

4. Inégalités différentielles

Principe : (1) $\dot{x} \leq f(t, x)$ $\dot{z} = f(t, z)$ (2)

solution : $x(t; t_0, x_0) \leq ? z(t; t_0, z_0)$ solution :

Contraintes (C.N.) : $x \in \mathbf{R}^n \Rightarrow z \in \mathbf{R}^n$
 $x_0 \leq z_0$

Utilisation :
(principe de comparaison) Si $x(t) \geq 0$ ($\forall t$) et si (2) converge vers 0, alors $x(t)$ converge aussi vers 0.

Exemple : $\dot{x} = -\frac{(2+x^2)(2+\sin t)}{1+x^2}x \Rightarrow \frac{d}{dt}|x| \leq -|x|$ sauf en $x = 0$ (non dérivable)
 $\dot{z} = -z$ converge vers 0 $\Rightarrow ? |x|$ aussi ?

démontrer le résultat

généraliser la dérivée

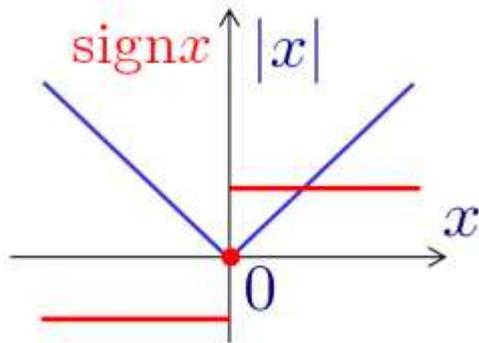
Boîte à outils - 1

Dérivée de Dini (à droite) : $D^+x(t) = \limsup_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{x(t+\theta) - x(t)}{\theta}$

Exemple : $\dot{x} = -\frac{(2+x^2)(2+\sin t)}{1+x^2}x$

$$D^+|x(t)| = D^+[x \operatorname{sign}x] = \frac{dx}{dt} \operatorname{sign}x = -\frac{(2+x^2)(2+\sin t)}{1+x^2}|x| \leq -|x|$$

$\Rightarrow D^+|x| \leq -|x|$ même en $x = 0$ (val. abs. dérivable à droite)



... il reste à montrer :

$\dot{z} = -z$ converge vers 0 $\Rightarrow |x|$ aussi ?

Boîte à outils - 2

Fonction quasi-monotone non décroissante (QMND) :

la fonction $f : \mathcal{T} \times \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X} \subset \mathbf{R}^n$, $(t, x) \mapsto f(t, x)$ est QMND en x si :

$$\forall t \in \mathcal{T}, \quad \forall (x, x') \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}, \quad \forall i \in \{1, \dots, n\},$$

$$(x \leq x') \text{ et } (x_i = x'_i) \Rightarrow f_i(t, x) \leq f_i(t, x').$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_i \\ x_n \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} x'_1 \\ x'_i \\ x'_n \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \cancel{f_1(x)} \\ f_i(x) \\ \cancel{f_n(x)} \end{bmatrix} \leq \begin{bmatrix} \cancel{f_1(x')} \\ f_i(x') \\ \cancel{f_n(x')} \end{bmatrix}$$

Exemples : (cas linéaire) $f(x) = Mx$ QMND $\Leftrightarrow m_{ij} \geq 0 \quad \forall i \neq j$

(cas NL stat.) $f(x)$ QMND (local^{mt} en 0) $\Leftrightarrow \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_{x=0}$ QMND

Définition : M est une « -M matrice » (l'opposée d'une matrice de Metzler) si elle est Hurwitz et si $f(x) = Mx$ est QMND.

Un résultat de base...

$$(1) \quad D^+x(t) \leq f(t, x)$$

$$\dot{z} = f(t, z) \quad (2)$$

Lemme (de Ważewski-Kamke-Lakshmikantham-Leela) :

Supposons que f :

- vérifie les conditions d'existence et unicité de solution pour (2) ;
- est quasi-monotone non décroissante en x .

Alors, les solutions de (1) avec $x_0 \leq z_0$ vérifient :

$$x(t; t_0, x_0) \leq z(t; t_0, z_0).$$

Remarque : *théorème généralisable au cas de solution non unique et d'équations définies presque partout* (voir [RIC 02] chap.5.)

Application à la stabilité

$$(1) \quad \dot{x}(t) = A(t, x)x(t) \quad A(t, x) \text{ bornée sur } \mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$$

$$p(x) \triangleq \begin{pmatrix} |x_1| \\ |x_i| \\ |x_n| \end{pmatrix} \quad M \triangleq \sup_{\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n} A^*(t, x) \quad A^*(x, t) = ?$$

(terme à terme)

$$D^+ p(x) \leq Mp(x)$$

⇒ **Théorème 1** : Si M est de Hurwitz, alors $x = 0$ est glob. exponentiellement stable pour (1).

Démonstration : M est QMND par construction (c'est une $-M$ matrice)

Remarque: les $-M$ matrices ont de nombreuses propriétés. – M^{-1} est à composantes ≥ 0 , \exists un vect. ppe $u > 0$ associé à la val. ppe de plus gde partie réelle de M , etc.

Généralisation

(1) $\dot{x}(t) = A(t, x)x(t)$

$A(t, x)$ bornée sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}^n$

$$x = \begin{pmatrix} \overline{x_1} \\ \overline{x_i} \\ \overline{x_p} \end{pmatrix} \leftarrow x_i \in \mathbf{R}^{n_i}$$

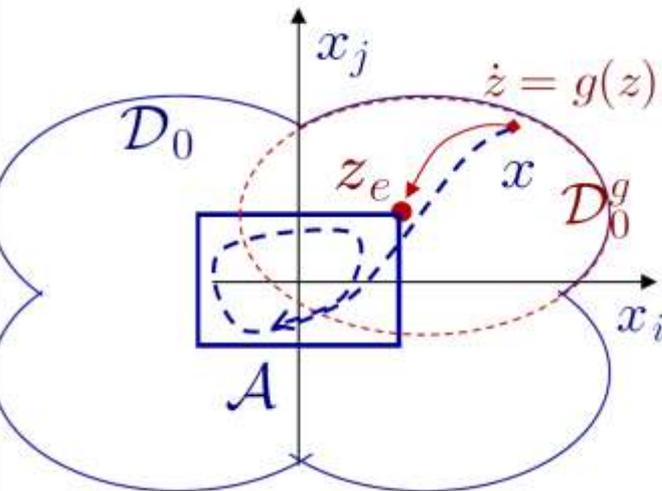
$$V(x) \triangleq \begin{pmatrix} v_1(x_1) \\ v_i(x_i) \\ v_p(x_p) \end{pmatrix}$$

$v_i(x_i)$ fonctions Lyapunov-candidates vérifiant l'égalité triangulaire (normes, par ex):
 $v_i \in C^0, v_i(x_i) \geq 0$
 $v_i(x_i) = 0 \Leftrightarrow x_i = 0$
 $v_i(x_i + y_i) \leq v_i(x_i) + v_i(y_i)$

$D^+V(x) \leq g(V(x)), \quad g(z_e) = 0, \quad z_e \geq 0.$

⇒ **Théorème 2** : Si $g(z)$ est QMND, si \mathcal{D}_0^g est une estim. du d.s.a. (dom. de stab. asympt.) de z_e contenant 0, alors :

$\mathcal{A} = \{x, V(x) \leq z_e\}$ est un ens. attractif et
 $\mathcal{D}_0 = \{x, V(x) \in \mathcal{D}_0^g\}$ est une estim. de son d.s.a.



5 Commandabilité

- Introduction

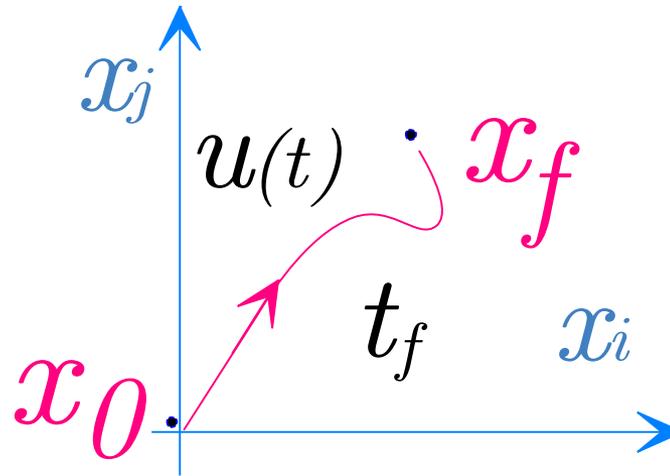
Systemes « linéaires en la commande »

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x) + G(x)u, & (1) \\ x &\in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m.\end{aligned}$$

\mathcal{U}_{adm} classe des commandes admissibles
(les fonctions constantes par morceaux suffisent, car elles permettent d'approcher toute commande Riemann intégrable)

- Position du problème, définition

Existe-t-il $u(t)$ permettant de passer de x_0 à x_f , et en quel temps t_f ?



Définition : Le système (1) est *commandable* (resp. *asymptotiquement commandable*) si étant donnés deux points arbitraires x_0 et x_f , il existe un temps fini t_f (resp. fini ou non) et une entrée admissible u tels que $x(t_f; 0, x_0, u [0, t_f]) = x_f$ (resp. $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t; 0, x_0, u [0, t]) = x_f$).

- Rappel du Linéaire

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ x \in R^n, \quad u \in R^m \end{cases}$$

notations : $\mathcal{C}_{(A,B)} = [B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B]$

$$W_c(t) = \int_0^t e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} d\tau$$

$$u_f(t) = B^T e^{A(t_f-t)} W_c(t_f)^{-1} (x_f - e^{A t_f} x_0)$$

(éléments d'analyse)

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

$$x(t_2) = e^{A(t_2-t_1)}x_1 + \int_{t_1}^{t_2} e^{A(t_2-t)}Bu(t) dt.$$

$$u_f(t) = B^T e^{A(t_f-t)} W_c(t_f)^{-1} (x_f - e^{At_f} x_0)$$

$$W_c(t) = \int_0^t e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} d\tau$$

$$\implies x(t_2) = \dots$$

Théorème (cas linéaire, stationnaire, sans retard)

« La paire (A, B) est commandable » équivaut à:

- 1) $\mathcal{C}_{(A,B)}$ est de rang plein (Kalman)
- 2) $W_c(t)$ est inversible pour **au moins** un temps $t > 0$
- 3) le système peut se mettre sous forme compagne de commandabilité (forme de Luenberger) par changement de base (régulier)
- 4) $\forall s \in \mathbb{C}, \text{Rang} [B, sI - A] = n$ (Hautus-Popov)

Preuve : $u_f(t)$ fait passer de x_0 à x_f en t_f secondes.

... donc en linéaire, commandable \Rightarrow commandable $\forall t_f > 0!$

- Commandabilité à partir du linéarisé

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u,$$

(x_e, u_e) **équilibre** (c.à.d. $f(x_e) + G(x_e)u_e = 0$).

Linéarisé : $\dot{x} = Ax + Bu$, (autour de cet équilibre)

avec $A = J_f(x_e) + H, \quad B = G(x_e),$

$$J_f(x_e) = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_{x_e}$$

et H solution de $Hx = \left[\frac{\partial G}{\partial x} \right]_{x_e} x + u_e$.

(preuve du calcul du linéarisé)

$$\dot{x} = f(x) + G(x)u,$$

(x_e, u_e) **équilibre** (c.à.d. $f(x_e) + G(x_e)u_e = 0$).

Linéarisé : $\dot{x} = Ax + Bu$, (autour de cet équilibre)

avec $A = J_f(x_e) + H$, $B = G(x_e)$,

$$J_f(x_e) = \left[\frac{\partial f}{\partial x} \right]_{x_e}$$

et H solution de $Hx = \left[\frac{\partial G}{\partial x} \right]_{x_e} z u_e$.

$$\dot{x} = f(x_e + dx) + G(x_e + dx)(u_e + du)$$

$$(d\dot{x}) = f(x_e) + \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_e} dx + \left(G(x_e) + \frac{\partial G}{\partial x} \Big|_{x_e} dx \right) u_e + G(x_e) du + \dots$$

$$= \cancel{[f(x_e) + G(x_e)u_e]} + \frac{\partial f}{\partial x} dx + \left(\frac{\partial G}{\partial x} dx \right) u_e + G(x_e) du + \dots$$

$$= Adx + Bdu + \dots$$

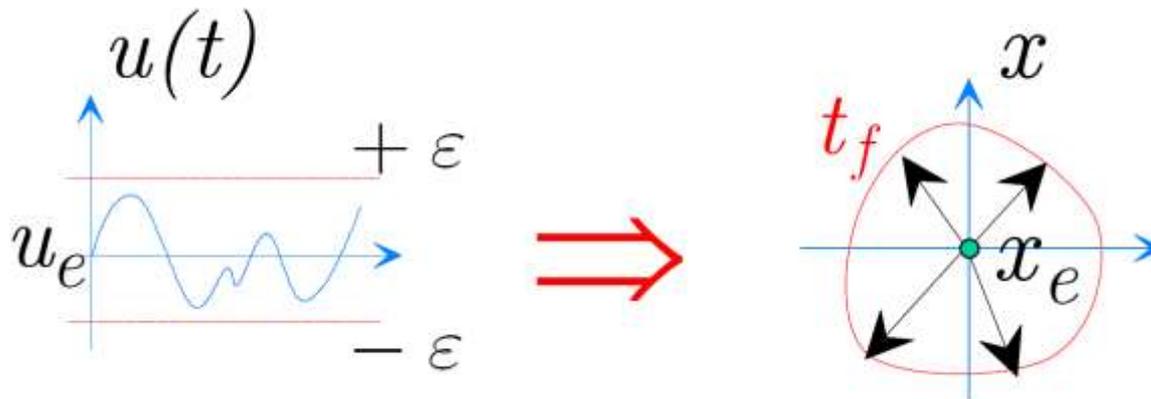
$$\Rightarrow Adx = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \left(\frac{\partial G}{\partial x} dx \right) u_e$$

5 Commandabilité (à partir du linéarisé, suite)

Théorème:

Si le système linéarisé est commandable alors le système non linéaire est « localement accessible » au sens suivant :

$\forall t_f > 0, \forall \varepsilon > 0$, l'ensemble des points atteignables en un temps t_f partant de x_e avec des entrées admissibles vérifiant $\|u - u_e\| < \varepsilon$ contient un voisinage de x_e .



5 Commandabilité (à partir du linéarisé, suite)

Preuve. Résultat du linéaire : n points $z^i = (0, \dots, 1, \dots, 0)^T$ (1 à la $i^{\text{ème}}$ place), (1.3) étant commandable on peut trouver n fonctions $u^i(t)$ qui amènent les trajectoires issues de l'origine en chacun des n points z^i et ce en un temps donné t_f . Ainsi, partant de l'origine la commande

$$u_\xi = \sum_{i=1}^n \xi^i u^i, \quad (1.4)$$

amène la trajectoire au point

$$z(t_f) = \int_0^{t_f} \exp(A(t-\tau))B \left(\sum_{i=1}^n \xi^i u^i(\tau) \right) d\tau = \xi. \quad (1.5)$$

Pour $\varepsilon > 0$ donné, on peut trouver un $\delta > 0$ tel que $\|\xi\| < \delta$ et $\|u\| < \varepsilon$. En notant $x(t, \xi)$ la solution de (1.1) avec $u = u_\varepsilon + u_\xi$ démarant de x_ε , il suffit de montrer que $\xi \mapsto x(t_f, \xi)$ est un difféomorphisme local au voisinage de $\xi = 0$. Pour cela il suffit de montrer que la matrice $M(t) = \left. \frac{\partial x(t, \xi)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0}$ est inversible pour $t = t_f$ (Théorème de la fonction implicite).

Or

$$\frac{\partial x(t, \xi)}{\partial t} = f(x(t, \xi)) + G(x(t, \xi))(u_\varepsilon + u_\xi(t)),$$

en différenciant par rapport à ξ , on obtient

$$\begin{aligned} \dot{M}(t) &= \left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{x=x(t, \xi=0)=x_\varepsilon} M(t) + G(x(t, \xi=0))(u^1, \dots, u^n) + \left(\left. \frac{\partial g_1}{\partial x} \right|_{x=x_\varepsilon} M(t), \dots, \left. \frac{\partial g_m}{\partial x} \right|_{x=x_\varepsilon} M(t) \right) u_\varepsilon \\ &= AM(t) + B(u^1, \dots, u^n), M(0) = 0, \end{aligned}$$

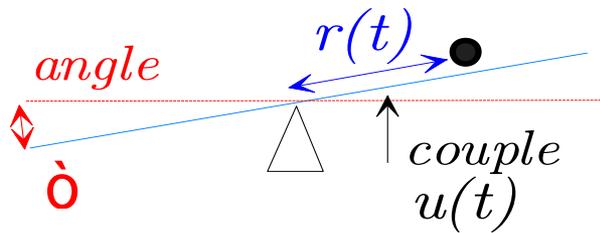
donc

$$M(t_f) = \int_0^{t_f} \exp(A(t-\tau))B(u^1, \dots, u^n)(\tau) d\tau = (z^1, \dots, z^n) = Id.$$

■

5 Commandabilité (à partir du linéarisé, suite)

Exemple 5 Bille sur un rail



$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}_i} = D_i \quad (1.6)$$

$$(mr^2 + J)\ddot{\theta} + 2mr\dot{r}\dot{\theta} + mgr \cos(\theta) = u, \quad (1.7)$$

$$m\ddot{r} + mg \sin(\theta) - mr\dot{\theta}^2 = 0. \quad (1.8)$$

Linéarisé (équilibre $u = r = \dot{r} = \theta = \dot{\theta} = 0$)

$$\boxed{} + J\ddot{\theta} + mgr \boxed{} = u, \quad (1.9)$$

$$\ddot{r} + g\theta = 0. \quad (1.10)$$

En posant $x = (r \ \dot{r} \ \theta \ \dot{\theta})^T$ on obtient :

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -g & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{-mg}{J} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ J^{-1} \end{pmatrix} u, \quad (1.11)$$

Ce qui donne

$$C(A,B) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{g}{J} \\ 0 & 0 & -\frac{g}{J} & 0 \\ 0 & \frac{1}{J} & 0 & 0 \\ \frac{1}{J} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

inversible
 \Rightarrow loc. com.

5 Commandabilité (à partir du linéarisé, suite)

Exemple 6 *Cuve chauffante*

$x_1 = h$ hauteur d'eau (\exists «fuite»)

$x_2 = \theta_s$ température

$u_1 = Q_e$ débit alim.

$u_2 = P_u$ puissance chauffe

$$Q_e = S \frac{dh}{dt} + \alpha \sqrt{h}, \quad (1.12)$$

$$\frac{d\theta_s}{dt} = \frac{P_u - Q_e \rho c (\theta_s - \theta_e)}{S h \rho c}. \quad (1.13)$$

En notant $x_1 = h$ la première sortie, $x_2 = \theta_s$ la seconde, $u_1 = Q_e$ la première entrée et $u_2 = P_u$ la seconde on obtient

$$\frac{dy_1}{dt} = \frac{1}{S} (u_1 - \alpha \sqrt{y_1}),$$

$$\frac{dy_2}{dt} = \frac{u_2 - u_1 \rho c (y_2 - \theta_e)}{S \rho c y_1}$$

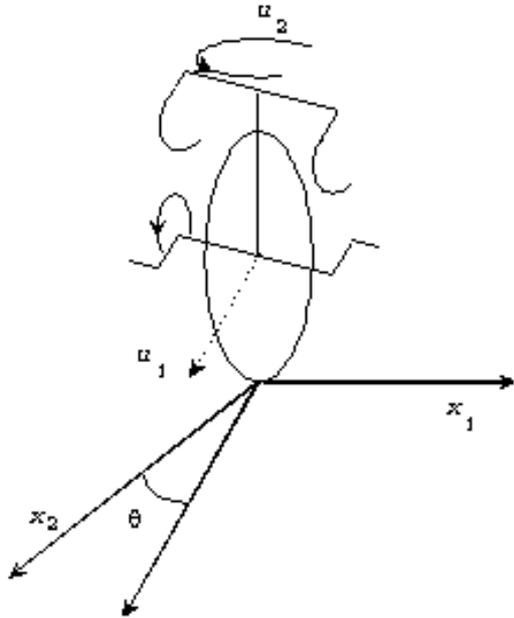
Pour un régime nominal $Q_{e_n} = 20 \text{ l/mn}$, $h_n = 0.6 \text{ m}$, $\theta_s = 50^\circ \text{ C}$, avec valeur numérique suivante $\theta_e = 20^\circ \text{ C}$, $S = 1$, $\alpha = \frac{30}{\sqrt{0.6}} \text{ l/(m} \times \text{mn)}$ le modèle linéarisé est

$$\dot{x} = Ax + Bu,$$

$$A = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3600} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{1800} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -50 & \frac{1}{12 \times 10^6} \end{pmatrix}, \quad (\text{loc. commandable})$$

$$x \in (\text{m}, ^\circ \text{C}), u \in (\text{m}^3/\text{s}, \text{W})$$

- CNS ? un contre exemple (syst. non holonome)



(monocycle autour de 0)

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= \sin(\theta)u_1, \\ \frac{dx_2}{dt} &= \cos(\theta)u_1, \\ \frac{d\theta}{dt} &= u_2.\end{aligned}$$

$$A = 0, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

... paire
non com. !
(alors, comment font-ils ?)

« La vérité est ailleurs »
[X-Files]

$$u(t) = \begin{cases} (1, 0), t \in [0, \varepsilon[\\ (0, 1), t \in [\varepsilon, 2\varepsilon[\\ (-1, 0), t \in [2\varepsilon, 3\varepsilon[\\ (0, -1), t \in [3\varepsilon, 4\varepsilon[\end{cases}$$

Interprétation : on utilise ici la non-commutativité des flots de commande *non linéaire*.

Linéaire : $\dot{x} = Ax + Bu, A = 0$ (ici)

$$\Rightarrow x(t_f) = x_0 + B \int_0^{t_f} u_1(\tau) d\tau$$

$$x(2t_f) = x_0 + B \int_0^{t_f} u_1(\tau) d\tau + B \int_{t_f}^{2t_f} u_2(\tau) d\tau$$

$$= x_0 \quad \text{si} \quad u_1 = -u_2,$$

ce qui revient à $\Phi_{Bu_1}^t \circ \Phi_{Bu_2}^s = \Phi_{Bu_2}^s \circ \Phi_{Bu_1}^t = \Phi_{B(u_1+u_2)}^t$

Mais en NL, $\Phi_{g_1}^t \circ \Phi_{g_2}^s \neq \Phi_{g_2}^s \circ \Phi_{g_1}^t$ $\Phi_{g_1}^t : \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \theta_0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_{10} + \sin(\theta_0)t \\ x_{20} + \cos(\theta_0)t \\ \theta_0 \end{pmatrix},$

$g_1 = (\sin(\theta), \cos(\theta), 0)^\top, g_2 = (0, 0, 1)^\top \Rightarrow$

$$\Phi_{g_2}^t : \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \theta_0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \\ \theta_0 + t \end{pmatrix},$$

5 Commandabilité (à partir du linéarisé, contre-exemple, suite)

$$\begin{aligned}
 x(\varepsilon) &= x_0 + \varepsilon g_1(x_0) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \left(\frac{\partial g_1}{\partial x} \right)_{\sigma=\sigma_0} g_1(x_0) + o(\varepsilon^2), \\
 x(2\varepsilon) &= x(\varepsilon) + \varepsilon g_2(x(\varepsilon)) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \left(\frac{\partial g_2}{\partial x} \right)_{\sigma=\sigma(\varepsilon)} g_2(x(\varepsilon)) + o(\varepsilon^2) \\
 &= x_0 + \varepsilon (g_1(x_0) + g_2(x_0)) + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial g_2}{\partial x} \right)_{\sigma=\sigma_0} g_1(x_0) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \left(\frac{\partial g_1}{\partial x} \right)_{\sigma=\sigma_0} g_1(x_0) \\
 &\quad + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \left(\frac{\partial g_2}{\partial x} \right)_{\sigma=\sigma_0} g_2(x_0) + o(\varepsilon^2) \\
 x(3\varepsilon) &= x(2\varepsilon) - \varepsilon g_1(x(2\varepsilon)) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \left(\frac{\partial g_1}{\partial x} \right)_{\sigma=\sigma(2\varepsilon)} g_1(x(2\varepsilon)) + o(\varepsilon^2) \\
 &= x_0 + \varepsilon (g_1(x_0) + g_2(x_0)) + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial g_2}{\partial x} \right)_{\sigma=\sigma_0} g_1(x_0) + \varepsilon^2 \left(\frac{\partial g_1}{\partial x} \right)_{\sigma=\sigma_0} g_1(x_0) \\
 &\quad + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \left(\frac{\partial g_2}{\partial x} \right)_{\sigma=\sigma_0} g_2(x_0) - \varepsilon \left(g_1(x_0) + \varepsilon \left(\frac{\partial g_1}{\partial x} \right)_{\sigma=\sigma_0} (g_1(x_0) + g_2(x_0)) \right) + o(\varepsilon^2) \\
 &= x_0 + \varepsilon g_2(x_0) + \varepsilon^2 \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_2}{\partial x} \right)_{\sigma=\sigma_0} g_2(x_0) + \left(\frac{\partial g_2}{\partial x} \right)_{\sigma=\sigma_0} g_1(x_0) - \left(\frac{\partial g_1}{\partial x} \right)_{\sigma=\sigma_0} g_2(x_0) \right) + o(\varepsilon^2) \\
 &= x_0 + \varepsilon g_2(x_0) + \varepsilon^2 \left(\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_2}{\partial x} \right)_{\sigma=\sigma_0} g_2(x_0) + [g_1, g_2](x_0) \right) + o(\varepsilon^2) \\
 x(4\varepsilon) &= x(3\varepsilon) - \varepsilon g_2(x(3\varepsilon)) + \frac{1}{2}\varepsilon^2 \left(\frac{\partial g_2}{\partial x} \right)_{\sigma=\sigma(3\varepsilon)} g_2(x(3\varepsilon)) + o(\varepsilon^2) \\
 &= x_0 + \varepsilon g_2(x_0) + \varepsilon^2 \left(\left(\frac{\partial g_2}{\partial x} \right)_{\sigma=\sigma_0} g_2(x_0) + [g_1, g_2](x_0) \right) - \varepsilon \left(g_2(x_0) + \varepsilon \left(\frac{\partial g_2}{\partial x} \right)_{\sigma=\sigma_0} g_2(x_0) \right) + o(\varepsilon^2) \\
 &= (Id + \varepsilon^2 [g_1, g_2])(x_0) + o(\varepsilon^2)
 \end{aligned}$$

on constate que tout se passe comme si pendant ce petit intervalle de temps le système avait été soumis à une équation différentielle du type $\dot{x} = [g_1, g_2](x)$.

(5) Commandabilité en Non-Linéaire : définitions

Définition : l'ensemble $\mathcal{A}_{\mathcal{V}}^T(x_0)$ des **états atteignables** depuis x_0 en un temps T dans \mathcal{V} un voisinage de x_0 est

$$\mathcal{A}_{\mathcal{V}}^T(x_0) = \left\{ \begin{array}{l} x_f \in R^n : \exists u \in \mathcal{U}_{adm} : \\ x(t; 0, x_0, u_{[0,T]}) \in \mathcal{V} \quad \forall t \in [0, T] \\ \text{et} \quad x(T; 0, x_0, u_{[0,T]}) = x_f. \end{array} \right\}$$

Algèbre de Lie : somme $f + g$, produit $[f, g]$. $g = (g_1, \dots, g_m)$

$\mathcal{A}(f, g_1, \dots, g_m)$ sous-algèbre engendrée par les $\{f, g_1, \dots, g_m\}$.

- Définition : *distribution d'accessibilité*

L'*algèbre d'accessibilité* notée $\mathcal{A}(f, g_1, \dots, g_m)$ est la plus petite sous-algèbre de champs de vecteurs analytiques définis sur \mathbb{R}^n qui contienne les champs de vecteurs engendrés par $\{f, g_1, \dots, g_m\}$

$$\mathcal{A}(f, g_1, \dots, g_m) = \left\{ [h_k, [h_{k-1}, [\dots [h_2, h_1]]]] , \right. \\ \left. h_j \in \{f, g_1, \dots, g_m\} ; j = 1, \dots, k ; k = 0, \dots, \infty \right\}$$

La *distribution d'accessibilité* est la distr. engendrée par $\mathcal{A}(f, g_1, \dots, g_m)$:

$$A(x) = \text{vect} \{h(x), h \in \mathcal{A}(f, g_1, \dots, g_m)\} \quad (\underline{x \in \mathbb{R}^n}).$$

Théorème : $\dim A(x) = n \Rightarrow$ accessibilité locale depuis x

Théorème 12 Si $\dim(A(x_0)) = n$, alors pour tout \mathcal{V} (voisinage de x_0) et tout $T > 0$ l'ensemble des états atteignables depuis x_0 en un temps $\tau \leq T$ dans \mathcal{V} contient un ouvert non vide de \mathbb{R}^n : dans ce cas le système (4.1) est dit localement accessible depuis x_0 . Si cette dernière propriété est vraie pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$ alors le système est dit localement accessible.

- Cas mono-entrée

$$\mathcal{A}(f, g) = \left\{ h : h = f \text{ ou } (\text{Ad}f)^k g, \right. \\ \left. \text{pour un } k \geq 0 \text{ (fini ou non)} \right\}.$$

avec $(\text{Ad}f)g = [f, g]$,
 $(\text{Ad}f)^2 g = [g, [f, g]]$,
 $(\text{Ad}f)^k g = [g, [g, [\dots [f, g]]]]$, k fois.

... et on retrouvera le linéaire en testant la dimension (rang)

$$\dim(\text{vect} \{g, (\text{Ad}f)g, (\text{Ad}f)^2 g, \dots\}) \quad !$$

(5) Commandabilité en Non-Linéaire : théorèmes

Théorème 12 Si $\dim(A(x_0)) = n$, alors pour tout \mathcal{V} (voisinage de x_0) et tout $T > 0$ l'ensemble des états atteignables depuis x_0 en un temps $\tau \leq T$ dans \mathcal{V} contient un ouvert non vide de \mathbb{R}^n : dans ce cas le système (4.1) est dit localement accessible depuis x_0 . Si cette dernière propriété est vraie pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$ alors le système est dit localement accessible.

Définition 13 Le système (4.1) est fortement accessible depuis x_0 si pour tout \mathcal{V} (voisinage de x_0) l'ensemble des points atteignables en un temps donné T depuis x_0 contient un ensemble ouvert non vide de \mathbb{R}^n pour T suffisamment petit.

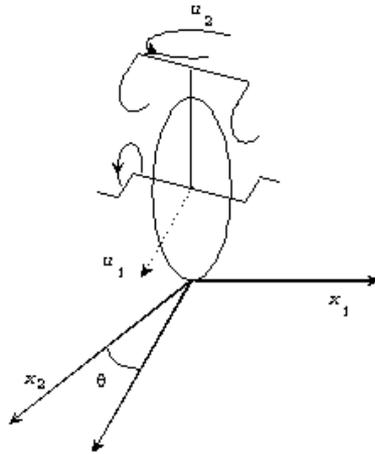
Définition 14 L'algèbre d'accessibilité forte notée $\mathcal{AF}(g_1, \dots, g_m)$ est la plus petite sous-algèbre de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs analytiques définis sur \mathbb{R}^n qui contienne les champs de vecteurs $\{g_1, \dots, g_m\}$ et qui soit invariante par f : c'est-à-dire $\forall h \in \mathcal{AF}(g_1, \dots, g_m) : [f, h] \in \mathcal{AF}(g_1, \dots, g_m)$. La distribution d'accessibilité forte est la distribution engendrée par $\mathcal{AF}(g_1, \dots, g_m)$:

$$\mathcal{AF}(x) = \text{vect}\{h(x) : h \in \mathcal{AF}(g_1, \dots, g_m)\}, x \in \mathbb{R}^n, \quad (4.25)$$

Théorème 15 Si $\dim(\mathcal{AF}(x_0)) = n$, alors le système est dit fortement accessible depuis x_0 . Si cette dernière propriété est vraie pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$ alors le système est dit fortement accessible.

Théorème 17 Si $f = 0$ (système sans terme de dérive) ou si $f(x) \in \text{vect}\{g_1(x), \dots, g_m(x)\}, \forall x \in \mathbb{R}^n$ et $\dim(A(x)) = n, \forall x \in \mathbb{R}^n \Rightarrow$ le système est commandable.

Exemple 1 : retour sur le monocycle...



(monocycle)

$$\frac{dx_1}{dt} = \sin(\theta)u_1,$$

$$\frac{dx_2}{dt} = \cos(\theta)u_1,$$

$$\frac{d\theta}{dt} = u_2.$$

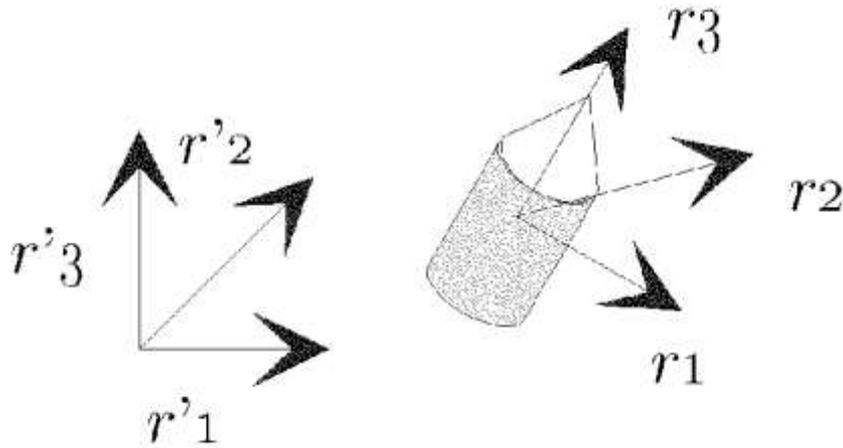
$$[g_1, g_2] = \begin{pmatrix} -\cos(\theta) \\ +\sin(\theta) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$([g_1, g_2], g_1, g_2) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\Rightarrow \dim(\text{vect} \{[g_1, g_2], g_1, g_2\}) = 3.$$

$$f = 0 \Rightarrow \text{commandable}$$

Exemple 2 : satellite



$$j_1 \dot{\omega}_1(t) = \omega_3 \omega_2 (j_2 - j_3) + \sum_{i=1}^m (b_i)_1 u_i,$$

$$j_2 \dot{\omega}_2(t) = \omega_1 \omega_3 (j_3 - j_1) + \sum_{i=1}^m (b_i)_2 u_i,$$

$$j_3 \dot{\omega}_3(t) = \omega_2 \omega_1 (j_1 - j_2) + \sum_{i=1}^m (b_i)_3 u_i.$$

m propulseurs par jets $u_i \Rightarrow$ accessibilité ?

2 paires de jets :

$$b_1 = (1, 0, 0)^T, b_2 = (0, 1, 0)^T$$

$$f = \left(\omega_3 \omega_2 \frac{j_2 - j_3}{j_1}, \omega_1 \omega_3 \frac{j_3 - j_1}{j_2}, \omega_2 \omega_1 \frac{j_1 - j_2}{j_3} \right)^T$$

$$g_1 = \left(\frac{1}{j_1}, 0, 0 \right)^T \quad g_2 = \left(0, \frac{1}{j_2}, 0 \right)^T$$

$$[g_1, f](\omega) = \left(0, \omega_3 \frac{j_3 - j_1}{j_1 j_2}, \omega_2 \frac{j_1 - j_2}{j_1 j_3} \right)^T$$

$$[g_2, f](\omega) = \left(\omega_3 \frac{j_2 - j_3}{j_1 j_2}, 0, \omega_1 \frac{j_1 - j_2}{j_2 j_3} \right)^T$$

$$[g_2, [g_1, f]](\omega) = [g_1, [g_2, f]](\omega)$$

$$[g_2, [g_1, f]](\omega) = \left(0, 0, \frac{j_1 - j_2}{j_1 j_2 j_3} \right)^T$$

⇒ Fortement accessible

- Décomposition canonique

Théorème 20 Si $\dim(A(x_0)) = k < n$, alors il existe \mathcal{V} (voisinage de x_0) et un système de coordonnées locales permettant de définir une sous-variété de dimension k telle que la restriction du système à cette sous-variété soit localement accessible depuis x_0 . Dans des coordonnées locales le système peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned}\dot{z}^1 &= f^1(z) + G_1(z)u \\ \dot{z}^2 &= f^2(z), \\ z^1 &= (z_1, \dots, z_b), \\ z^2 &= (z_{b+1}, \dots, z_n),\end{aligned}$$

c'est-à-dire qu'il existe un difféomorphisme local ($z = \phi(x)$) pour lequel les trajectoires vérifient le système précédent.