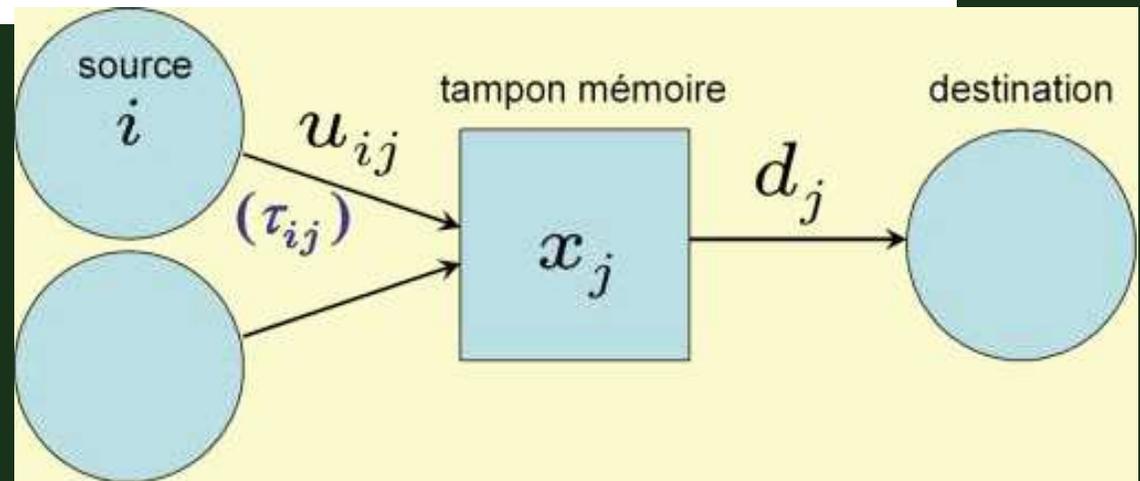
$u_{ij}$  débit de la source  $i$  (commande)

$n_j$  nombre de sessions partageant le tampon  $j$

$\tau_{ij}$  retard de propagation de source  $i$  vers tampon  $j$

$d_j$  débit de service du tampon  $j$  (perturbation)

→ système de type retardé



# Problème de Cauchy

(existence de solution pour un SàR)

- Notion de solution
- Condition de type Lipschitz
- Cas où le retard peut s'annuler

direct  
formal.

direct  
commd.

direct  
Lyap..

direct  
biblio

## 2.3 Notion of solution

System  $(S)$  :  $\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau(t)))$

with  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , and  $0 \leq \tau(t) \leq \tau$

Let  $\varphi : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$  be an arbitrary map.

**Definition:** A map  $x(t) : [t_0 - \tau, t_0 + b) \rightarrow \mathbb{R}^n$  s.t.

1)  $x(t_0 + s) = \varphi(s)$ , for all  $s$  in  $[-\tau, 0]$ ;

2)  $x$  is continuous over  $[t_0, t_0 + b)$ ;

3)  $x$  satisfies  $(S)$  over  $[t_0, t_0 + b)$  ( $\dot{x}$  right-hand, Dini)

is called a **solution** of  $(S)$  with initial value  $\varphi$  at  $t_0$ .

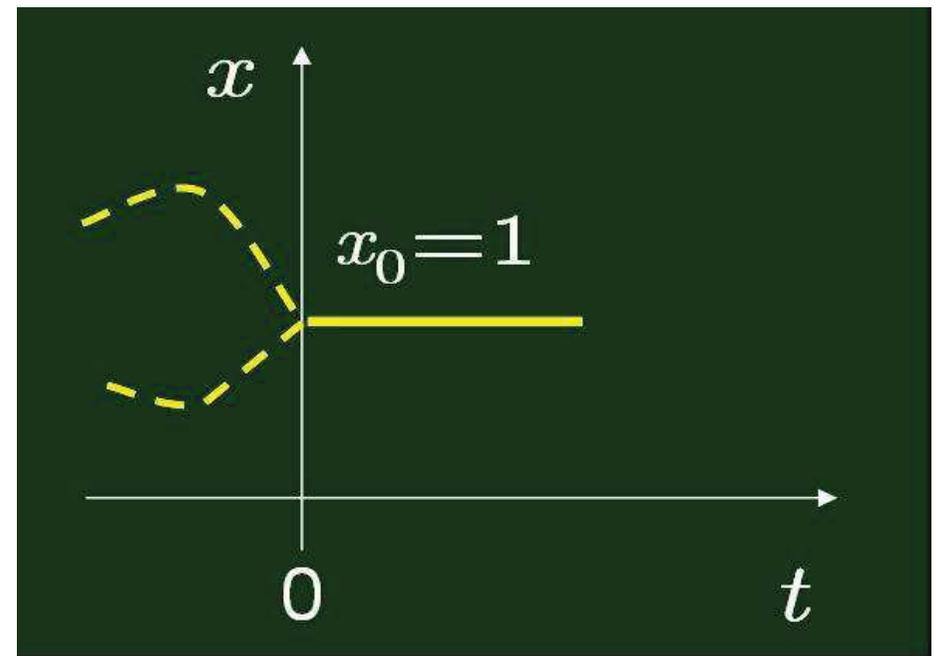
If only one map satisfies these 3 points, then the solution is **unique**.

**Remark:** There is a weaker notion of solution, where

2)  $\rightarrow x$  absolutely continuous function over  $[t_0, t_0 + b)$

3)  $\rightarrow x$  satisfies  $(S)$  almost everywhere on  $[t_0, t_0 + b)$

## Remark



Even if unicity holds, *different solutions may coincide after a finite time*. For instance:

$$\dot{x}(t) = -x(t - \tau)[1 - x(t)],$$

$$x(t, \varphi) = 1 \quad (\forall t \geq 0)$$

for any  $\varphi \in C([-\tau, 0], \mathbb{R})$  such that  $\varphi(0) = 1$ .

**(donc, généralement, non-unicité de la réversion de trajectoire)**

## 2.4 Existence and uniqueness of solutions

For system (S) with  $0 < \delta \leq \tau(t) \leq \tau_m$ :

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau(t))).$$

Consequence of the step method:

Given a continuous map  $\varphi \in \mathcal{C}$ , if the ODE

$$\dot{x}(t) = f_\varphi(t, x(t)) \equiv f(t, x(t), \varphi(t - \tau(t)))$$

has a (unique) solution, then there exists a (unique) solution of (S) with initial condition  $\varphi$

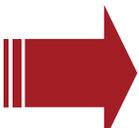
From there, using classical Cauchy-Lipschitz conditions:

→ Conditions of existence and uniqueness (I):

If  $f$  is a continuous map and satisfies a local Lipschitz condition in  $x$ ,

$$\|f(t, x_2, y) - f(t, x_1, y)\| \leq K \|x_2 - x_1\|,$$

then for any initial condition  $\varphi \in \mathcal{C}$ , (S) has a unique solution, depending continuously on  $f$  and  $\varphi$ .

  
( $x(t)$ )

## Cauchy pb.

If the delay can become zero,  $0 \leq \tau(t) \leq \tau_m$ , the step method does not apply anymore

⇒ need of a general framework: **FDEs** [Myshkis 49]

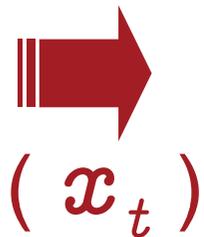
$$(RFDE) : \quad \dot{x}(t) = F_R(t, x_t) \quad (\text{retarded type})$$

Conditions of existence and uniqueness (II):

If  $F_R$  is a continuous map with local-Lipschitz cond. in its second (functional) argument, i.e.

$$\|F_R(t, \varphi_2) - F_R(t, \varphi_1)\| \leq K \|\varphi_2 - \varphi_1\|_C, \dots$$

then for any initial condition  $\varphi \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$ , (RFDE) has a unique solution, depending continuously on  $F_R$  and  $\varphi$ .



**Stabilité**

# Stabilité

- Equilibre
- Définition(s)
- Théorèmes

# Stabilité : équilibre

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x_t), \\ x_{t_0} &= \psi, \quad \psi \in \mathcal{C}[-h, 0]. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Nous supposons que  $f(t, \varphi)$  est continue, bornée pour  $\varphi$  bornée, localement lipschitzienne en  $\varphi$ . La solution de (5.1) est notée  $x(t, t_0, \psi)$ .

**Définition 1.** *La fonction  $\varphi_e \in \mathcal{C}[-h, 0]$  est un état d'équilibre de (5.1) si pour tout  $t_0 \in \mathbb{R}$ , la solution  $x(t, t_0, \varphi_e)$  existe et vérifie  $x(t, t_0, \varphi_e) = \varphi_e$ .*

**Théorème 1.** [19] *La fonction  $\varphi_e \in \mathcal{C}[-h, 0]$  est un état d'équilibre de (5.1) si, et seulement si, les trois conditions suivantes sont vérifiées :*

- (i)  $\forall t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $x(t, t_0, \varphi_e)$  existe et est unique;
- (ii)  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $f(t, \varphi_e) = 0$ ;
- (iii)  $\varphi_e$  est une fonction constante de  $\mathcal{C}[-h, 0]$  :  $\forall \theta \in [-h, 0], \varphi_e(\theta) = x_e$ .

On parlera donc indifféremment d'état d'équilibre ( $\varphi_e$ ) ou de *point d'équilibre* ( $x_e$ ).

# Stabilité : définitions

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t)$$

**Définition 2.** *L'équilibre  $x = 0$  du système (5.1) est dit :*

1. *stable si  $\forall \varepsilon > 0, \forall t_0, \exists \delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0, \psi \in \mathcal{B}_\delta \Rightarrow x(t, t_0, \psi) \in \mathcal{B}_\varepsilon$ ;*
2. *uniformément stable par rapport à  $t_0$  si la propriété précédente est vérifiée avec  $\delta = \delta(\varepsilon)$  (donc  $\delta$  indépendant de  $t_0$ );*
3. *asymptotiquement stable s'il est stable et s'il existe  $\eta = \eta(t_0) > 0$  tel que  $[\psi \in \mathcal{B}_\eta] \Rightarrow [\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, t_0, \psi) = 0]$ ;*
4. *uniformément asymptotiquement stable s'il est uniformément stable et si la limite de la propriété précédente est uniforme, c'est-à-dire si  $\exists \eta > 0 : \forall \gamma > 0, \exists T(\gamma) > 0 : [\psi \in \mathcal{B}_\eta \text{ et } t \geq T(\gamma)] \Rightarrow [x(t, t_0, \psi) \in \mathcal{B}_\gamma] \forall t_0$ ;*
5. *globalement (uniformément) asymptotiquement stable s'il est (uniformément) asymptotiquement stable avec  $\eta = +\infty$ ;*
6. *globalement exponentiellement stable s'il existe deux nombres strictement positifs  $\alpha$  (appelé taux de convergence exponentielle) et  $k$  tels que :*

$$|x(t, t_0, \psi)| \leq k \|\psi\|_C e^{-\alpha(t-t_0)}. \quad (5.2)$$



**Rudolf Otto Sigismund Lipschitz**  
(1832-1903) Allemand, professeur à l'Université de Bonn

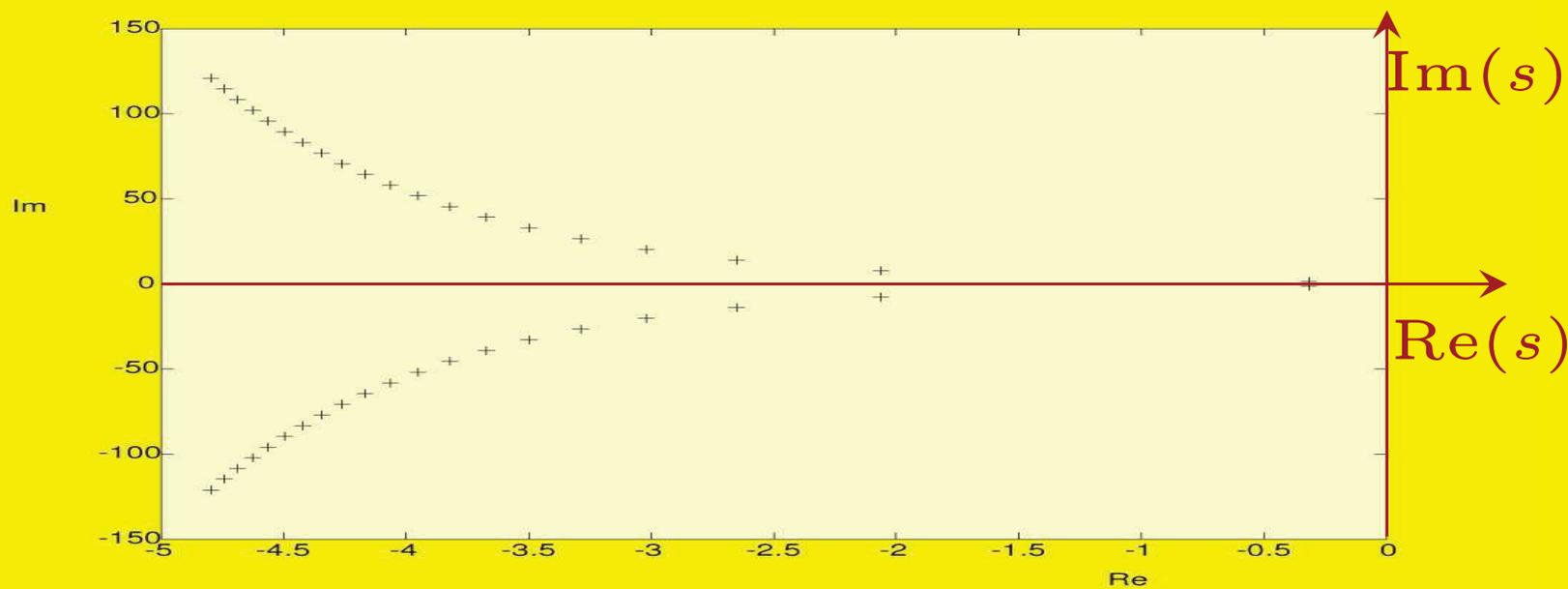
# Stabilité : cas linéaire stationnaire

**Théorème 2.** *Un système linéaire stationnaire de type retardé est globalement asymptotiquement stable si, et seulement si, toutes ses racines caractéristiques sont dans le demi-plan complexe gauche (l'axe imaginaire étant exclu).*

# Stabilité : cas linéaire stationnaire

**Théorème 2.** *Un système linéaire stationnaire de type retardé est globalement asymptotiquement stable si, et seulement si, toutes ses racines caractéristiques sont dans le demi-plan complexe gauche (l'axe imaginaire étant exclu).*

**Exemple 1:** *Considérons l'équation  $\dot{x}(t) = -x(t-1)$ . Son équation caractéristique est  $s + e^{-s} = 0$ , dont les solutions  $s = \alpha \pm j\beta$  sont en nombre infini. Le système n'est donc pas dégénéré. Ici,  $s = -0.318 \pm 1.337j$  est une estimation de la paire de racines de plus grande partie réelle : il y a donc stabilité asymptotique<sup>2</sup>.*



# Stabilité : cas linéaire stationnaire

**Théorème 2.** *Un système linéaire stationnaire de type retardé est globalement asymptotiquement stable si, et seulement si, toutes ses racines caractéristiques sont dans le demi-plan complexe gauche (l'axe imaginaire étant exclu).*

**Exemple 1:** *Considérons l'équation  $\dot{x}(t) = -x(t-1)$ . Son équation caractéristique est  $s + e^{-s} = 0$ , dont les solutions  $s = \alpha \pm j\beta$  sont en nombre infini. Le système n'est donc pas dégénéré. Ici,  $s = -0.318 \pm 1.337j$  est une estimation de la paire de racines de plus grande partie réelle : il y a donc stabilité asymptotique<sup>2</sup>. Par contre, le cas suivant est dégénéré et instable :*

**Exemple 2:**

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ +\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & +\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t-h),$$

$$\Delta(s) = s(s^2 - 1). \quad \text{Instable (et « dégénéré »)}$$


$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= A_0 x(t) + A_1 x(t-h), \\ \det(sI - A_0 - e^{-hs} A_1) &= \dots s(s^2 - 1). \end{aligned}$$

# Méthode de Walton et Marshall (1987)

Extrait de Borne, Dauphin, Richard, Rotella, Zambettakis

*Analyse et régulation des processus industriels - Régulation continue*. 495 pages, Edt. Technip 1993

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bx(t - \tau) \\ p(s, \tau) &= \det[sI - A - Be^{-\tau s}] = 0. \end{aligned}$$

$$p(s, \tau) = D(s) + N(s)e^{-\tau s} = 0, \quad (10.35)$$

où  $N$  et  $D$  sont deux polynômes réels.

Pour analyser la stabilité, l'idée est de chercher s'il existe des valeurs du retard  $\tau_j$  pour lesquelles cette équation caractéristique admet des racines imaginaires pures, et c'est en ces points  $\tau_j$  qu'un changement dans le comportement asymptotique du système (10.33) peut se produire. On est donc amené à calculer un lieu des racines paramétré en  $\tau$ . La procédure est la suivante :

1. Déterminer la situation des racines du système non retardé ( $p(s, 0) = 0$ ).
2. Calculer le polynôme  $q(\omega^2) = D(j\omega)D(-j\omega) - N(j\omega)N(-j\omega)$ , obtenu à partir de l'équation  $p(s, \tau) = 0 = p(\bar{s}, \tau)$  pour les racines imaginaires pures  $s = j\omega$ .
3. Rechercher les éventuelles racines  $\omega_j$  réelles positives de  $q(\omega^2) = 0$ , qui correspondent aussi à des racines de  $p(s, \tau) = 0$ .
4. Etudier le comportement du lieu des racines en ces points  $\omega_j$  : si  $q(\omega_j^2)$  traverse l'abscisse (axe des  $\omega^2$ ) de haut en bas,  $p(s, \tau_j)$  traverse l'axe imaginaire de la droite vers la gauche, et on a donc stabilité à partir de  $\tau > \tau_j$  (jusqu'à  $\tau = \tau_{j+1}$  au moins).

Cette méthode donne en général de bons résultats, mais est difficilement applicable si le modèle est paramétré par d'autres coefficients que  $\tau$ .

• Exemple 1

On considère le système de la figure 10.31, avec  $D(s) = (s + 2)^2$ ,  $N(s) = -1/4$ .

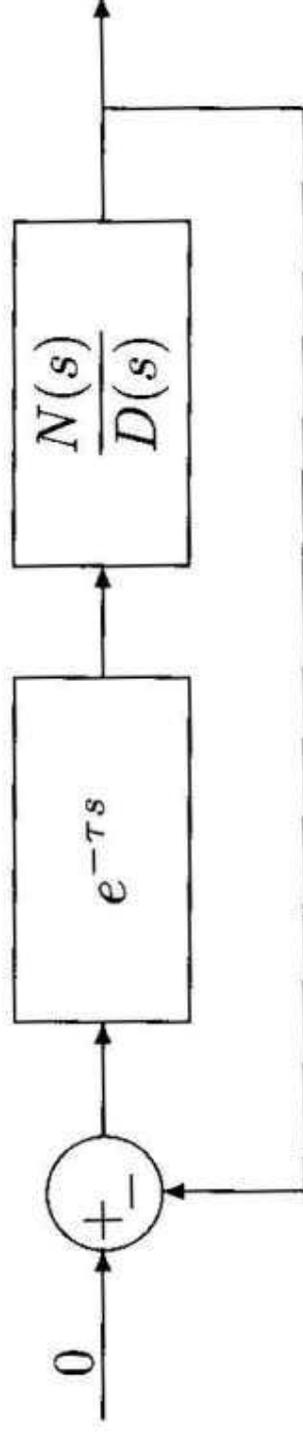


FIG. 10.31 : Système linéaire retardé.

1. Système non retardé :

$$p(s, 0) = s^2 + 4s + \frac{15}{4} = \left(s + \frac{5}{2}\right) \left(s + \frac{3}{2}\right), \quad (10.36)$$

en  $\tau = 0$  les deux racines sont dans le demi-plan complexe gauche.

2.  $q(\omega^2) = (4 + \omega^2)^2 - \frac{1}{16} = \left(\omega^2 + \frac{15}{4}\right) \left(\omega^2 + \frac{17}{4}\right)$ .

3.  $q(\omega^2) = 0$  n'a pas de racines réelles positives.

4. Le système est donc stable indépendamment du retard  $\tau > 0$ .

- *Exemple 2*

Soit un système d'équation caractéristique :

$$p(s, \tau) = s^3 + s^2 + 2s + 1 + e^{-\tau s} = 0. \quad (10.37)$$

1.  $p(s, 0) = (s + 1)(s^2 + 2)$  est instable ;
2.  $q(\omega^2) = \omega^2(\omega^2 - 1)(\omega^2 - 2)$  ;
3.  $s = 0$  n'est pas racine de  $p(s, \tau) = 0$ , on l'écarte donc.

En  $\omega = 1$ ,  $p(j, \tau) = j + e^{-\tau j} = 0$ , pour  $\tau = \pi/2 + 2\pi n$ , la courbe  $q(\omega^2) \sim 1 - \omega^2$  traverse l'axe des  $\omega^2$  de haut en bas (pour  $\omega^2$  croissant) et  $p(s, \tau)$  traverse l'axe imaginaire de droite à gauche. On a donc stabilité après  $\tau > \pi/2 + 2\pi n$  ( $n$  entier positif).

En  $\omega = \sqrt{2}$ ,  $p(j\sqrt{2}, \tau) = -1 + e^{-\tau j\sqrt{2}} = 0$ , pour  $\tau = k\pi\sqrt{2}$ , la courbe  $q(\omega^2) \sim 2(\omega^2 - 2)$  traverse l'axe des  $\omega^2$  de bas en haut, et on a stabilité jusqu'à  $\tau < k\pi\sqrt{2}$  ( $k$  entier positif).

Le système (10.37) est donc asymptotiquement stable pour :

$$\frac{\pi}{2} < \tau < \pi\sqrt{2}, \quad \text{ou} \quad \frac{5\pi}{2} < \tau < 2\pi\sqrt{2}, \quad (10.38)$$

ou  $9\pi/2 < \tau < 4\pi\sqrt{2}$ , etc...

- **Exemple 3**

Soit le système :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t - \tau). \quad (10.39)$$

Soñ équation caractéristique s'écrit :

$$p(s, \tau) = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 1 & s + 1 + e^{-\tau s} \end{vmatrix} = s^2 + s + 1 + se^{-\tau s} = 0. \quad (10.40)$$

1.  $p(s, 0) = (s + 1)^2$ , asymptotiquement stable.
2.  $q(\omega^2) = (1 - \omega^2)^2$ .
3.  $\omega = 1$  est une racine double de  $q(\omega^2)$ , donc le lieu de  $p(s, \tau)$  touche l'axe imaginaire, sans le traverser, pour  $\tau = (2n + 1)\pi$ ,  $n$  entier positif.
4. Le système (10.39) est asymptotiquement stable, pour tout  $\tau \neq (2n + 1)\pi$ .

# Stabilité : 1ère méthode de Liapounov

« approximation des petits mouvements »



$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^k A_i x(t - h_i) + q(t, x_t) \quad (5.8)$$

$$q(t, x_t) = q(t, x(t), x(t - \tau_1(t)), \dots, x(t - \tau_k(t))),$$

$$h_0 = 0, \quad h_i = \text{constantes}, \quad \tau_j(t) \in [0, \tau_i] \text{ continues},$$

$$\|u_i\| \leq \varepsilon \Rightarrow \|q(t, u_0, \dots, u_k)\| \leq \beta_\varepsilon (\|u_0\| + \dots + \|u_k\|),$$

avec  $\beta_\varepsilon = \text{constante}$  pour  $\varepsilon$  donné,  $\beta_\varepsilon$  uniformément décroissante vers 0 quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . L'approximation au premier ordre est définie par :

$$\dot{z}(t) = \sum_{i=0}^k A_i z(t - h_i). \quad (5.9)$$

**Théorème 4.** [26] *Si le système linéarisé (5.9) est asymptotiquement stable, alors  $z = 0$  l'est aussi pour (5.8). Si (5.9) a au moins une racine caractéristique à partie réelle positive, alors  $z = 0$  est instable pour (5.8).*

# Stabilité : cas des retards faibles

« approximation des petits retards »

$$\dot{z}(t) = \sum_{i=0}^k A_i z(t - h_i). \quad (5.9)$$

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^k A_i x(t - h_i) + q(t, x_t) \quad (5.8)$$

Le résultat précédent peut être utilement complété par une *approximation des petits retards*, résultat de nature qualitative obtenu par continuité des racines caractéristiques de (5.9) vis-à-vis des retards  $h_i$ .

**Théorème 5.** [26] *Si  $A = \sum_{i=0}^k A_i$  est de Hurwitz (respectivement, instable), alors pour des valeurs suffisamment faibles des retards  $h_i$ , la solution nulle  $z = 0$  est asymptotiquement stable (respectivement, instable) pour (5.9) et donc (5.8). Si, sur les  $n$  valeurs propres de  $A$ ,  $n-1$  ont des parties réelles strictement négatives et la  $n$ -ième est nulle, alors, pour des valeurs suffisamment faibles des  $h_i$ ,  $z = 0$  est stable pour (5.9) et donc pour (5.8).*

# Stabilité : cas mono-retard faible

quantification d'un retard « faible » admissible

$$\frac{dz(t)}{dt} = A_0 z(t) + A_1 z(t - h), \quad (5.10)$$

qui, pour un retard nul, devient :

$$\frac{dz(t)}{dt} = (A_0 + A_1) z(t). \quad (5.11)$$

condition suffisante

**Théorème 6.** [40] *Si le système à retard nul (5.11) est asymptotiquement stable et si  $P$  est la matrice solution de l'équation de Liapounov (où  $Q$  est une matrice réelle définie positive [117]) :*

$$(A_0 + A_1)^T P + P (A_0 + A_1) = -Q^T Q, \quad (5.12)$$

alors (5.10) est asymptotiquement stable pour tout retard  $h \in [0, h_{\max}]$  :

$$h_{\max} = \frac{1}{2} [\lambda_{\max}(B^T B)]^{-\frac{1}{2}}, \quad \text{avec } B = Q^{-T} A_1^T P (A_0 + A_1) Q^{-1}. \quad (5.13)$$

## Un résultat de V.B. Kolmanovskii &amp; Myshkis (1999)

$$\dot{x}(t) = Ax(t - h)$$

$$V(x_t) = \|x(t)\| \text{ (some norm)}$$

$\|A\|$  = associated matrix norm,

$\gamma(A)$  = logarithmic norm (“measure”).

$$\gamma(A) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\|I + hA\| - 1}{h}$$

$$\gamma(A) < -h\|A\|^2 \implies \text{expon. stable, } e^{-\omega t}$$

$$\omega : \text{solution of } \omega = -\gamma(A) - h\|A\|^2 e^{2\omega h}$$

# Stabilité : méthode directe de Liapounov <sup>(1)</sup>

## Seconde méthode de Lyapunov

Insuffisance de la théorie classique

- Système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) - x_1(t)x_2^2(t - \tau_1) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) - x_2(t)x_1^2(t - \tau_2) \end{cases}$$

- Fonction de Lyapunov :  $V(x) = x_1^2 + x_2^2$
- Dérivée le long des solutions :

$$\frac{dV}{dt}(x(t)) = -2 [x_1^2(t)x_2^2(t - \tau_1) + x_2^2(t)x_1^2(t - \tau_2)] \leq 0$$

$\Rightarrow x = 0$  est stable.

Cet exemple est un cas très particulier  
(BARAKA!)

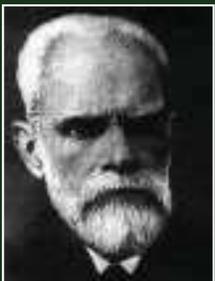
# Suite : Méthode « directe » de Liapounov

**FDE :**

$$\dot{x}(t) = -ax(t) - bx(t-h)$$

$$V(x(t)) = x^2(t) \quad (\text{quadratique « usuelle »})$$

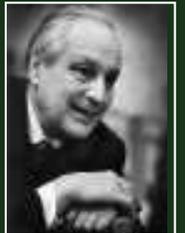
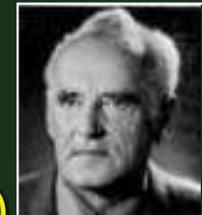
$$\dot{V}(x(t)) = -2 [ax^2(t) + \underbrace{bx(t)x(t-h)}_{\text{termes croisés}}] \leq \dots ?$$



→ besoin de méthodes dédiées :

1) fonctions de Lyapunov-Razumikhin (pas ici)

2) fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii



# une illustration simple de la méthode de Lyapunov-Krasovskii

$$\dot{x}(t) = -ax(t) - bx(t-h)$$

$$V(x_t) = x^2(t) + |b| \int_{-h}^0 x^2(t+s) ds \quad (\text{quad} + \text{intégrale})$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) &= -2x(t)[ax(t) + bx(t-h)] \\ &\quad + |b| [x^2(t) - x^2(t-h)] \end{aligned}$$

$$\leq -2(a - |b|)x^2(t) \quad \dots \dot{V}(x_t) < 0 \text{ if } |b| < a$$

cas  $b \geq 0$  :  $|b| = b$  et

$$-2bx(t)x(t-h) - |b|x^2(t-h) = -b[x(t) + x(t-h)]^2 + bx^2(t)$$

# Stabilité : méthode directe de Liapounov <sup>(1)</sup>

---

## 1) définitions

# Stabilité : méthode directe de Liapounov <sup>(2)</sup>

**Théorème 7.** *S'il existe une fonctionnelle  $V(t, \varphi)$  vérifiant les propriétés (a) et (b) ci-dessus et, pour tout  $t_0$  et tout  $t \geq t_0$  :*

$$\dot{V}(t, \varphi) \leq -\omega_3(\varphi(0)), \quad (5.15)$$

*où  $\omega_3$  est définie positive, non décroissante, alors l'équilibre  $x = 0$  de l'EDR (5.1) est uniformément asymptotiquement stable.*

\* « Fonctionnelle de Liapounov – Krasovskii »

## Exemple simple (rappel...)

$$\dot{x}(t) = -ax(t) - bx(t - \tau)$$

$$\Rightarrow \mathcal{V}(\varphi) = \varphi^2(0) + |b| \int_{-\tau}^0 \varphi^2(t + s) ds$$

Conditions 1) et 2) remplies :

$$\varphi^2(0) \leq \mathcal{V}(\varphi) \leq (1 + |b|\tau) \|\varphi\|^2$$

Expression de la dérivée  $\dot{\mathcal{V}}$  :

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}}(x_t) &= -2x(t) [ax(t) + bx(t - \tau)] \\ &\quad + |b| [x^2(t) - x^2(t - \tau)] \end{aligned}$$

$$\dot{\mathcal{V}}(x_t) \leq -2(a - |b|)x^2(t)$$

$\Rightarrow x = 0$  est U.A.S i.d.r. si  $a > |b|$ .

# Stabilité : méthode directe de Liapounov <sup>(3)</sup>

## Fonctionnelles de Liapounov – Krasovskii particulières

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t - h), \quad (5.18)$$

$$V(x_t) = x(t)^T P x(t) + \int_{-h}^0 x(t + \theta)^T S x(t + \theta) d\theta, \quad (5.19)$$

➔ on obtient des conditions suffisantes sous forme d'équations de Riccati : (5.18) est asymptotiquement stable pour tout  $h \geq 0$  s'il existe des matrices  $P$ ,  $S$ ,  $R$  positives et symétriques telles que :

$$A_0^T P + P A_0 + P A_1 S^{-1} A_1^T P + S + R = 0. \quad (5.20)$$

Cette équation (5.20) est équivalente à la LMI suivante :

$$\begin{pmatrix} A_0^T P + P A_0 + S & P A_1 \\ A_1^T P & -S \end{pmatrix} < 0. \quad (5.21)$$

## Stabilité : méthode directe de Liapounov (4)

Bien sûr, pour  $A_1 = 0$ , (5.20) se réduit à l'équation de Liapounov  $A_0^T P + P A_0 < 0$ , CNS classique dans le cas ordinaire. Pourtant, dans le cas retardé, la condition suffisante (5.20)-(5.21) est loin d'être nécessaire. C'est pourquoi de très nombreuses généralisations de la fonctionnelle (5.19) ont été publiées dans les quinze dernières années. Elles mettent en jeu les termes variés suivants :

$$V_1(x(t)) = x^T(t) P x(t), \quad (5.22)$$

$$V_2(x_t) = x^T(t) \int_{-h_i}^0 Q_i x(t + \theta) d\theta,$$

$$V_3(x_t) = \int_{-h_i}^0 x^T(t + \theta) S_i x(t + \theta) d\theta,$$

$$V_4(x_t) = \int_{-\tau_i}^0 \int_{t+\theta}^t x^T(\theta) R_i x(\theta) d\theta ds,$$

$$V_5(x_t) = x(t)^T \int_{-h_i}^0 P_i(\eta) x(t + \eta) d\eta,$$

$$V_6(x_t) = \int_{-h_i}^0 \int_{-h_i}^0 x(t + \eta)^T P_i(\eta, \theta) x(t + \theta) d\eta d\theta.$$

## Généralisation

$$(S) \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau), \text{ avec } x(t) \in \mathbb{R}^n.$$

Fonctionnelle :  $V(\varphi) = \varphi^T(0)P\varphi(0) + \int_{-\tau}^0 \varphi^T(s)S\varphi(s) ds$   
avec  $P, S \succ 0$ .

$$\Rightarrow \boxed{\dot{V}(x_t) = y^T(t)Qy(t)}$$

$$\text{avec } Q = \begin{bmatrix} A^T P + PA + S & PB \\ B^T P & -S \end{bmatrix} \text{ et } y(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t - \tau) \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$  Stabilité asymptotique i.d.r. si  $Q \prec 0$  (LMI)

2<sup>e</sup> généralisation :  $V(t) = \bar{x}^T(t)E\bar{x}(t) + \int_{t-\tau_2}^t x^T(s)Sx(s)ds + \int_{-\tau_2}^0 \int_{t+\theta}^t z^T(s)Rz(s)dsd\theta$ ,  
(descripteur)

$$\text{où } E = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et où le vecteur } \bar{x}(t) \text{ est donné par } \text{col}\{x(t), z(t)\}.$$

# Prise en compte de la valeur du retard

Hyp. : (S) asymp. stable pour  $\tau = 0 \Rightarrow A = A + B$  Hurwitz

## Problème

Chercher une borne  $\tau^*$  t.q. stab. asympt.  $\forall \tau \leq \tau^*$ .

## Idée

Transformation du modèle à l'aide de la formule de Leibniz-Newton :

$$x(t) - x(t - \tau) = \int_{t-\tau}^t \dot{x}(t + s) ds$$

(S)  $\Rightarrow$

$$\dot{x}(t) = (A + B)x(t) - B \int_{t-\tau}^t (Ax(s) + Bx(s - \tau)) ds$$

# Cas des systèmes neutres <sup>(1)</sup>

$$\dot{x}(t) = f(x_t, t, \dot{x}_t, u_t), \quad (6.1)$$

On représente généralement les systèmes neutres sous la forme de Hale [48] :

$$F \dot{x}_t = \frac{dF x_t}{dt} = f(x_t, t, u_t), \quad (6.2)$$

où  $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$  est un opérateur régulier (ce qui évite les systèmes implicites) à argument différé. Dans le cas linéaire, stationnaire et à retards ponctuels, un système neutre s'écrit :

$$\dot{x}(t) - \sum_{j=1}^q D_j \dot{x}(t - \omega_j) = \sum_{i=0}^k [A_i x(t - h_i) + B_i u(t - h_i)], \quad (6.3)$$

équation à laquelle on associe l'équation linéaire aux différences :

$$F z_t = z(t) - \sum_{j=1}^q D_j z(t - \omega_j) = 0, \quad D_j \text{ matrices constantes.} \quad (6.4)$$

## Cas (particulier) des systèmes neutres <sup>(2)</sup>

On notera que, dans les publications concernant les applications aux sciences pour l'ingénieur, le cas mono-retard est quasiment le seul représenté, sous la forme particulière suivante :

$$\dot{x}(t) - D\dot{x}(t - h_1) = A_0x(t) + \sum_{i=1}^k [A_i x(t - h_i) + B_i u(t - h_i)], \quad (6.5)$$

dont l'équation aux différences associée est :

$$z(t) - Dz(t - h_1) = 0. \quad (6.6)$$

si on fait l'hypothèse de la stabilité asymptotique de l'équation aux différences (6.4) (ce que l'on nomme « stabilité formelle » du système neutre [16]), alors le nombre de racines instables devient fini [26]. La stabilité formelle est également appelée «  $f$ -stabilité » dans le cas non linéaire [69].

# Formalismes

- FDEs (déjà présenté)
- Semi-groupes (opérateurs en dim. infinie)
- Géométrie (sur anneaux)
- Algébrique
- 2D (systèmes neutres)

direct  
formal.

direct  
commd.

direct  
Lyap..

direct  
biblio

## 4.0 FDEs

(déjà vu)

$$\dot{x}(t) = f(x_t, t, u_t), \quad t \geq t_0$$

$$\begin{aligned} x_t(\theta) &= x(t + \theta), & -h \leq \theta \leq 0, \\ u_t(\theta) &= u(t + \theta), & -h \leq \theta \leq 0, \\ x(\theta) &= \varphi(\theta), & t_0 - h \leq \theta \leq t_0, \end{aligned}$$

- très général (retards qcques, lin./non lin., ...)
- commande par méthodes de type Lyapunov (en linéaire ou non lin. de type polytopique)

## 4.1 Operators in infinite dimension

Delfour72, Manitius78, Delfour-Karrakchou87, Bensoussan93...

$\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_2([-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n)$  fncts with integrable square

$\mathcal{M}_2 = \mathbb{R}^n \times \mathcal{L}_2$  Hilbert space

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t-h) + B_0u(t),$$

$$y(t) = C_0x(t).$$

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = \tilde{A}\bar{x}(t) + \tilde{B}u(t), \\ y(t) = \tilde{C}\bar{x}(t) \end{cases}$$

$$\bar{x}(t) = [x(t), x_t] \in \mathcal{M}_2$$

$\tilde{A}$  unbounded, closed, dense operator,

$\tilde{B}$  and  $\tilde{C}$  bounded operators (if no input/output delay)

properties of semi-groups hold  
 general theory of infinite-dimensional, differential eqns

*disadvantages:*

- 1) abstract mathematics
- 2) yields controls in *distributed* form.

## 4.2 Geometric approach over polynomial rings

*for linear systems with commensurate, constant delays*

$\mathbb{R}[\nabla]$  *commut. ring of polynom. in delay operator  $\nabla$*   
 absence of inverse on  $\mathbb{R}[\nabla] \iff$  absence of advance  
 $\nabla^{-1}$

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=0}^k A_i x(t - i\delta) + \sum_{i=0}^k B_i u(t - i\delta) \\ y(t) = \sum_{i=1}^k C_i x(t - i\delta) \end{cases}$$

↓

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \mathbf{A}(\nabla)x(t) + \mathbf{B}(\nabla)u(t), \\ y(t) = \mathbf{C}(\nabla)x(t), \end{cases}$$

$$\mathbf{A}(\nabla) \in \mathbb{R}^{n \times n}[\nabla], \mathbf{B}(\nabla) \in \mathbb{R}^{n \times m}[\nabla], \mathbf{C}(\nabla) \in \mathbb{R}^{p \times n}[\nabla]$$

$\Rightarrow x$  belongs to the *state-module*  $\mathbb{R}[\nabla]^n$

**Control:** *polynomial* feedback  $\Rightarrow$  polynomial system

$$\begin{aligned} u(t) &= -\mathbf{F}(\nabla)x(t) + v(t), \\ \mathbf{F}(\nabla) &\in \mathbb{R}[\nabla]^{m \times n} \end{aligned}$$

- control assumptions:* *polynomial* control remains a limitation since realizability of concrete controllers needs:

$\rightarrow$  *rational* fractions (precompensators, neutral syst)

$\rightarrow$  *distributed* delays (finite spectrum assignment)

## 4.3 Systems over rational rings

ring  $R[\nabla] \rightarrow$  field  $R(\nabla)$  of rational fractions in  $\nabla$   
 $\rightarrow$  allows dynamic feedback, but realizability?

$\mathcal{R}_u(\nabla)$  = subring of the irreducible, rational fractions in  $\nabla$ , which denominator has a non-zero constant term:

$$\mathcal{R}_u(\nabla) = \left\{ \frac{p(\nabla)}{q(\nabla)} \in \mathbb{R}(\nabla), q(0) \neq 0 \right\}.$$

Examples:

$\frac{1}{1+\nabla}$  belongs to  $\mathcal{R}_u(\nabla)$        $y(t) = -y(t-\delta) + u(t)$

$\frac{1}{\nabla}$  does not       $y(t) = u(t+\delta)$  is anticipative

Theorem (causality) [Picard, Lafay, Kucera 96]

$$\frac{p(s, \nabla)}{q(s, \nabla)} = \frac{p_0(\nabla) + \dots + s^r p_r(\nabla)}{q_0(\nabla) + \dots + s^k q_k(\nabla)}, \quad r \leq k$$

is causal  $\iff q_k(\nabla) \in \mathcal{R}_u(\nabla)$  (ring property).

Advantage of models over  $\mathbb{R}_u(\nabla)$ :

dynamic feedback law defined over  $\mathcal{R}_u(\nabla)$

$\Rightarrow$  resulting system remains in the same class

## 4.4 Algebraic formalism for distrib. delays

Manitius-Olbrot 79, Kamen-Khargonekar-Tannenbaum 85,  
Watanabe 96

Example:

$$u \rightarrow y, \quad y(t) = \int_{h_1}^{h_2} f(\theta)u(t - \theta)d\theta,$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = F(s) = \int_{h_1}^{h_2} f(\theta)e^{-s\theta}d\theta$$

$$ex \rightarrow \text{zero-holder operator } \frac{1 - e^{-sh}}{s} = \int_0^h e^{-s\theta}d\theta.$$

→ explicit consideration of the relation  $s \rightleftharpoons \nabla \equiv e^{-s\delta}$

$$\mathcal{G} = \left\{ \mathcal{L}(\text{realizable, distributed delay}) \in \mathbb{R}(s, e^{-s\delta}) \right\}$$

→  $\mathcal{E}$  = ring of pseudo-polynomials (analytic fct)

$$\mathcal{E} = \mathbb{R}[e^{-s\delta}] \cup \mathcal{G} \quad [\text{Brethé, Loiseau}]$$

$\mathcal{E}$  is isomorphic to the quasi-polynomials ring  $\mathbb{R}[s, e^{-s\delta}]$

$\mathcal{E}$  is a domain of Bezout (→ finite-spectrum assign<sup>mt</sup>)

## 4.5 Generalization to nonlinear systems

[Moog, Marquez-Martinez 00]

*Non commutative polynomial ring  $\mathcal{K}[\nabla]$ ,*

$\mathcal{K}$  field of meromorphic (ratio of analytic) functions:

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t)x_2(t-1) \equiv x_{1,0}x_{2,1} = x_{1,0}\delta x_{2,0}$$

$$\dot{x}_2(t) = u_1(t) + x_2(t-2) \equiv u_{1,0} + x_{2,2}$$

*non commutative :*

$$x_{1,0}\delta x_{2,0} = x_{1,0}x_{2,1}$$

$$\neq$$

$$\delta x_{1,0}x_{2,0} = x_{1,1}x_{2,0}$$

$\mathcal{K}[\nabla]$  integer ring with Euclidean left-division.

## 4.6 2-D models and neutral systems

Roesser models [1975]:

$s$  = derivation operator       $\omega$  =  $h$ -advance operator.

$$\begin{cases} sX = A_0X + A_2Z + B_0U, \\ \omega Z = A_3X + DZ + B_3U, \end{cases}$$

$$Y = C_1X + C_2Z.$$

Example:

$$A_2 = I, \quad A_3 = A_1 + DA_0, \quad B_3 = B_1 + DB_0,$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{x}(t) - D \dot{x}(t-h) = A_0x(t) + A_1x(t-h) + B_0u(t) + B_1u(t-h)$$

⇒ allows connection with previous results

→ realization [Eising 78]

→ stabilization [Zak 86]

→ factorization & model matching [Loiseau, Brethé].

→ equivalence with the question of realization over

$\mathcal{R}_u(\nabla)$  [Picard].

Contrôle

# Commande

- Conditions structurelles (existence)
- Limite des méthodes « dim. finie »
- Prédicteur, **le principe**
- Quelques parallèles avec la prédiction...

direct  
formal.

direct  
commd.

direct  
Lyap..

direct  
biblio

## Commande

exemple

$$\dot{x}(t) = x(t) + u(t - 1)$$

n'est pas stabilisable avec  $u(t) = -kx(t)$

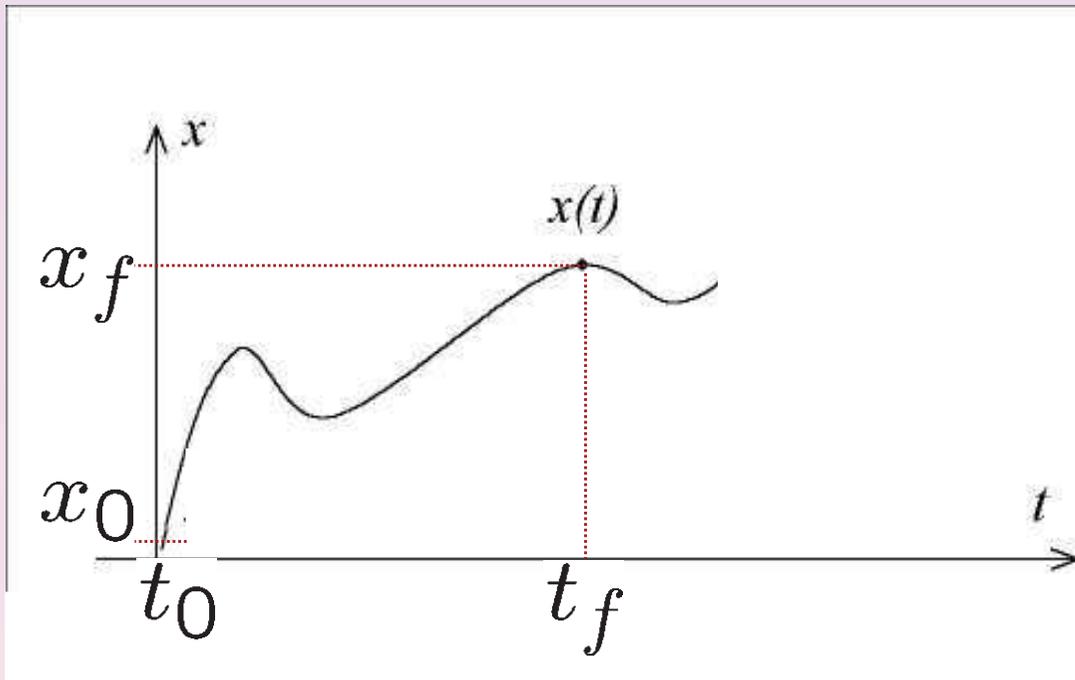
Structure de la commande ?

⇒ Besoin de connaître les propriétés structurelles du système.



## Exemple de propriété structurelle : COMMANDABILITE

$\exists$ ? commande  $u$  faisant passer l'état  $x(t_0) = x_0$  en  $x(t_f) = x_f$ ?



- 1) controllability: to reach a *function* instead of a point.
  - 2) control delay  $\Rightarrow$  *minimum reaching time*.  
 $\Rightarrow$  the notion of reachable sets ("orders" of Kalman-like controllability chains) has to be completed by associating a "class" depending on the time needed to achieve the control.
  - 3) realization of the control law:  $u(t) = g(x_t)$   
 $\rightarrow$  one may prefer "memoryless" controls  $u(t) = g(x(t))$   
 or point-wise-delayed  $u(t) = g(x(t), x(t - h_i))$ .
- $\Rightarrow$  Several notions (controllability, ↓)

**Syst. dim. finie** : état  $x(t_0) = x_0$  à  $x(t_f) = x_f$

En linéaire-stationnaire (principe de superposition OK) :

- si  $\exists u$ , indépendant de  $t_f - t_0$  et : ce qui est possible en  $T$  l'est en  $T/100$  (!)
- si passage possible de  $x_0$  à  $x_f$ , alors possible de  $x_f$  à  $x_0$

Ce n'est plus vrai non linéaire

**Syst. dim. infinie** : état = fonction  $x_{t_f}$

Ce n'est plus vrai non plus, même en linéaire

# Commande

	controlability	abridged def	restrict
functional	<b>1</b> $\mathcal{M}_2$ -strict	$\exists u, \exists t_1,$ $x_{t_1} = \varphi_1$	-
	<b>2</b> $\mathcal{M}_2$ -approx.	$\exists u_n, \exists t_1,$ $\lim[x_{t_1}]_{u_n} = \varphi_1$	-
	<b>3</b> absolute	$\exists u, u_{t_1} = 0,$ $x_{t_1} = \varphi_1$	lin, $\nabla u$
	<b>4</b> $(\psi, \mathbb{R}^n)$ -fct	$\exists u, \exists t_1,$ $x_{t_1} = \psi \in \mathcal{C}$	lin, $\nabla x$
	<b>5</b> spectral	$\exists u,$ $\sigma_{A(e^{-\delta s})} = \{\lambda_i\}$	lin, coms.
point-wise	<b>6</b> $\mathbb{R}^n$ -	$\exists u, \exists t_1,$ $x(t_1) = x_1$	lin, coms.
	<b>7</b> strong $\mathbb{R}^n$ -	$\exists u, \forall t_1,$ $x(t_1) = x_1$	lin, coms.
	<b>8</b> $\mathbb{R}^n$ -to 0	$\exists u, \exists t_1,$ $x(t_1) = 0$	lin, coms.
$u(t)$ type	<b>9</b> (strong) over $\mathbb{R} [\nabla]$	polyn. $u(t)$ $= K(\nabla)x(t)$	lin, coms.
	<b>10</b> (weak) over $\mathbb{R} (\nabla)$	rational $L(\nabla)u(t)$ $= K(\nabla)x(t)$	lin, coms.

for LTI with coms delays:



OK, c'est de l'existence...

mais **comment calculer cette commande ?**

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=0}^q A_i x(t - ih) + \sum_{i=0}^q B_i u(t - ih) \\ y(t) = \sum_{i=0}^q C_i x(t - ih) \end{cases}$$

Trouver un retour de sortie (dynamique) ou d'état  $u(t)$  t.q. le système bouclé soit asympt. stable

2 méthodes :

- Approximation en dim. finie

$\exp(-hs) \rightarrow \frac{N(s)}{D(s)}$  ex. approximants de Padé

$$\frac{1 - \frac{h}{2}s}{1 + \frac{h}{2}s} = 1 - hs + \frac{h^2}{2}s^2 - \frac{h^3}{4}s^3 + O(s^4)$$

- conserver le système de dim. infinie

Première approche :

Problème :

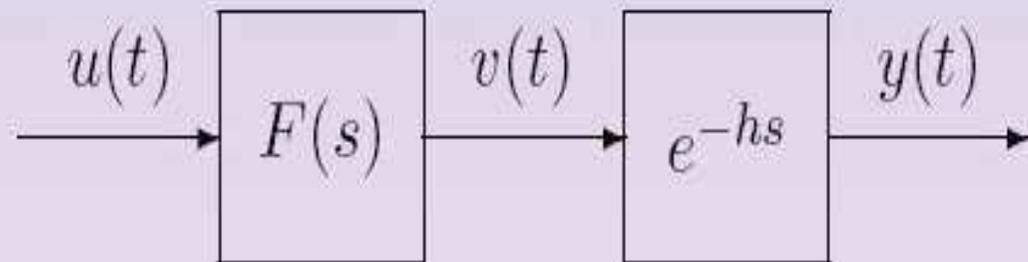
⇒ syst. de grande dimension ⇒ contrôleurs complexes

Ordre de l'approximation, stabilité numérique des algorithmes ?

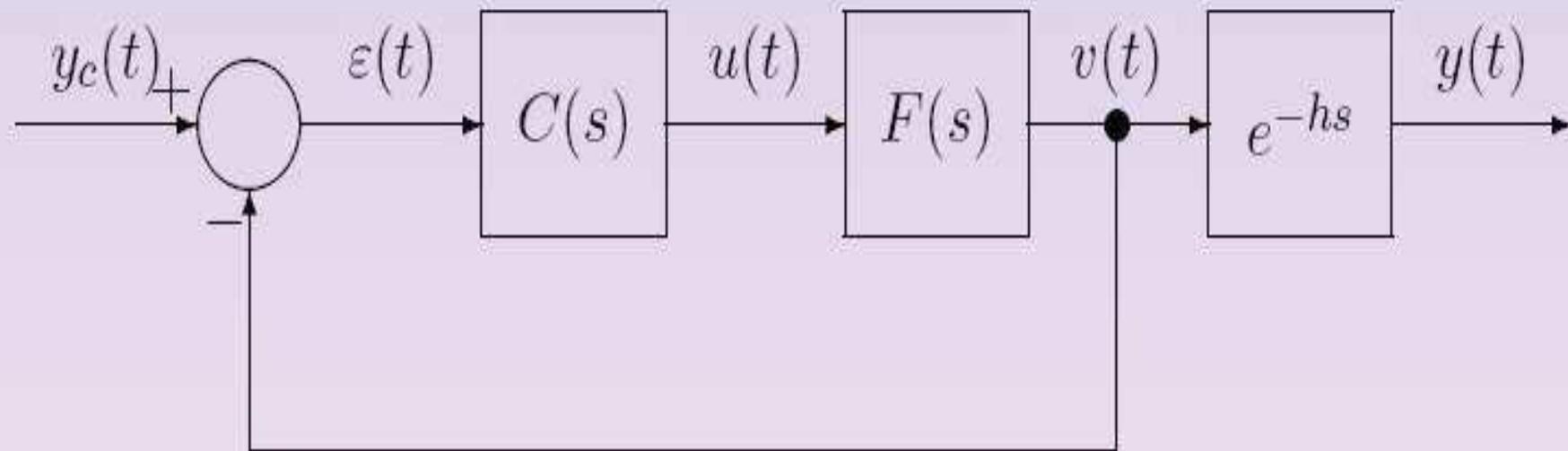
Seconde approche :

- Besoin d'outils spécifiques
- Régulateurs de dimension infinie  
⇒ Implantation / approximation ?

Exemple : cas d'un système à retard sur le capteur

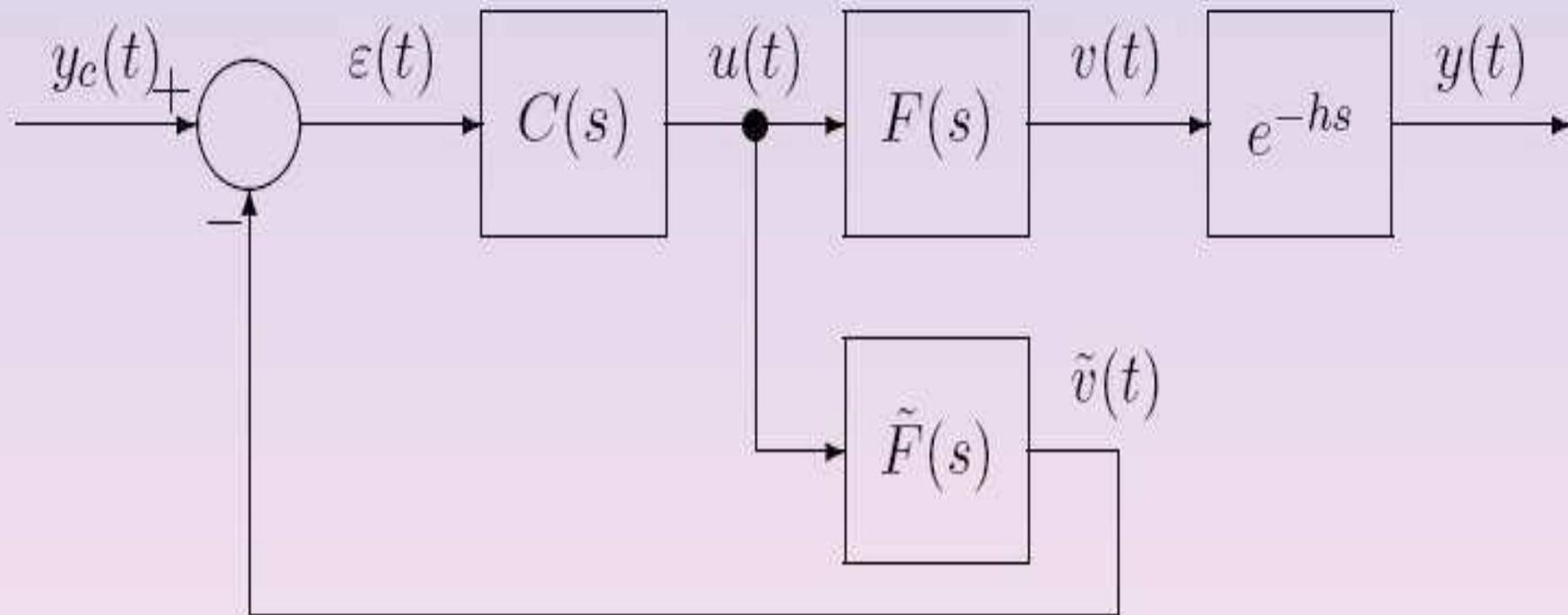


Exemple : cas d'un système à retard sur le capteur



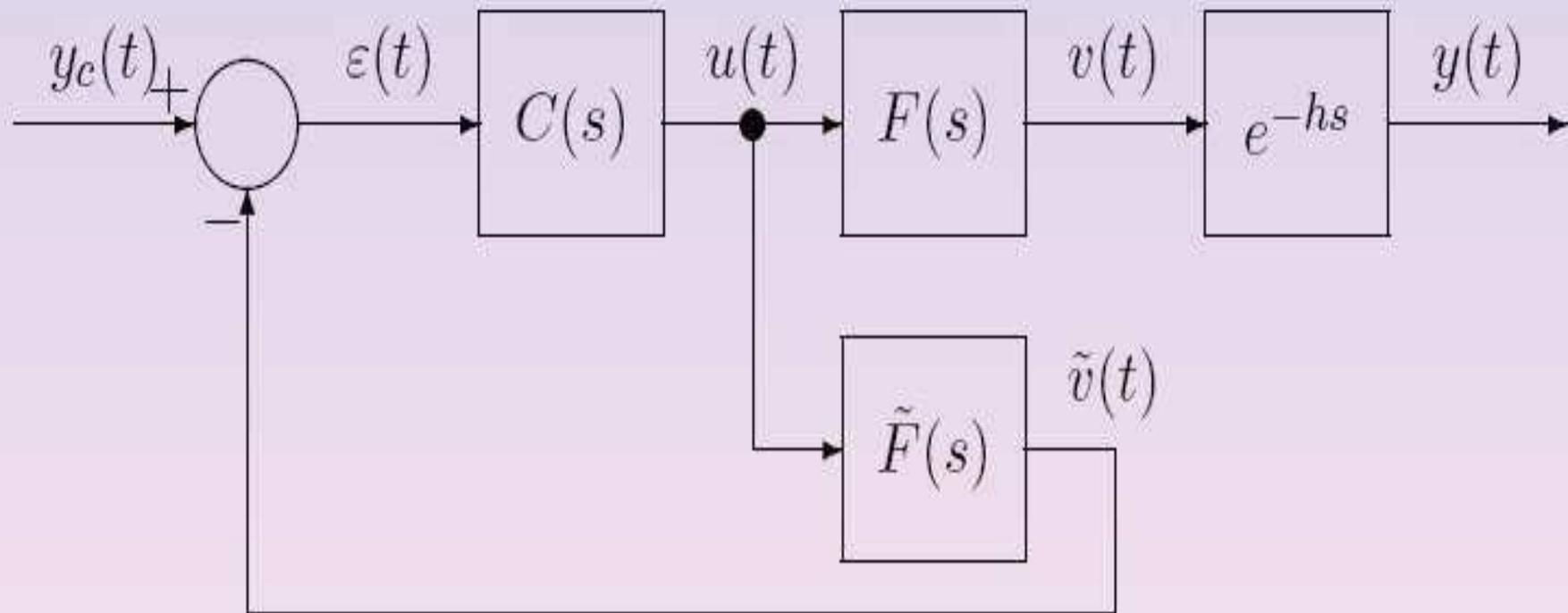
Si on dispose d'un autre capteur non retardé : commande classique

Exemple : cas d'un système à retard sur le capteur



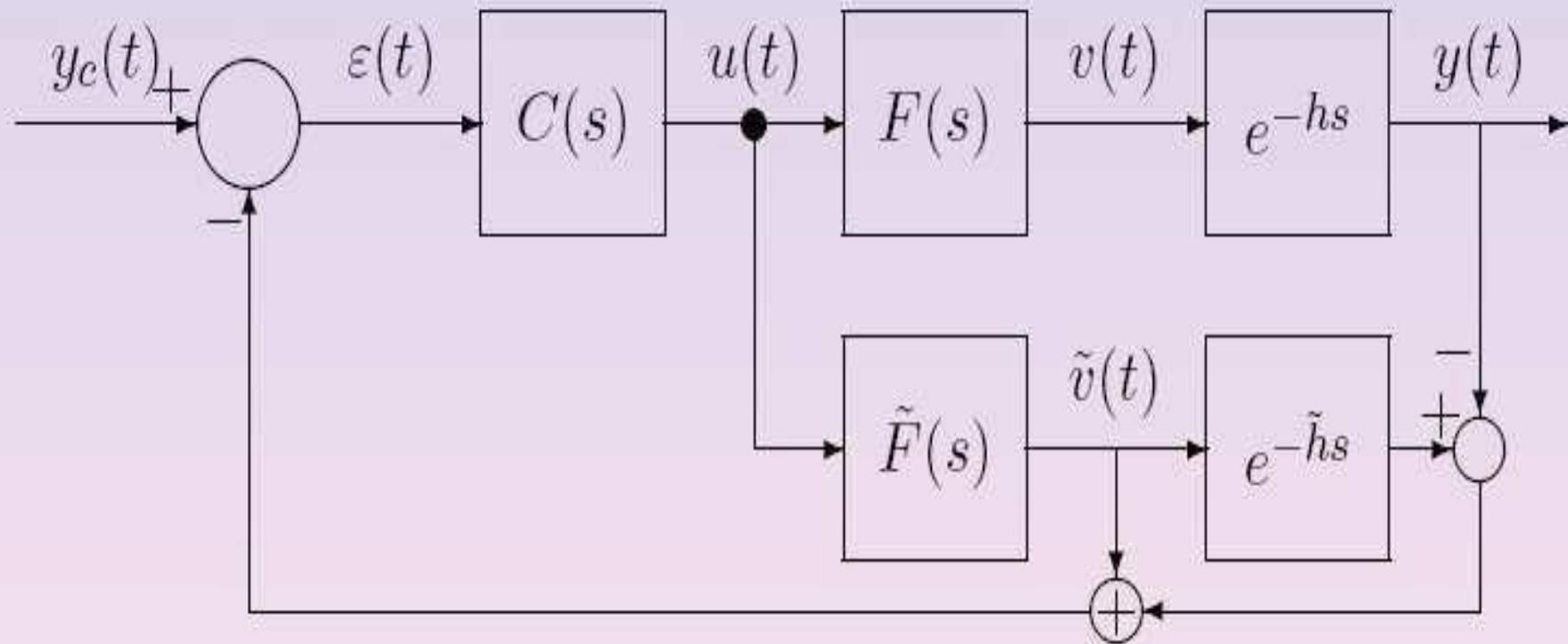
On estime  $v(t)$  à l'aide de  $u(t)$  et du modèle

Exemple : cas d'un système à retard sur le capteur



Problème ?

Exemple : cas d'un système à retard sur le capteur



→ avec rétroaction

→ **MAIS...**

Modèle parfait ( $F = \tilde{F}$ ,  $h = \tilde{h}$ ),

$$\frac{Y(s)}{Y_c(s)} = \frac{CF}{1 + CF} e^{-hs}$$

sinon :

$$\frac{Y(s)}{Y_c(s)} = \frac{CF}{1 + C\tilde{F} + C(Fe^{-hs} - \tilde{F}e^{-\tilde{h}s})} e^{-hs}$$

→ problème de la robustesse...

retard mal connu, non constant ?

$F$  mal connue, instable ? (cf. exemple suivant)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) + u(t) \\ y(t) = x(t - 1) \end{cases} \quad + \text{ régulateur P : } C(s) = K.$$

Equations syst. BF :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= ax(t) + Kr(t) - Kx(t - 1) - K\hat{v}(t) + K\hat{v}(t - 1) \\ d\hat{v}/dt(t) &= a\hat{v}(t) + Kr(t) - Kx(t - 1) - K\hat{v}(t) + K\hat{v}(t - 1) \end{aligned}$$

Equation caractéristique :

$$\det \begin{bmatrix} s - a + Ke^{-s} & K - Ke^{-s} \\ Ke^{-s} & s - a + K - Ke^{-s} \end{bmatrix} = (s - a)(s - a + K) = 0.$$

instable pour un système instable en BO!

→ une autre façon de voir le prédicteur de Smith...

Systeme  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - \tau),$

Idee :  $u(t) = -Kx(t + \tau) \Rightarrow \dot{x}(t) = (A - BK)x(t)$

mais commande non causale!



→ construire l'« avance » par l'intermédiaire du modèle ?

⇒ prédiction non dynamique de  $x(t + \tau)$  :

$$\begin{aligned}x(t + \tau) &= e^{A\tau} x(t) + \int_t^{t+\tau} e^{A(t+\tau-s)} B u(s - \tau) ds \\ &= e^{A\tau} x(t) + \int_{-\tau}^0 e^{-A\theta} B u(t + \theta) d\theta.\end{aligned}$$

$$\Rightarrow u(t) = -K e^{A\tau} x(t) - K \int_{-\tau}^0 e^{-A\theta} B u(t + \theta) d\theta.$$

pôles BF = valeurs propres de  $A - BK$

→ plusieurs méthodes s'inspirant de ce principe

# Transformations équivalentes

Commande

Cas des systèmes avec retard sur l'entrée

→ par exemple (... transformation « d'Artstein »)

Système :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - \tau),$$

Changement de variables :

$$z(t) = x(t) + \int_{t-\tau}^t e^{-A(s+\tau-t)} Bu(s) ds$$

$$\Rightarrow \dot{z}(t) = Az(t) + e^{-A\tau} Bu(t),$$

(Kwon & Pearson 80, Artstein 82)

placement de pôles  $\iff (A, e^{-A\tau} B)$  commandable (équivalent ici à  $(A, B)$  commandable.)

# Petite bibliographie

- **Richard *et al.* (2009)** ISBN : 978-9973-0-0852-7 (385 pages)  
Mathématiques pour l'Ingénieur
- **Kolmanovski-Nosov (1986)**, Academic Press.  
Stability of functional differential equations.
- **Niculescu (2001)**, Springer  
Delay effects on stability. LNCIS Vol. 269.
- **Richard (2003)**, *Automatica* 39 (10), 1667-1694  
TDS: An overview of some recent advances and open problems"
- **Mounier-Richard (2003)** Special issue *Int. J. Syst.Sc.* 34 (10-11)  
Time delay systems for communication networks
- **Fridman-Seuret-Richard (2004)** *Automatica* 40 (8)  
Robust sampled data stabilization of lin. syst.: an input delay approach