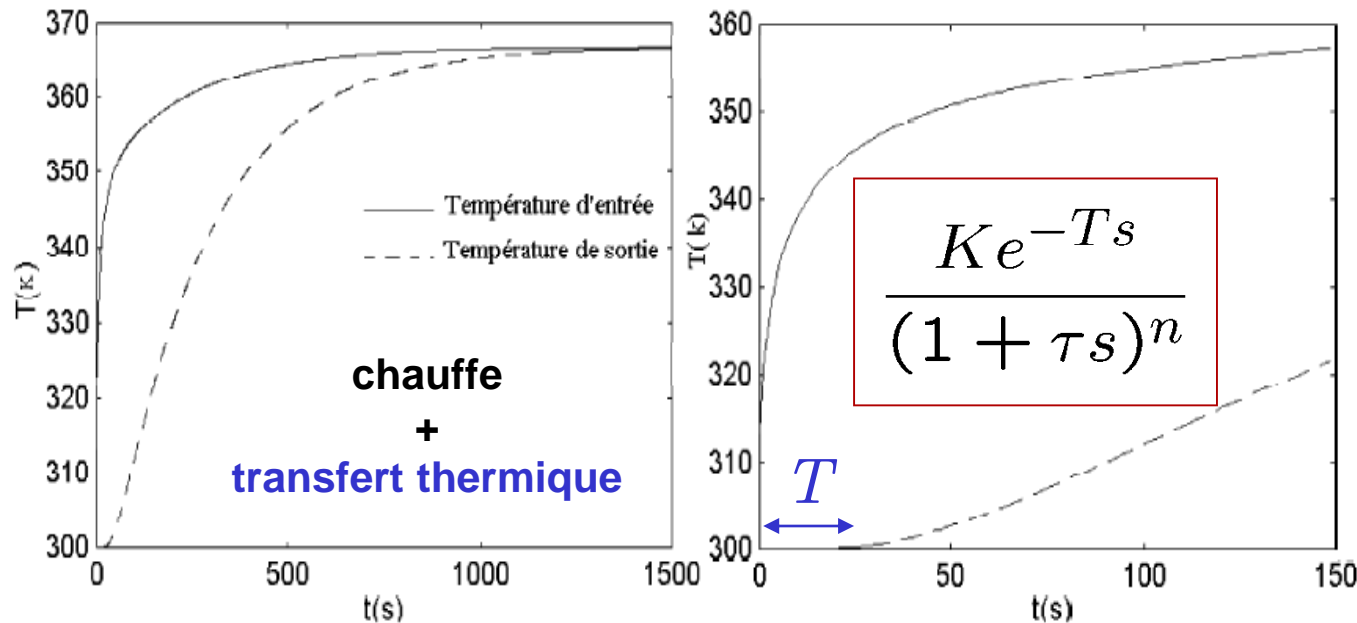


6) Equations Différentielles Fonctionnelles :
cas particulier des
systèmes à retards

Retard : exemple classique

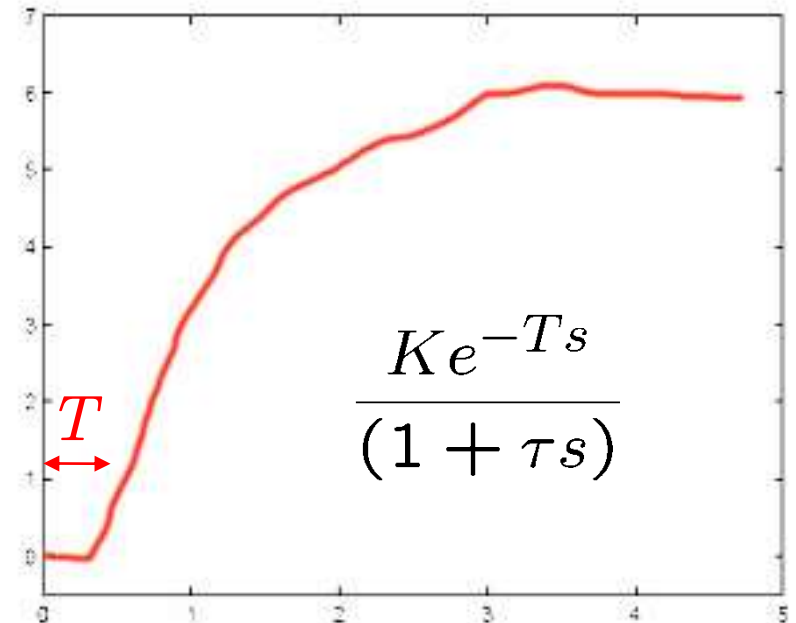
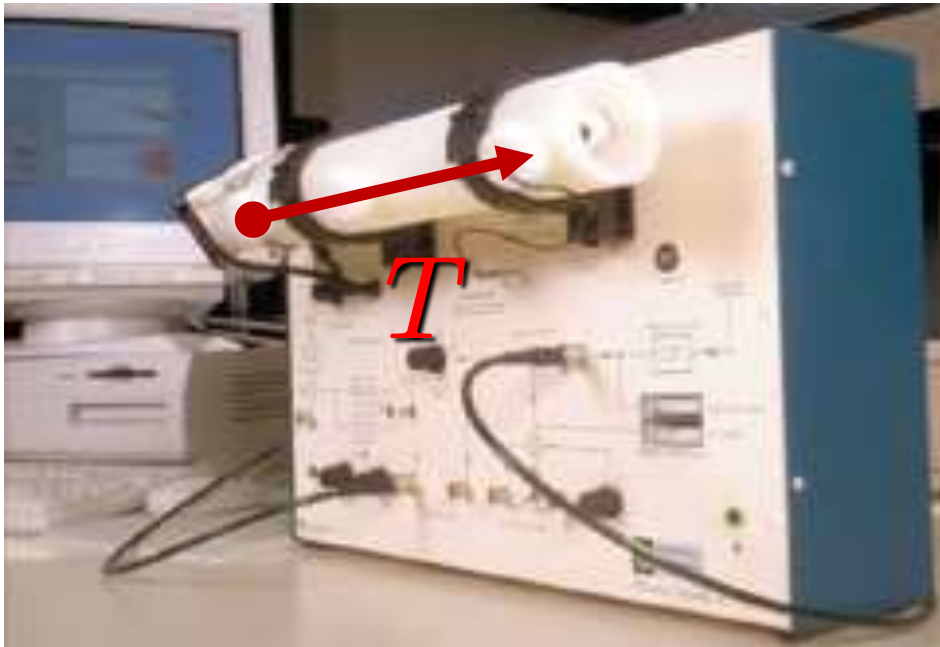
Modèles de type Strejć-Broïda pour la commande industrielle

- usage fréquent en génie des procédés
- approximation simple et générique
- commande PID ? ... marche mal si $T > \tau$
- prédicteur de Smith ou « GPID »



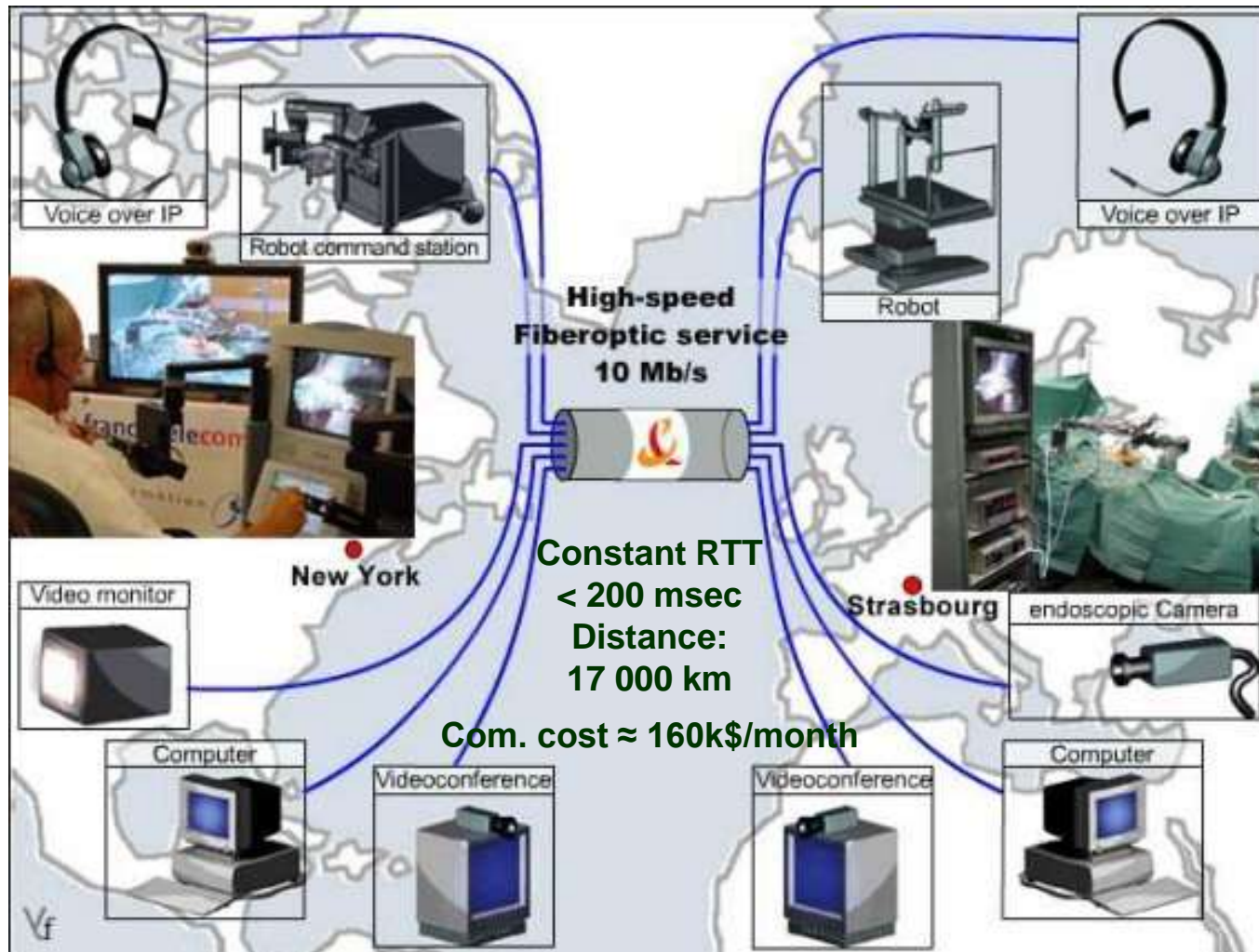
Retard : autre exemple classique

... un grand classique des TP d'automatique (Feedback)



$$\left. \begin{array}{l} T \approx 20 \cdot 10^{-3} \text{ sec}, \\ \tau \approx 1 \text{ sec}. \end{array} \right\} \text{PID ok}$$

Tele surgery: the Lindbergh operation, 07/09/2001

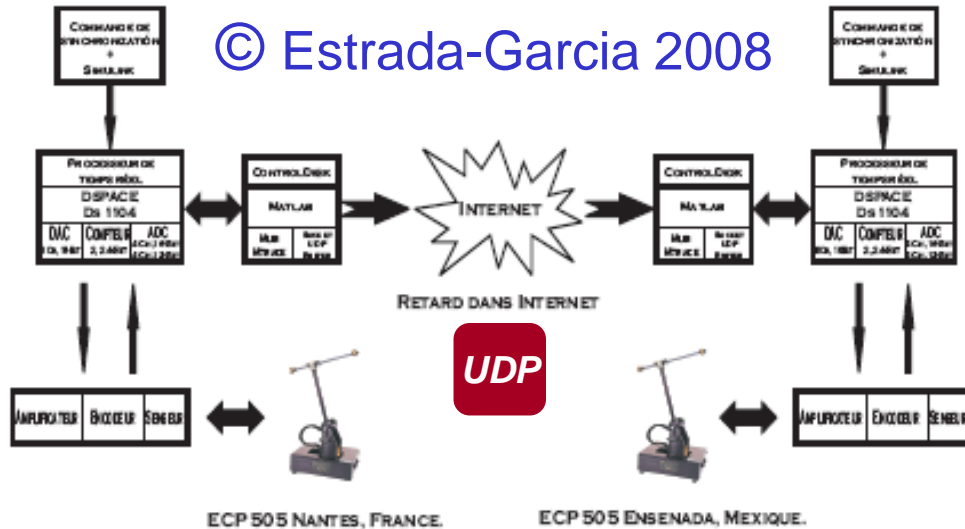


« The only restriction to the development of long-distance tele-surgery has to do, still today, with its cost. For tele-surgery, you must use a transcontinental ATM line, that you have to book during 6 months, at the price of about 1 million dollars. » [Prof. J. Marescaux, Le Monde, January 6, 2010](#)

Retard : un exemple de 2008...

PhD H.J. Estrada-Garcia 2008 (+Moog, Marquez-Martinez)

© Estrada-Garcia 2008



But : synchronisation d'un pendule esclave (Nantes) sur un pendule maître (Ensenada).

y^{ref} supposée connue par les deux.

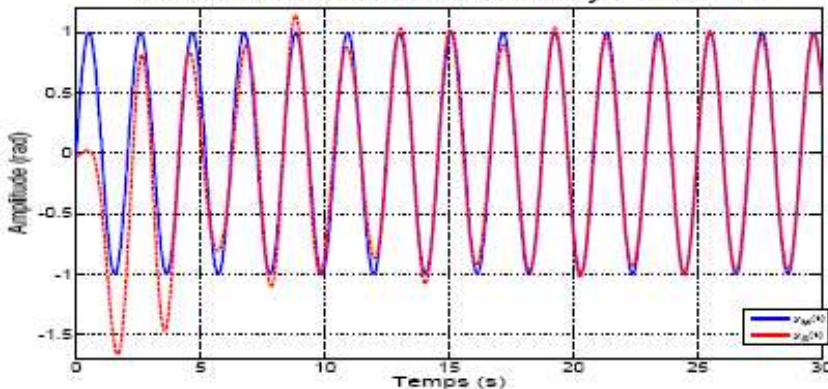
Stratégie :

- 1) *buffers* à 300ms = τ
- 2) commande tq écart m/e régi par :

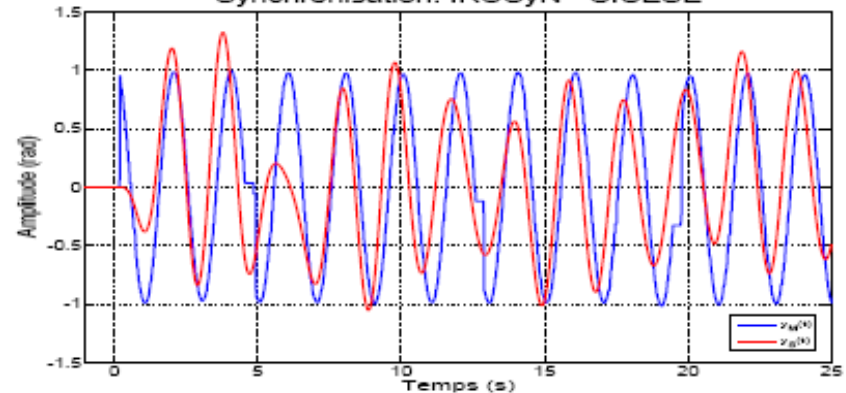
$$e^{(3)}(t) + a_2 \ddot{e}(t - \tau) + b_2 \dot{e}(t - \tau) + c_2 e(t - \tau) = 0.$$

→ commande causale

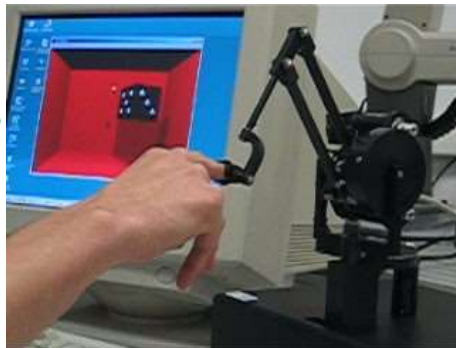
Synchronisation avec retard IRCCyN - CICESE



Synchronisation: IRCCyN - CICESE



other examples...



Bilateral Teleoperation

Remote Monitoring

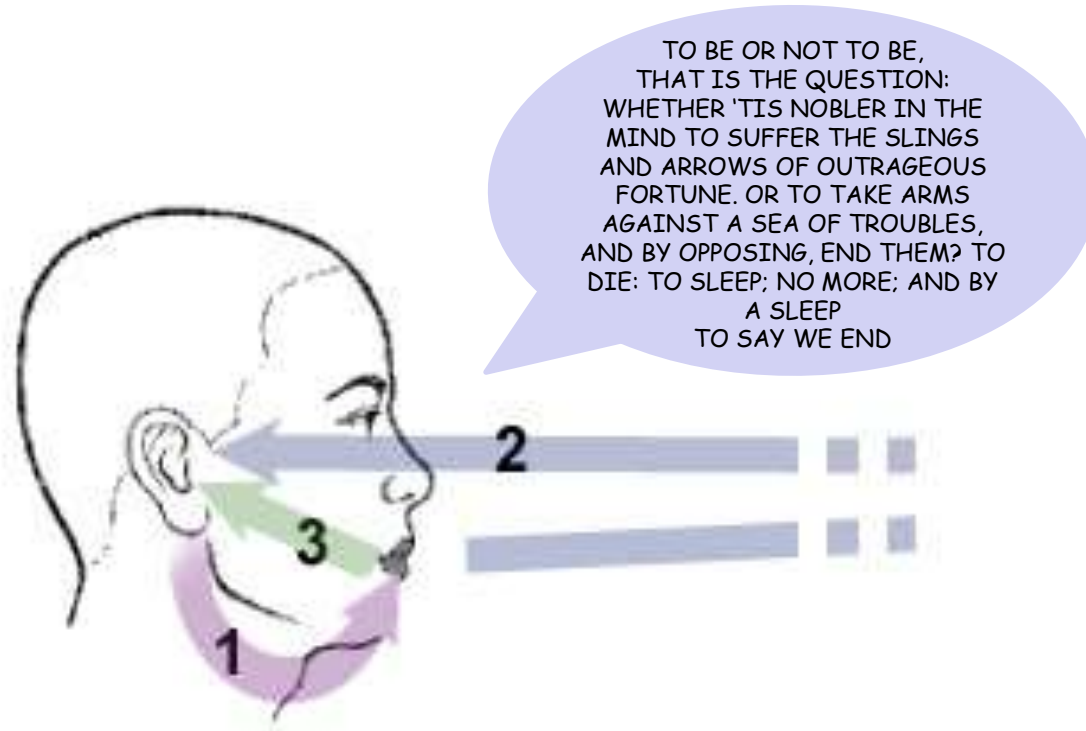


Avoiding electrical cabling

Robot collaboration

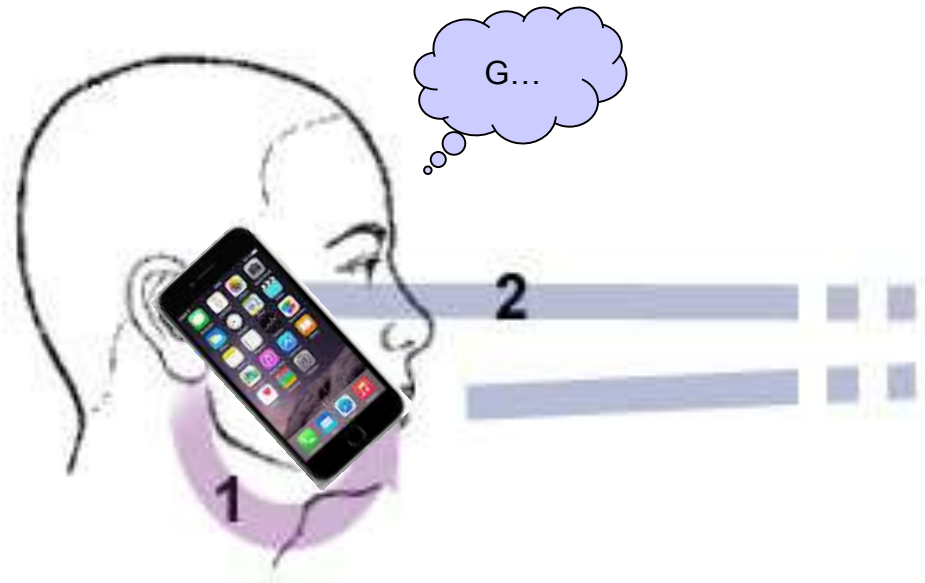


and an example from everyday life...



Natural loop of audio-phonatory control

and an example from everyday life...



Networked loop of audio-phonatory ctrl

but also...



iPad

Footage taken at x8 speed

as well as...

[BOUTIQUE](#)[LE BLOG](#)[CONTACT](#)

Rechercher

[Collaborer](#)

Avec les logiciels

[Interagir](#)

Tableaux et écrans

[Visualiser](#)

Visualiseurs

[Bouger](#)

Valises interactives

[Évaluer](#)

Je Lève La Main

[Essayer](#)

Les prêts

[Aller plus loin](#)

Support et ressources

[Nous connaître](#)

Qui sommes-nous ?

CATÉGORIES

Catégories

Choisir une catégorie



RESTER CONNECTÉ

S'ABONNER À LA NEWSLETTER

N'achetez pas un vidéoprojecteur Wi-Fi avec un tableau interactif !

Par Thierry, Mardi 19 mai 2009

Catégories : [Tableau Blanc Interactif](#), [Trucs et astuces](#)

J'aime



Tweeter

G+

On a quelques demandes pour des vidéoprojecteurs Wi-Fi (et parfois des demandes très bien intentionnées, venant d'utilisateurs qui souhaitent pouvoir partager des ordinateurs portables et se connecter en Wi-Fi au vidéoprojecteur – ce qui a priori semble une très bonne idée).

Problème, c'est impossible de procéder ainsi avec un TBI.

Pourquoi ? Parce que ces vidéoprojecteurs capturent l'image du PC sous forme de vidéo et l'envoient au vidéo-projecteur.

On arrive à des débits de l'ordre de 5 Mbits/s pour la vidéo (parfois beaucoup plus) sur une connexion Wi-Fi qui typiquement va faire 10 Mbits (parfois moins). Cela crée des délais de latence de l'ordre de la seconde, ce qui est incompatible avec l'usage du TBI.

Cela signifie que quand vous écrivez sur l'écran, il se passera une seconde avant que votre tracé apparaisse...

Vous perdez le côté naturel de l'écriture sur TBI, ce qu'on appelle "le temps réel".

Pourquoi n'observe-t-on pas ce décalage lorsqu'on achète un TBI avec une connexion sans fil, de type Bluetooth ?

Parce que la technologie logicielle utilisée n'est pas la même. Le TBI envoie juste au PC le positionnement de la souris (quelques octets par seconde, ce qui entraîne une latence inférieure à 1/10 seconde). Ensuite, l'image est envoyée normalement au vidéoprojecteur, par la prise VGA, mais aussi sans latence.

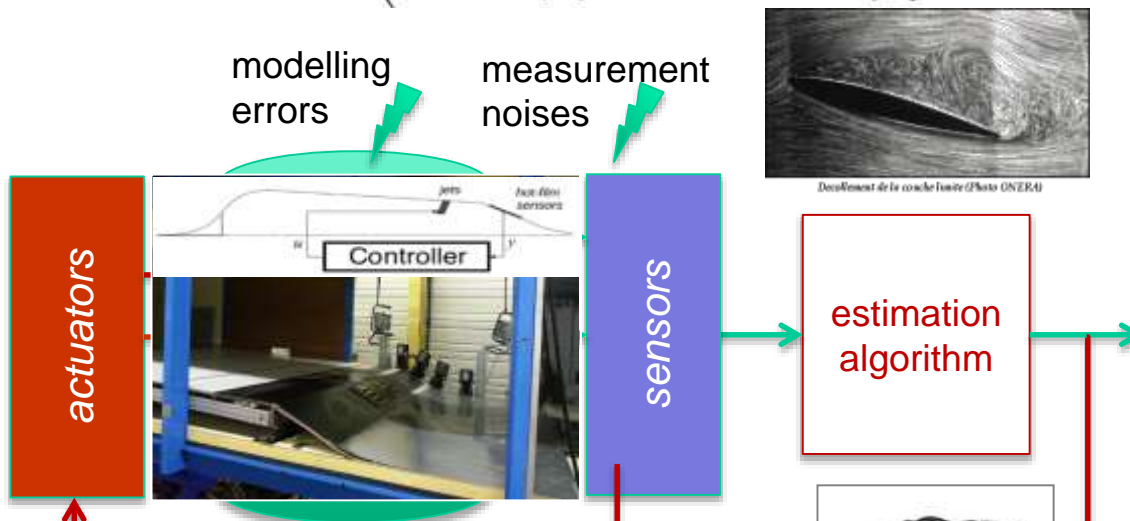
L'impression "temps réel" est alors totalement préservée.



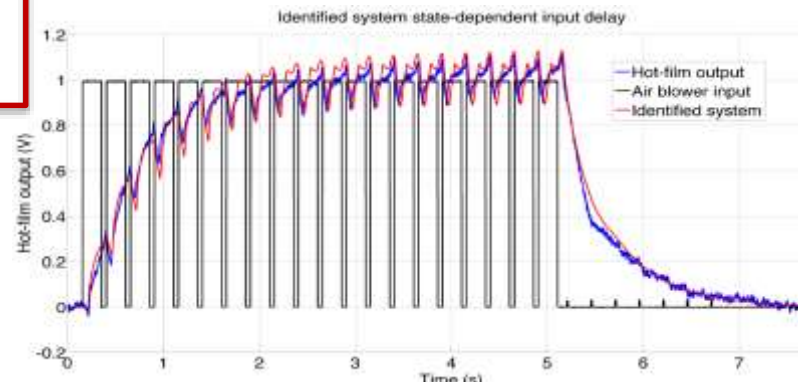
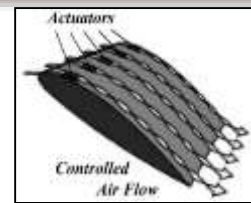
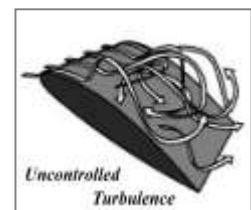
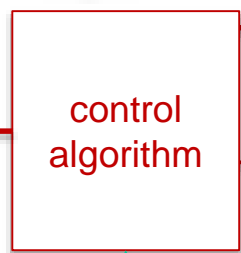
Retard : un exemple en cours

PhD en cours (Feingesicht + Polyakov, Kerhervé, Richard + IEMN, LML, Onera, etc.)

$$\dot{y}(t) = \frac{1}{T} \left(-y(t) + \sum_{i=1}^2 (a_i y(t - \tau_i T)) + \sum_{l=1}^2 (b_l u(t - h_l T)) + \sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^2 (c_{jl} u(t - h_l T) y(t - \tilde{\tau}_j T)) \right)$$




Modèles ?
 - Navier Stokes...
 - non linéaire + retard(s)



Bilinear, Delayed : vous trouvez ça compliqué ?

$$\dot{y}(t) = \frac{1}{T} \left(-y(t) + \sum_{i=1}^2 (a_i y(t - \tau_i T)) + \sum_{l=1}^2 (b_l u(t - h_l T)) + \sum_{l=1}^2 \sum_{j=1}^2 (c_{jl} u(t - h_l T) y(t - \tilde{\tau}_j T)) \right)$$

versus



Navier–Stokes Equations

3 – dimensional – unsteady

**Glenn
Research
Center**

Coordinates: (x,y,z)	Time : t Pressure: p	Heat Flux: q
Velocity Components: (u,v,w)	Density: ρ Stress: τ	Reynolds Number: Re
	Total Energy: Et	Prandtl Number: Pr

Continuity: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$

X – Momentum: $\frac{\partial(\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re_r} \left[\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} \right]$

Y – Momentum: $\frac{\partial(\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uv)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v^2)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re_r} \left[\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} \right]$

Z – Momentum: $\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho uw)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho vw)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w^2)}{\partial z} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{Re_r} \left[\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right]$

Energy:

$$\frac{\partial(E_T)}{\partial t} + \frac{\partial(uE_T)}{\partial x} + \frac{\partial(vE_T)}{\partial y} + \frac{\partial(wE_T)}{\partial z} = -\frac{\partial(up)}{\partial x} - \frac{\partial(vp)}{\partial y} - \frac{\partial(wp)}{\partial z} - \frac{1}{Re_r Pr_r} \left[\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + \frac{\partial q_z}{\partial z} \right]$$

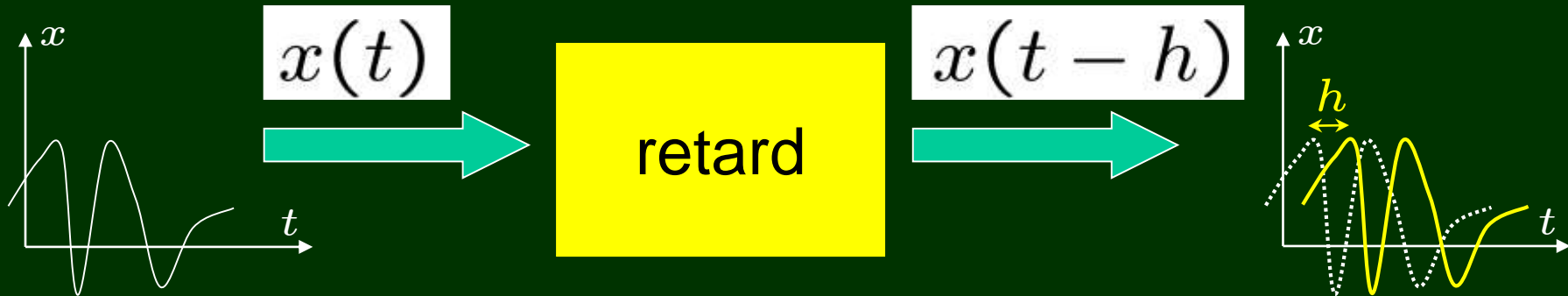
$$+ \frac{1}{Re_r} \left[\frac{\partial}{\partial x} (u \tau_{xx} + v \tau_{xy} + w \tau_{xz}) + \frac{\partial}{\partial y} (u \tau_{xy} + v \tau_{yy} + w \tau_{yz}) + \frac{\partial}{\partial z} (u \tau_{xz} + v \tau_{yz} + w \tau_{zz}) \right]$$

A pretty old topic?

- applied topic, ok
- already old one, sure (2 centuries)
- but contemporary, as well?

<http://www.journals.elsevier.com/automatica/most-downloaded-articles>

Much a do about delay ?

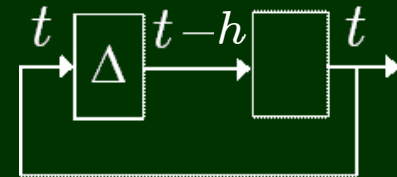


- **problème appliqué** (biblio : cf. Niculescu 2001, Richard 2003, Fridman 2014)

(ingénierie, télécom., temps réel, aéronautique, biologie, populations, etc.)

- **problème toujours ouvert dans de nombreux cas**

(bouclage, retards variables, retards inconnus, identification, etc.)



- **problème de dim. infinie «le plus simple»**

(équations fonctionnelles = cas particulier des EDP)

- **problème à surprises**

(dégradation/amélioration par ajout de retard, modèle d'échantillonnage, etc.)

Plan de la partie SàR

Particularités des SàR

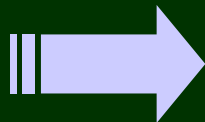
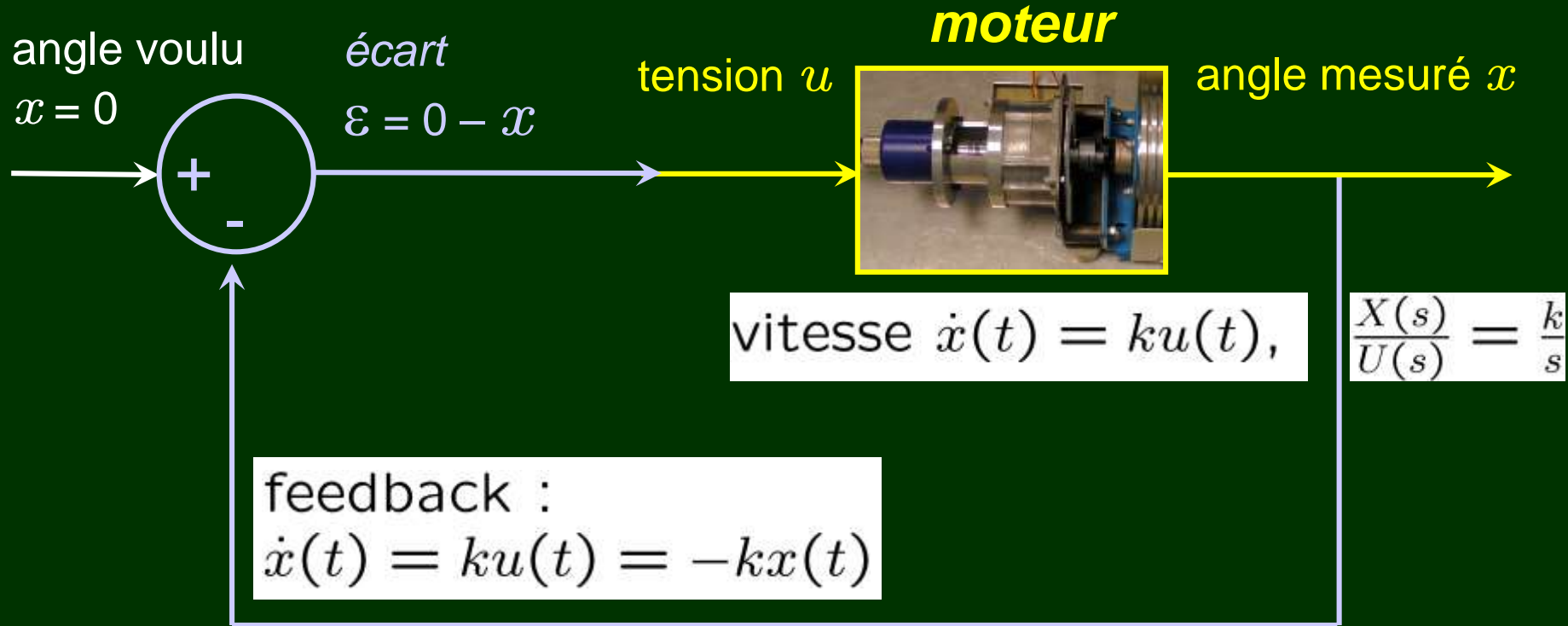
- motivations
- 1^{er} exemple (télé-op.) → notions de base (stabilité, état, dimension infinie)
- 2^{ème} exemple : retard variable → contre-exemple
- 3^{ème} exemple : échantillonnage asynchrone → intérêt
- 4^{ème} exemple : **Networked Control System** (maître-esclave *via* réseau)

Généralités mathématiques

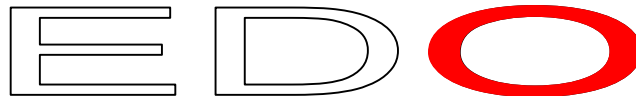
- classification (et exemples 5, 6, 7...)
- problème de Cauchy
- **stabilité**
- formalismes (modèles)
- commande (+ commandabilité) et **prédiction**
- petite bibliographie

Particularités

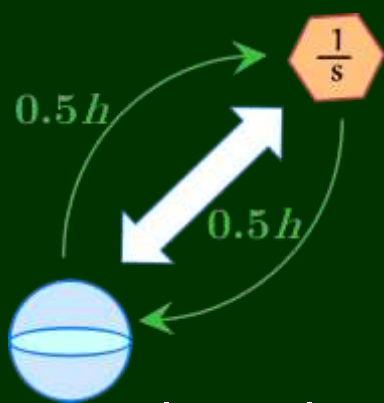
Un exemple simple



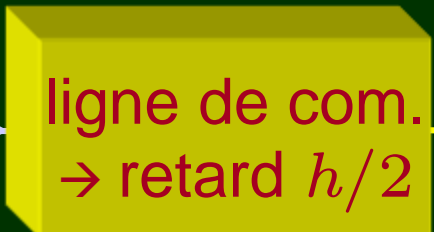
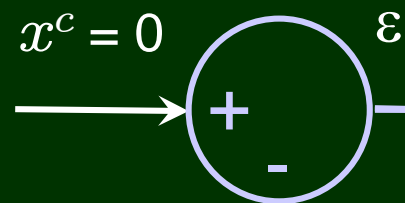
$$\dot{x}(t) + kx(t) = 0$$



Exemple simple (suite)



angle voulu



moteur embarqué (satellite)

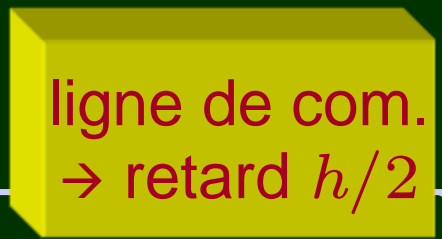


angle mesuré $x(t)$

commande transmise $\epsilon(t-h/2)$

feedback distant :
 $u(t) = k\epsilon(t - h/2) = -kx(t - h)$

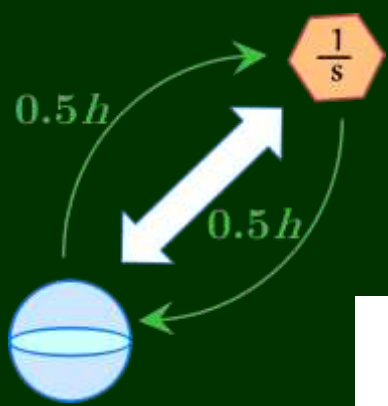
angle transmis $x(t-h/2)$



Paris-LA	$h/2 \approx 50 \cdot 10^{-3} \text{sec}$	$(15 \cdot 10^6 \text{m})$
♁ - ☾	$h/2 \approx 1.28 \text{sec}$	$(0.4 \cdot 10^9 \text{m})$
♁ - ♂	$h/2 \approx 260 \text{ à } 1260 \text{ sec...}$	

$$\dot{x}(t) + kx(t - h) = 0$$

EE D F



Exemple simple (suite)

$$\dot{x}(t) + x(t - h) = 0$$

(cas $h = 1, k = 1$)

$$\dot{x}(t) = -x(t - 1)$$

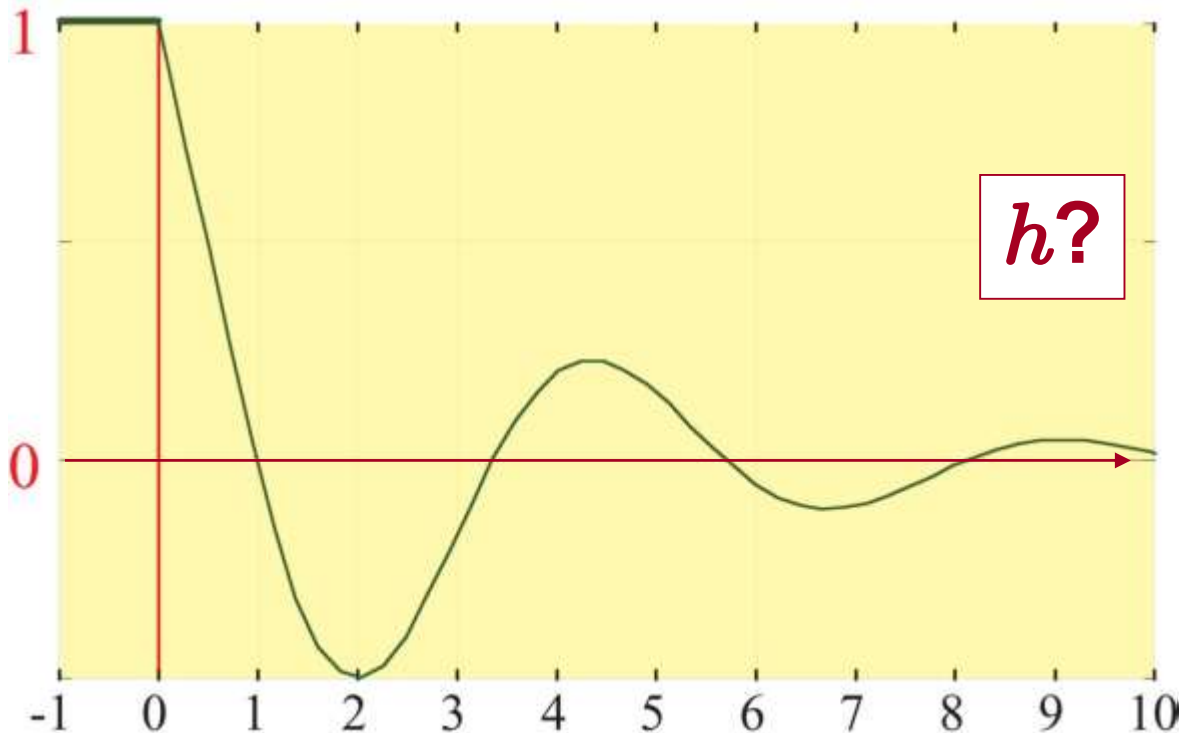
C.I. $t = 0 : x(t = 0) = 1$??

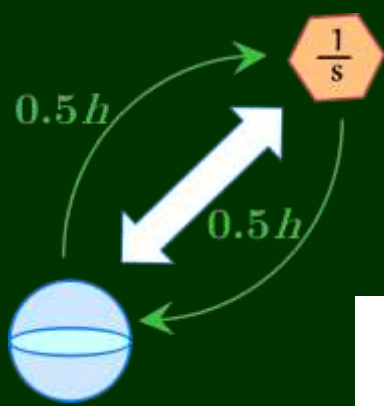
$t \in [-1, 0] : x(t) = 1$ (C.I.)

$t \in [0, 1] : x(t) = 1 - t,$

$t \in [1, 2] : x(t) = \frac{1}{2} - t + \frac{t^2}{2},$

etc.





Exemple simple (suite)

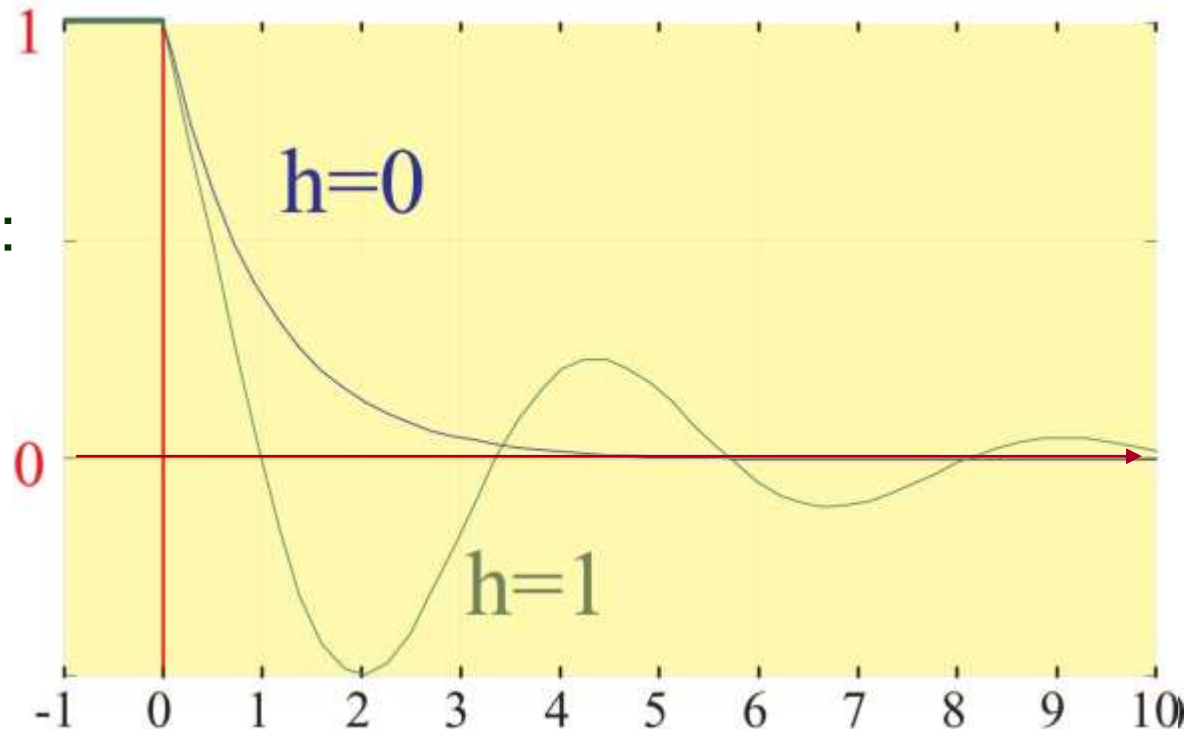
$$\dot{x}(t) + x(t - h) = 0$$

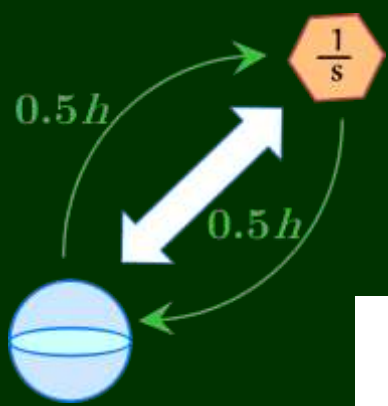
selon h ?

$$\dot{x}(t) + x(t - 1) = 0$$

à comparer avec ($h=0$) :

$$\dot{x}(t) + x(t) = 0$$





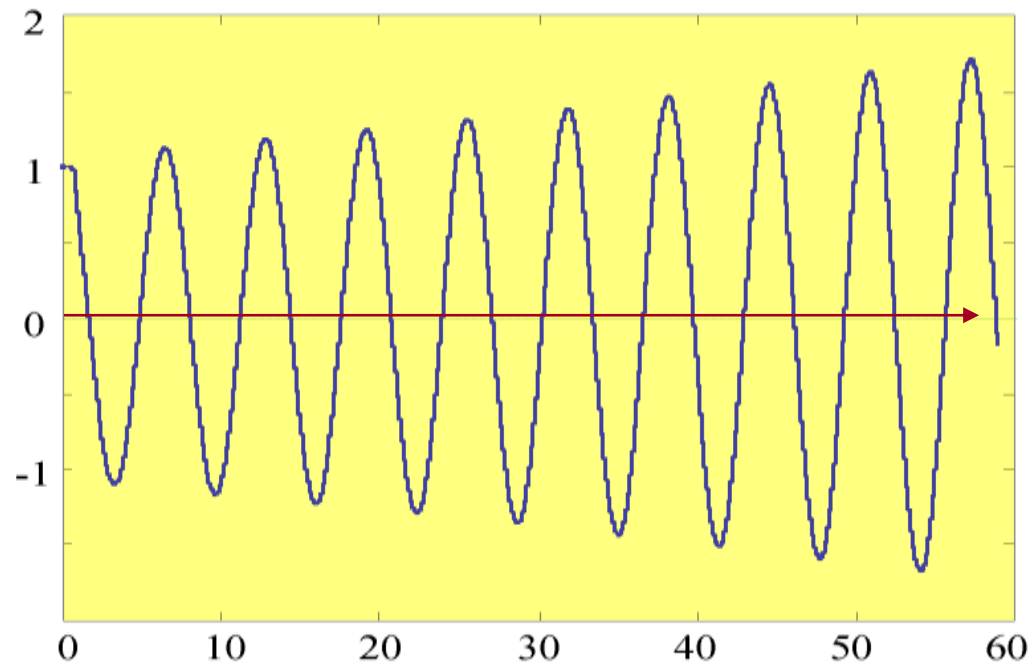
Exemple simple (suite)

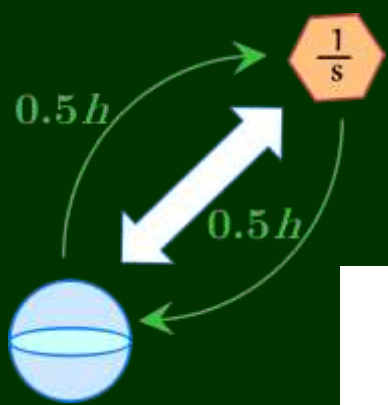
$$\dot{x}(t) + x(t - h) = 0$$

$$h = 1.6$$

$$\dot{x}(t) + x(t - 1.6) = 0$$

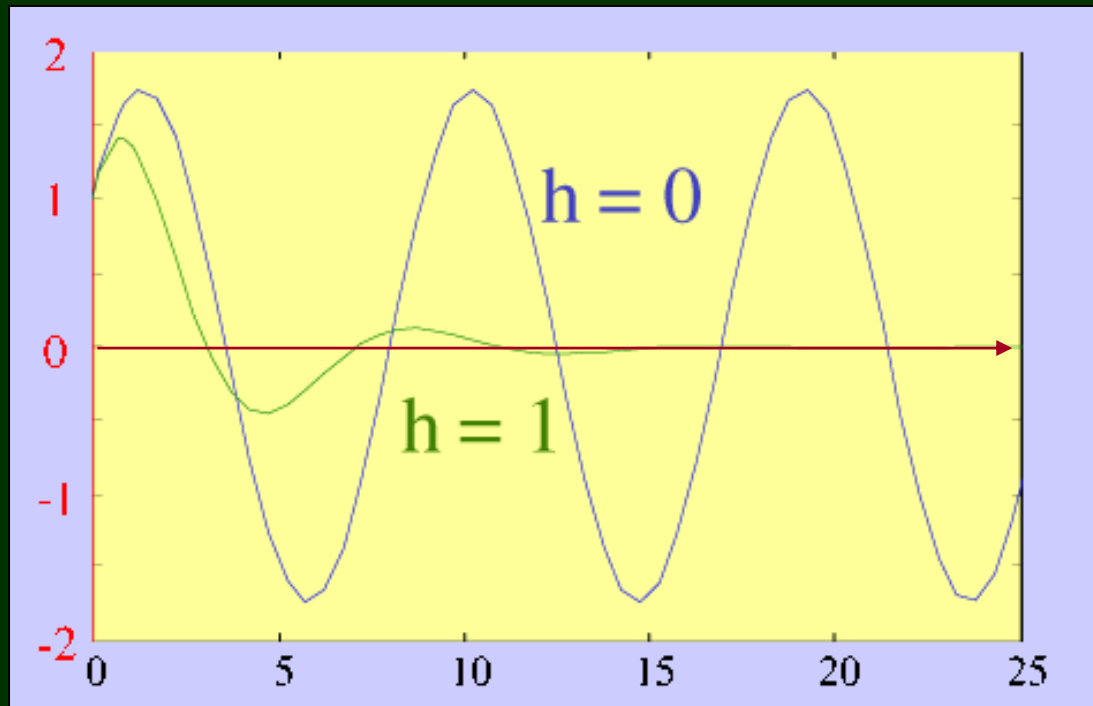
$t \in [-1, 0] : x(t) = 1$ (même C.I.)





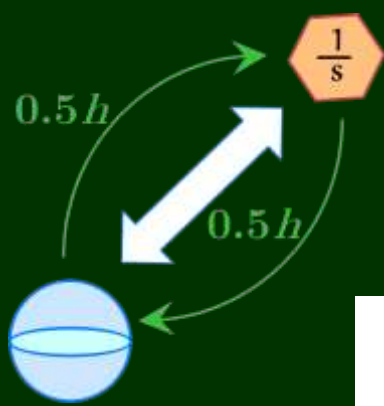
(parenthèse...)

$$\ddot{y}(t) + y(t) - \frac{1}{2}y(t - h) = 0$$



le retard peut aussi avoir un effet stabilisant

ici, effet de dérivée : $y(t - h) \approx y(t) - h\dot{y}(t)$



Retour à l'exemple simple...

$$\dot{x}(t) + x(t - h) = 0$$

$$h = \frac{\pi}{2}$$

$$\dot{x}(t) + x\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}x(t) = -x\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

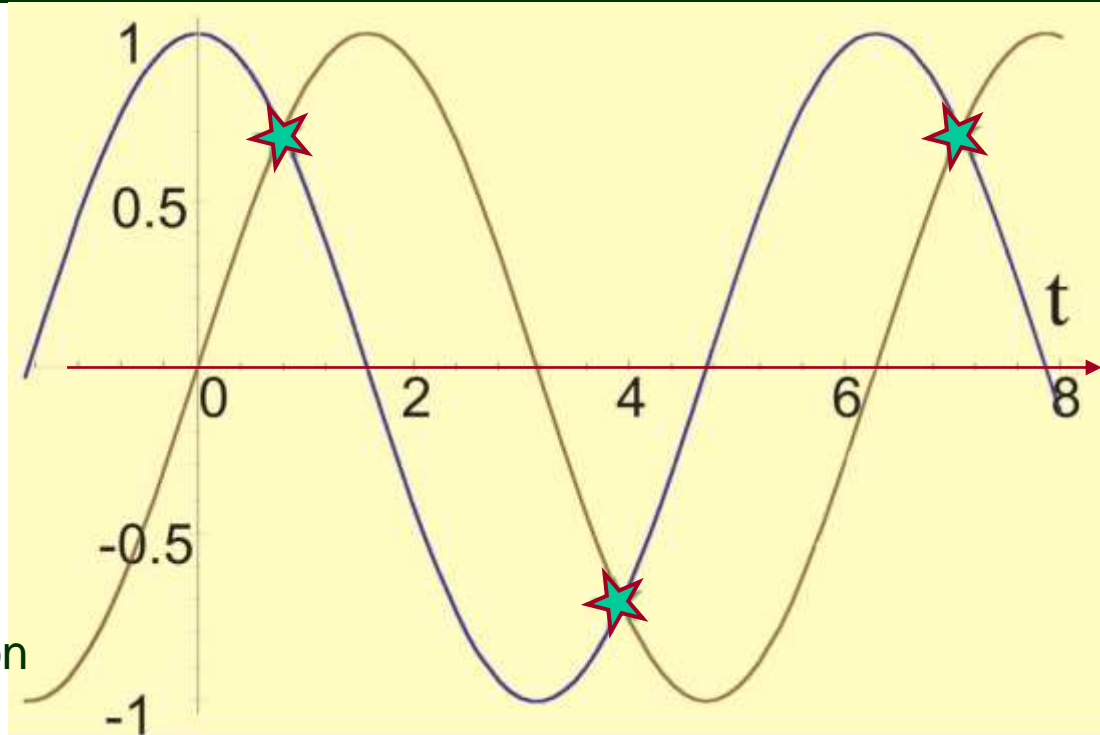
$$x(t) = \cos t,$$

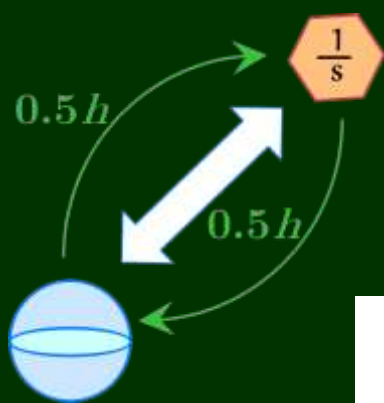
$$x(t) = \sin t,$$

...

→ notion d'« état » ?

variable $\phi(t)$ générant une solution unique à partir de l'instant t





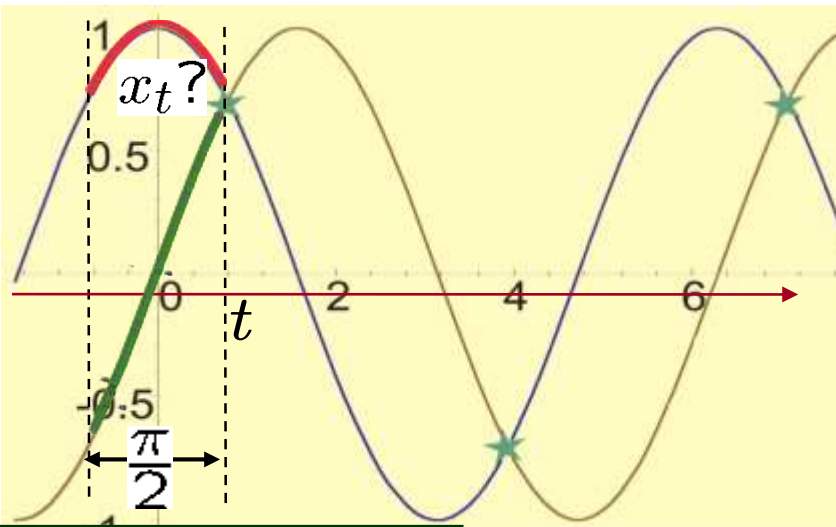
Exemple simple (suite)

$$\dot{x}(t) + x(t - h) = 0$$

$$h = \frac{\pi}{2}$$

(notation de Shimanov, 1960)

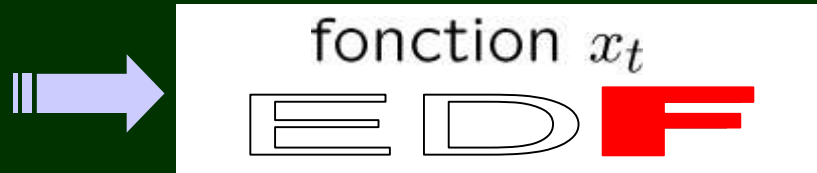
$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x_t, t, u_t), & t &\geq t_0, \\ x_t(\theta) &= x(t + \theta), & -h &\leq \theta \leq 0, \\ u_t(\theta) &= u(t + \theta), & -h &\leq \theta \leq 0, \\ x(\theta) &= \varphi(\theta), & t_0 - h &\leq \theta \leq t_0, \end{aligned}$$



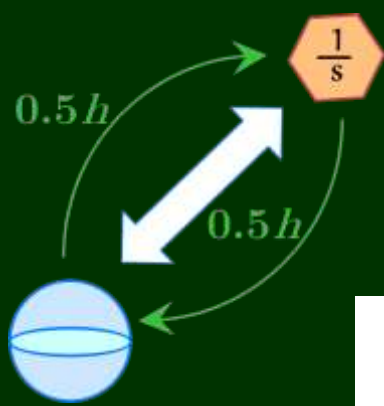
→ notion d' « état » ?

variable $X(t)$ générant une solution unique à partir de l'instant t

fonction $x_t = \text{état}$ à l'instant t
 vecteur $x(t) = x_t(0)$ solution à t



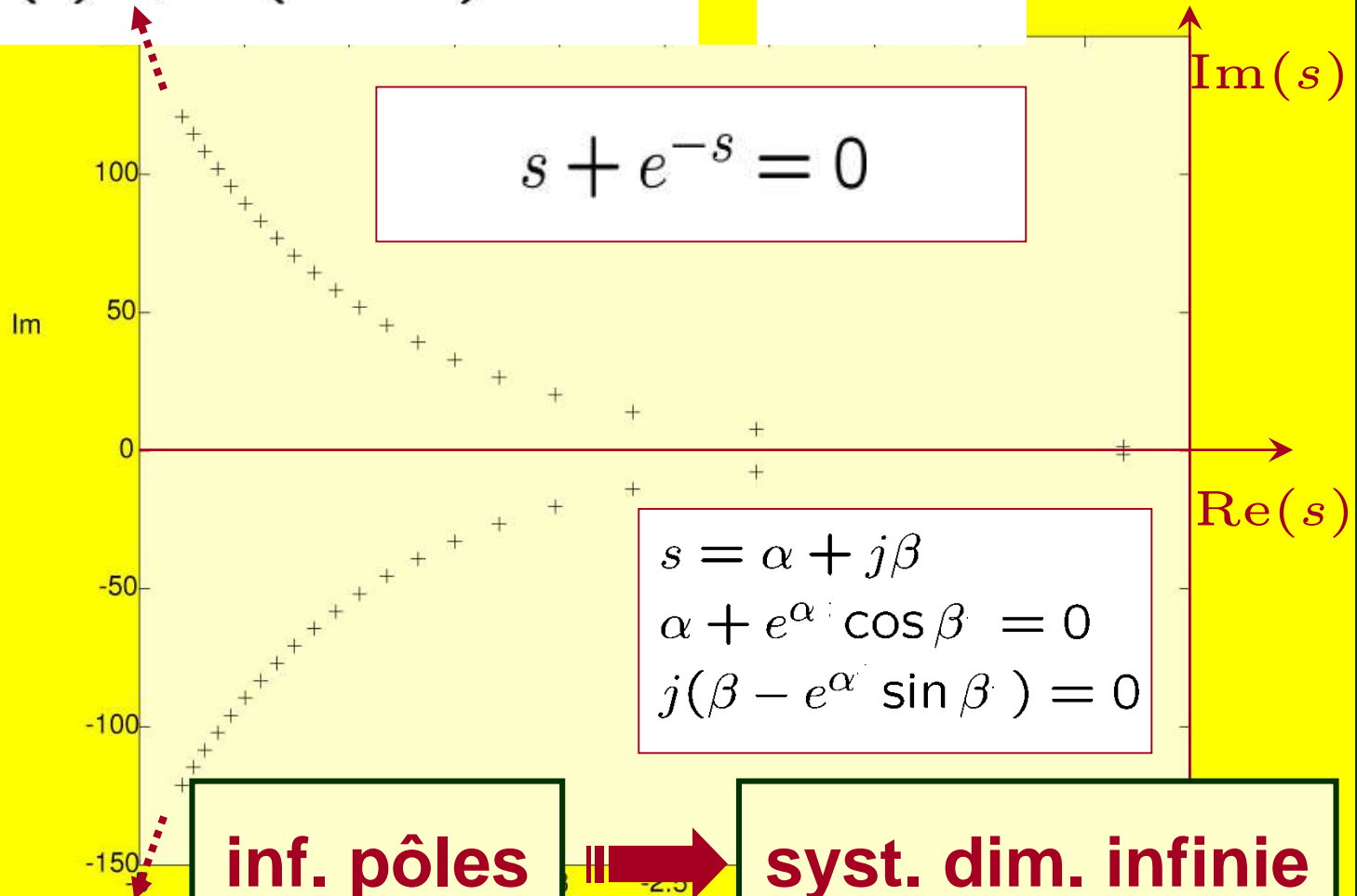
Exemple simple (suite)



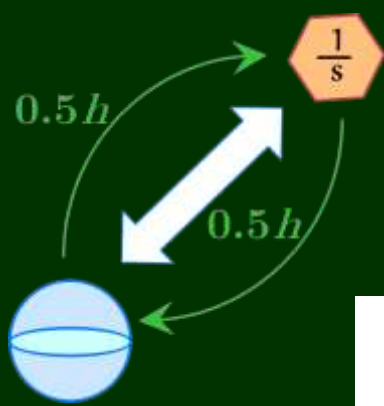
$$\dot{x}(t) + x(t - h) = 0$$

$$h = 1$$

pôles?



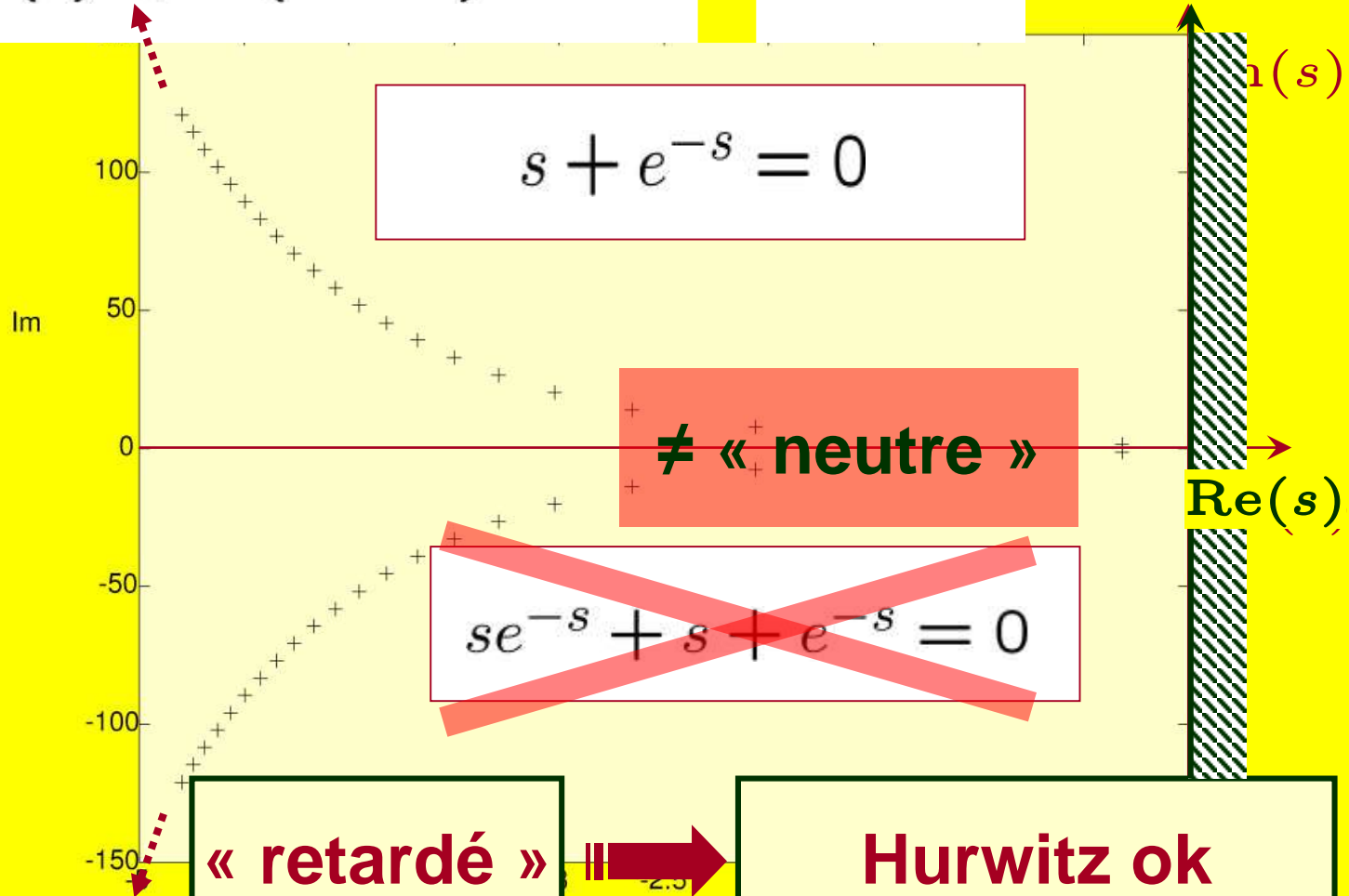
Exemple simple (suite)



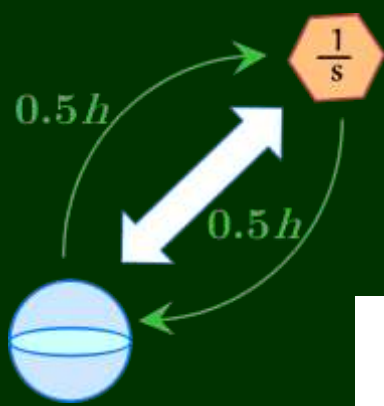
$$\dot{x}(t) + x(t - h) = 0$$

$$h = 1$$

critère
de
stabilité
?



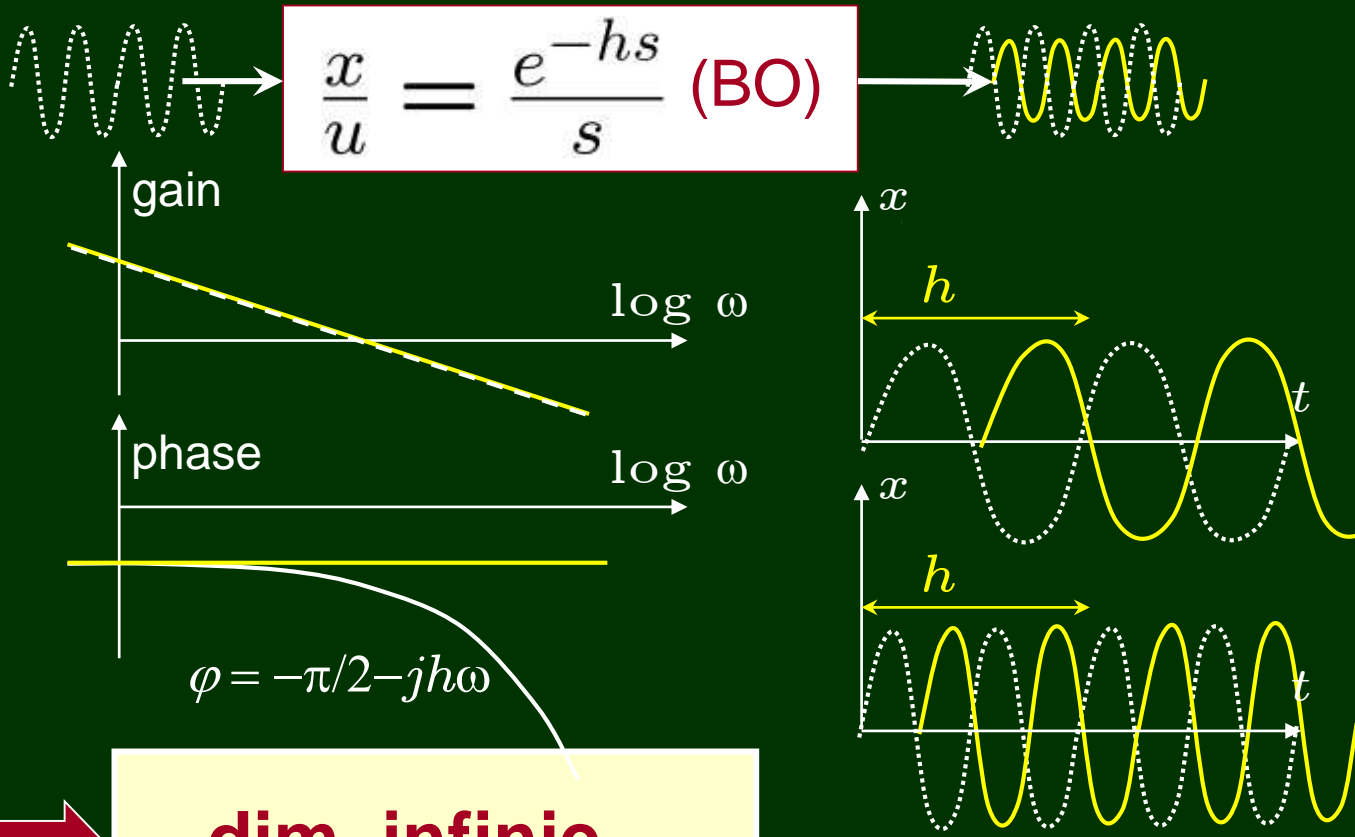
Exemple simple (suite)



$$\dot{x}(t) + x(t - h) = 0$$

$$\frac{x}{u} = \frac{e^{-hs}}{s} \text{ (BO)}$$

comportement fréquentiel ?
(Bode, boucle ouv.)



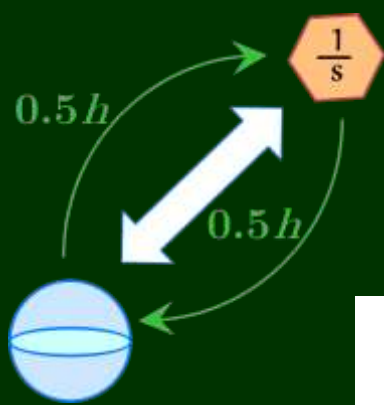
déphasage $\rightarrow \infty$

$$\varphi = -\pi/2 - jh\omega$$

phase $-\infty$



dim. infinie...



Exemple simple (fin!)

$$\dot{x}(t) + x(t - h) = 0$$

Résumons-nous...

retard \Rightarrow forte influence sur la stabilité
 état fonctionnel
 nombre de pôles infini (Hurwitz OK, Routh non)
 déphasage important ($\rightarrow -\infty$)

et, jusqu'ici, c'est assez simple

retard constant
 système linéaire « 1^{er} ordre »

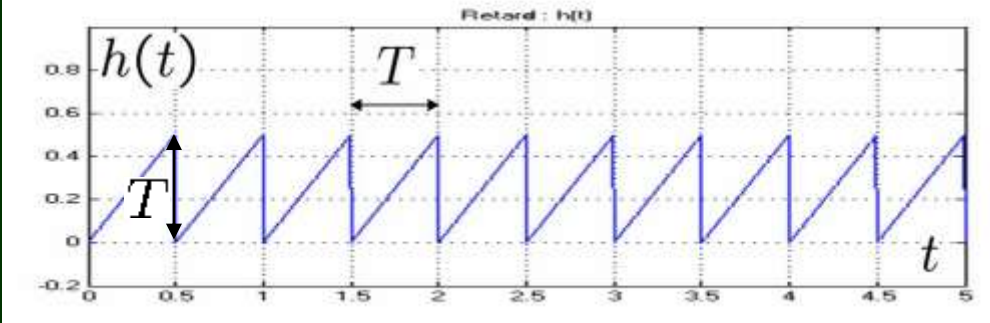
pareil pour retards variables $h(t)$?

un contre-exemple...

(contre-)exemple à retard variable

$$\dot{x}(t) = -ax(t) - bx(t - h(t)) \quad (1)$$

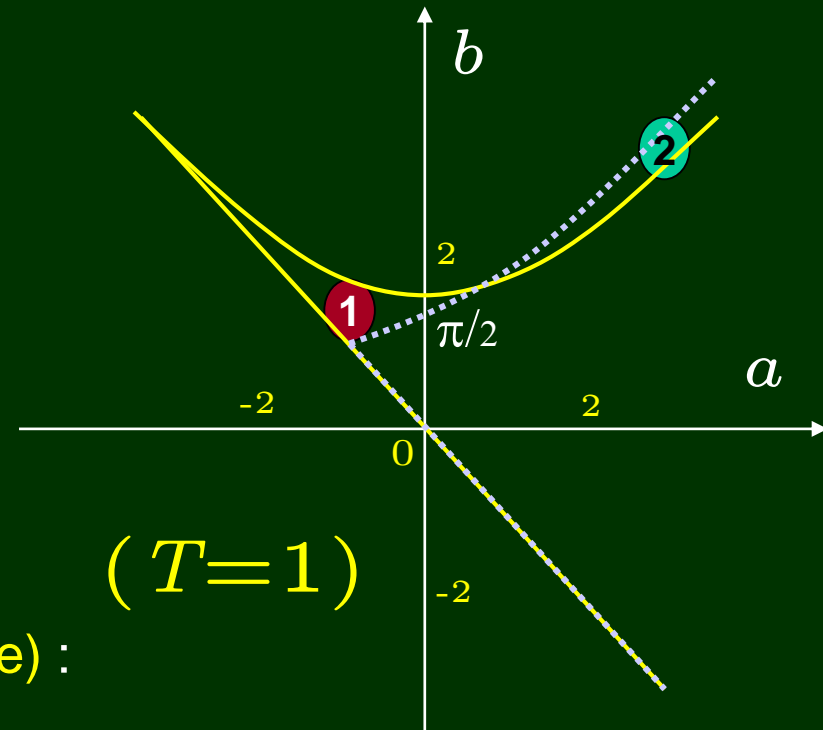
$$h(t) = t - kT \text{ pour } kT < t \leq (k+1)T$$



est asymptotiquement stable ssi (zone jaune) :

$$\begin{aligned} \left| \left(1 + \frac{b}{a}\right)e^{-aT} - \frac{b}{a} \right| < 1 & \quad \text{si } a \neq 0 \\ |1 - bT| < 1 & \quad \text{si } a = 0 \end{aligned}$$

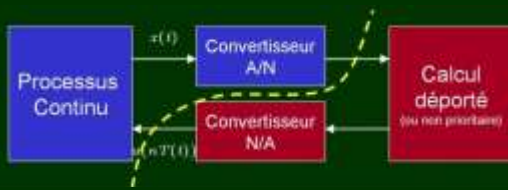
et, pour $h = \text{cste} \in [0,1]$ ssi (zone grise)



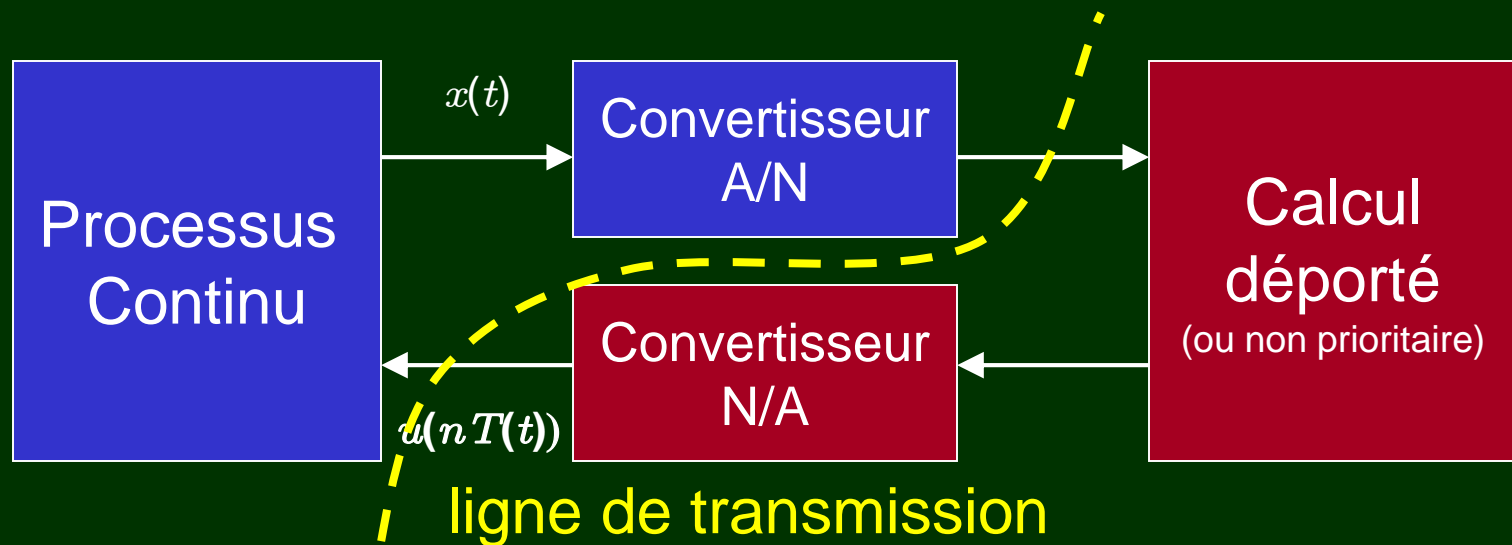
$$(T=1)$$

- 1 stable $h(t) < 1$ - instable $h = \text{cte} < 1$
- 2 instable $h(t) < 1$ - stable $h = \text{cte} < 1$

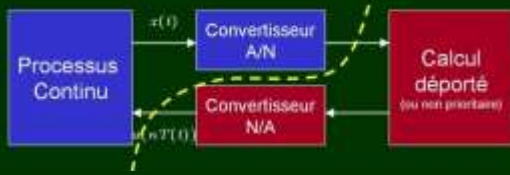
OK, mais ce type de $h(t)$ est-il réaliste ? un autre exemple...



3^e exemple : asynchronous sampling



$$u(t) = g(x(nT(t)))$$



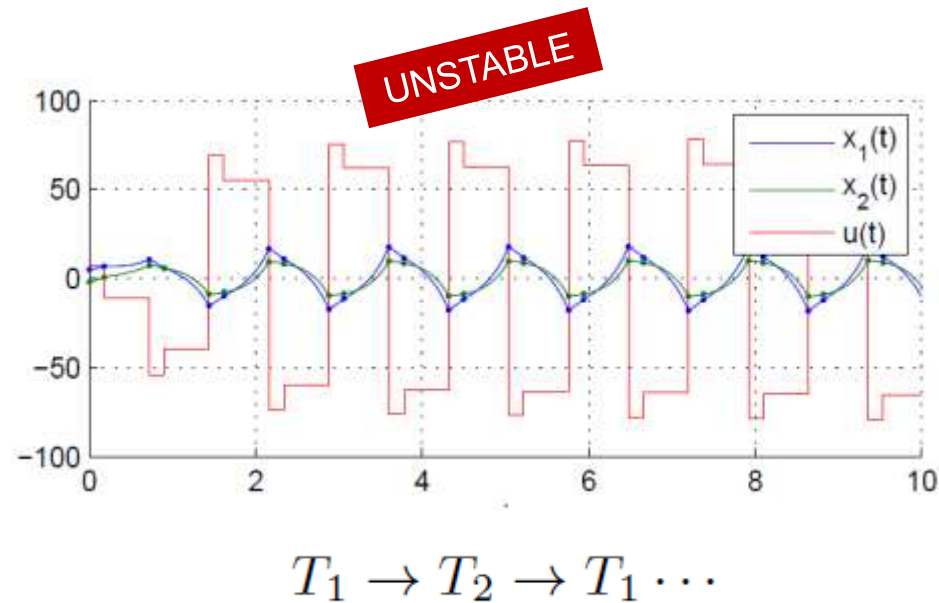
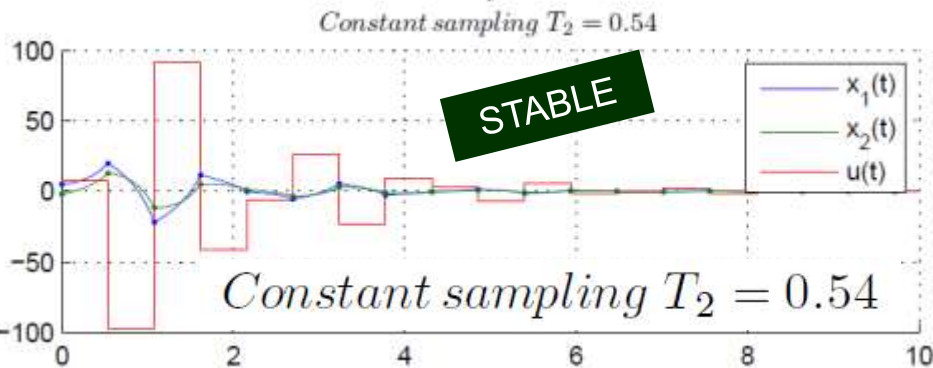
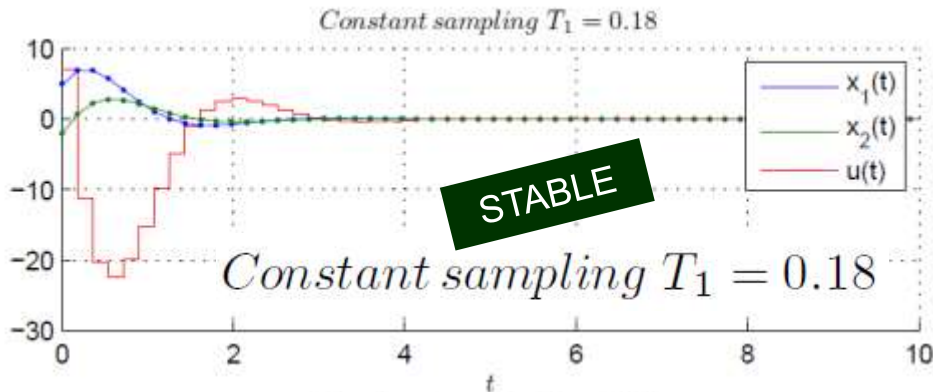
Time-varying sampling:
 → any consequence?

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BKx(t_k), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0.6 \end{bmatrix}, \quad K = - \begin{bmatrix} 1 & 6 \end{bmatrix}. \quad t_{k+1} = t_k + h_k$$

variations of the sampling interval h_k may induce instability.

[Zhang, Branicky, Phillips. - IEEE Ctrl.Syst.Mag. 2001]



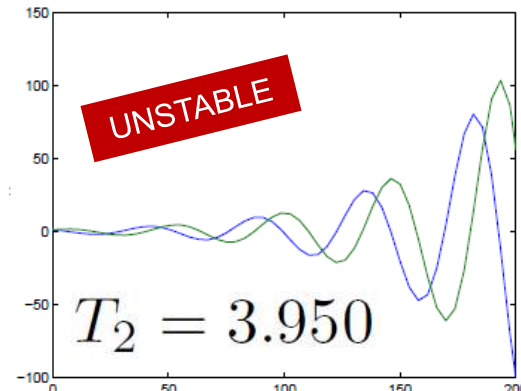
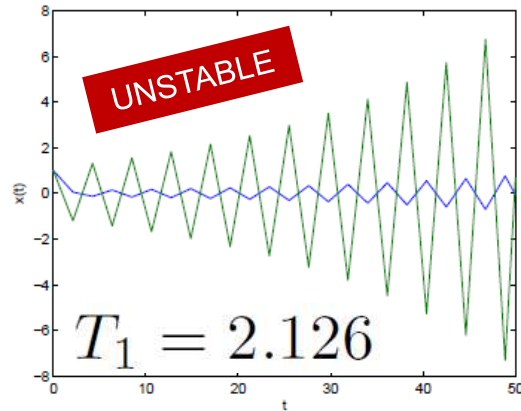


Time-varying sampling: → any consequence?

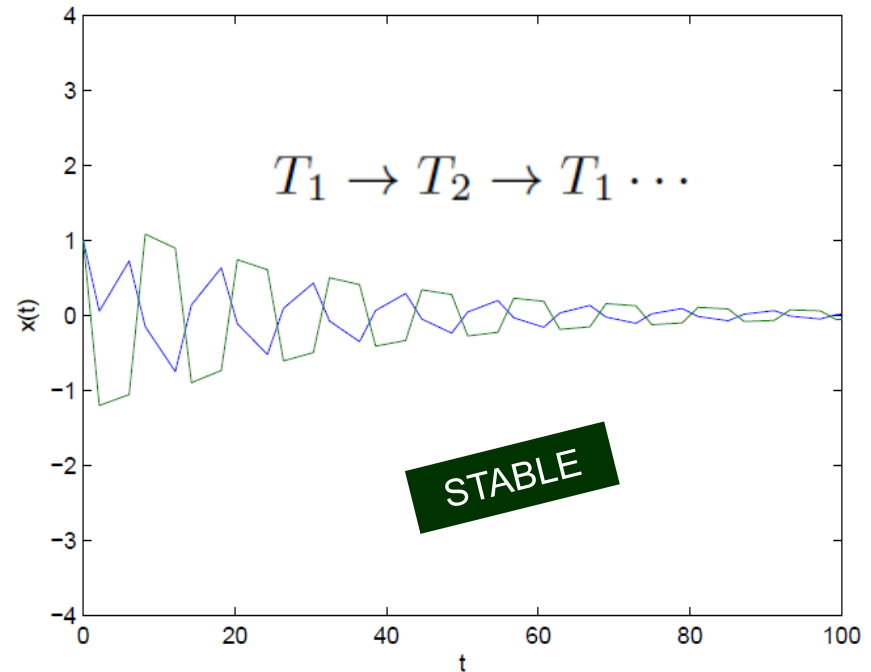
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + BKx(t_k), \quad \forall t \in [t_k, t_{k+1}), \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

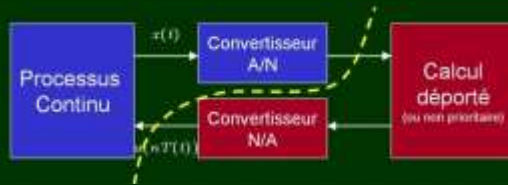
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & 0.1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \quad t_{k+1} = t_k + h_k$$

variations of the sampling interval h_k may induce instability.



[Gu, Kharitonov, Chen - Birkhauser 2003]





Models for aperiodic sampling

Input-Output approach

Hybrid / Impulsive syst.

Input delay systems

"Tutorial on Arbitrary and State-Dependent Sampling "

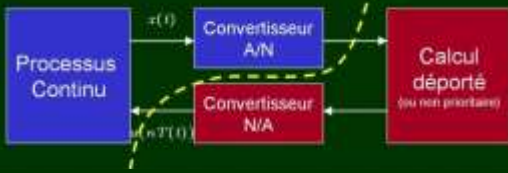
C. FITER, H. OMRAN, L. HETEL, J.P. RICHARD

European Control Conf., Strasbourg, France, 2014

"A robust stability framework for time-varying sampling"

C. FITER, L. HETEL, W. PERRUQUETTI, J.P. RICHARD

Automatica, 45: 56-64, 2015.

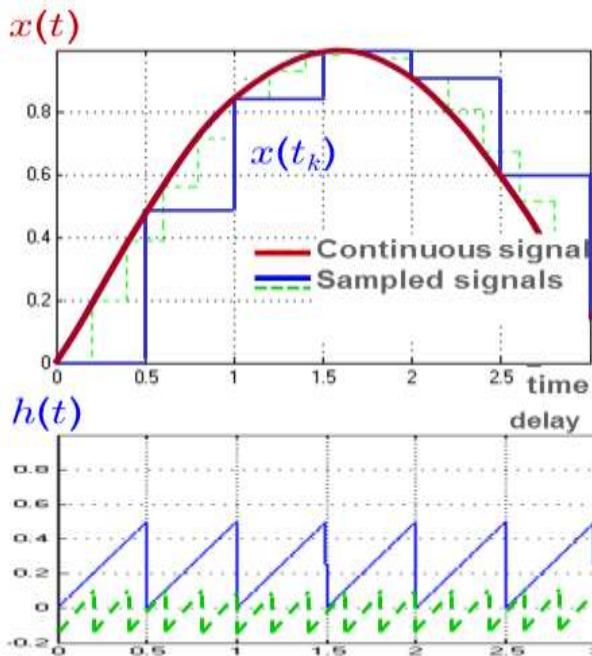


Models for aperiodic sampling

Input-Output approach

Hybrid / Impulsive syst.

Input delay systems



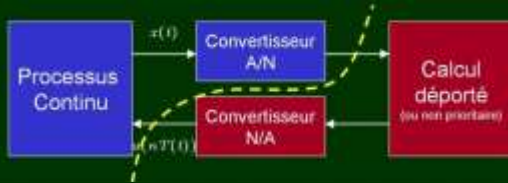
$$x(t_k) = x(t - [t - t_k]) = x(t - h(t))$$

+ stability techniques for TDS

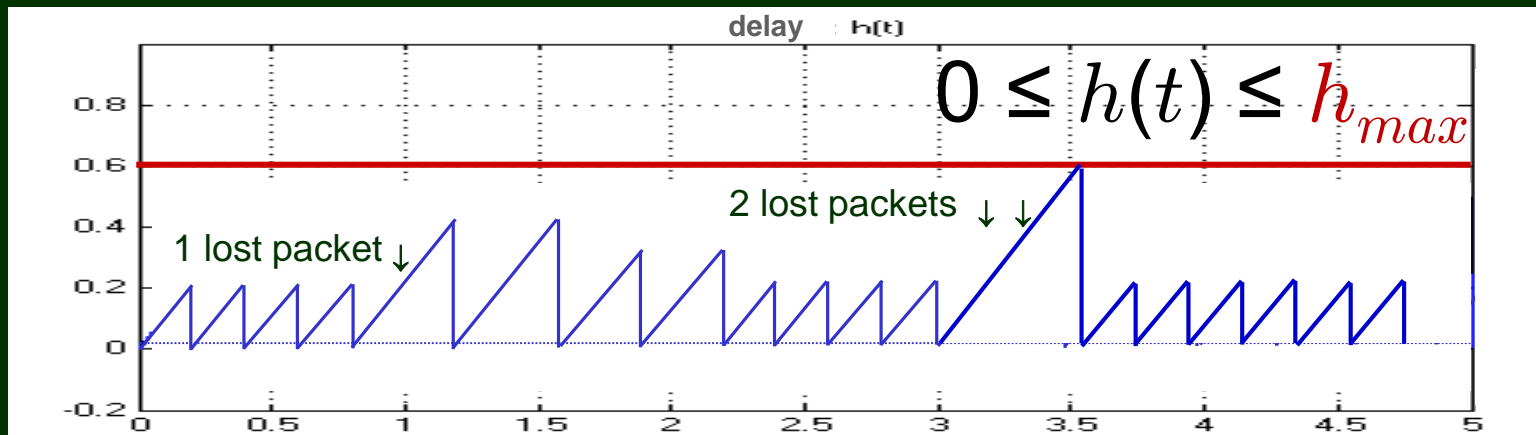
Lyapunov-Krasovskii functionals

$$V(t, x_t, \dot{x}_t) = x^T(t)Px(t) + (\bar{h} - \tau(t)) \int_{t-\tau(t)}^t \dot{x}^T(s)R\dot{x}(s)ds$$

*Mikheev-Sobolev-Fridman AutRem.Ctrl 1988,
 Nešić -Teel-Kokotović CDC1998,
 Fridman-Seuret-Richard Aut 04, Fridman Aut 10, Seuret Aut 12,
 Karafyllis-Krstić TAC 12,
 Mazenc-Malisoff-Dinh Aut 13*



Thus... another statement of the packet loss problem



- *maximum* nb of successively lost packets $\rightarrow h_{max}$
- piecewise-continuous delay with $\frac{d}{dt} h(t) \leq 1$

4th example : Networked Control Systems

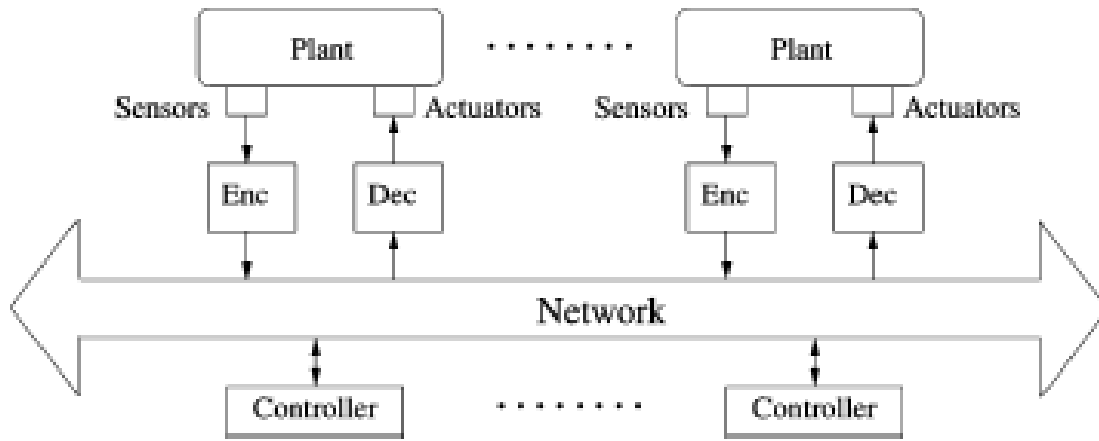


Fig. 1. General NCS architecture.

Hespanha 2007

Multiple-loop NCS according to [Hespanha 2007]:

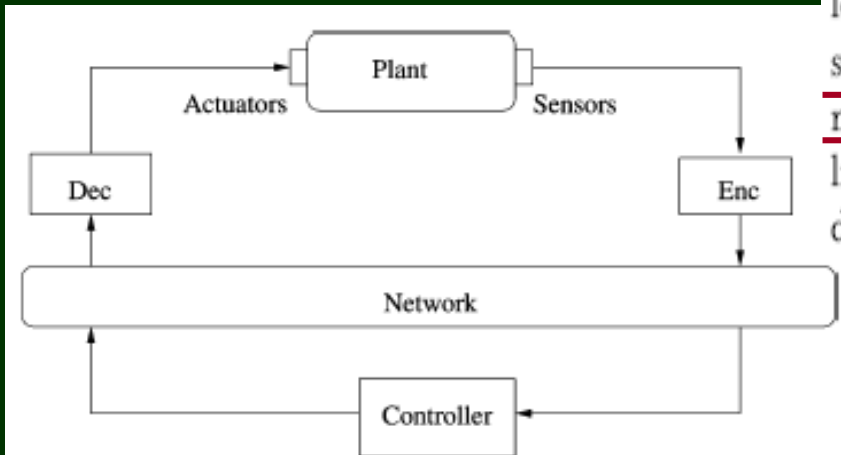


Fig. 2. Single-loop NCS.

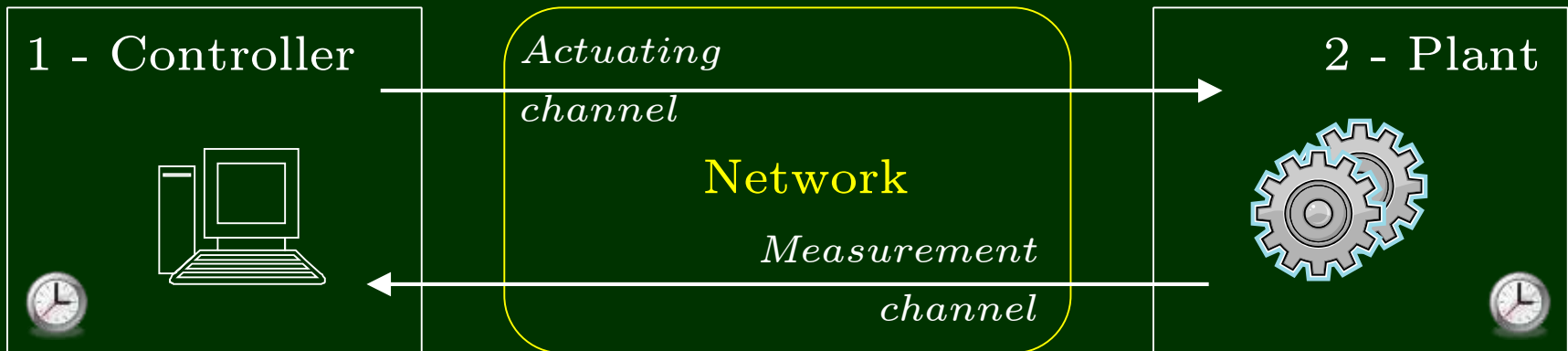
Hespanha 2007

It is also often common to consider a single feedback loop as in Fig. 2. Although considerably simpler than the system shown in Fig. 1, this architecture still captures many important characteristics of NCSs such as bandwidth limitations, variable communication delays, and packet dropouts.

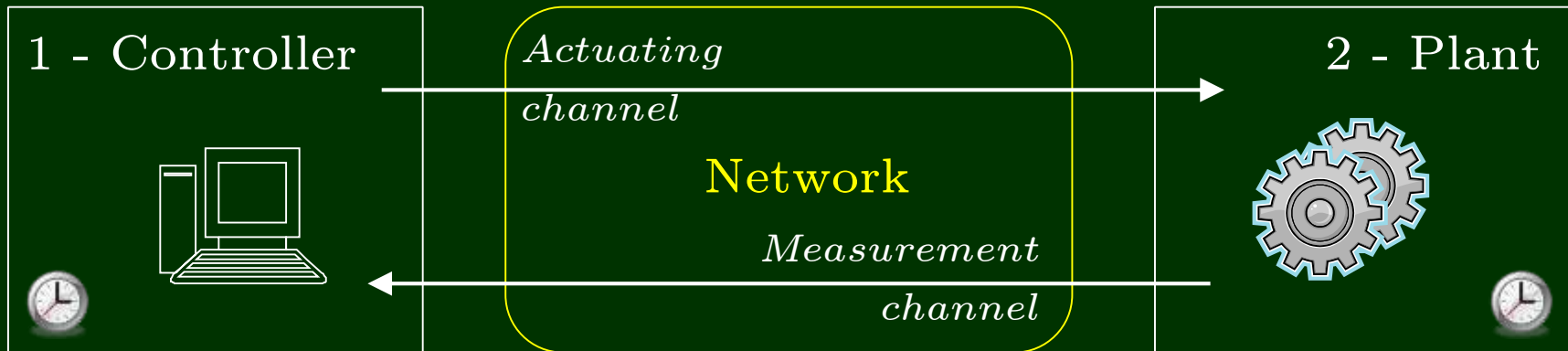
Single-loop NCS.

... the talk will be limited to this case, too.

A good starting point for understanding
the issues linked to the presence
of networks in the loops



Single-loop NCS



Types of networks:

- ✓ dedicated (ControlNet, DeviceNet) : frequent transmission of small packets → guaranteed time but €
- ✓ Ethernet, wifi : rare transmission of bigger packets → no guarantee for delay but €

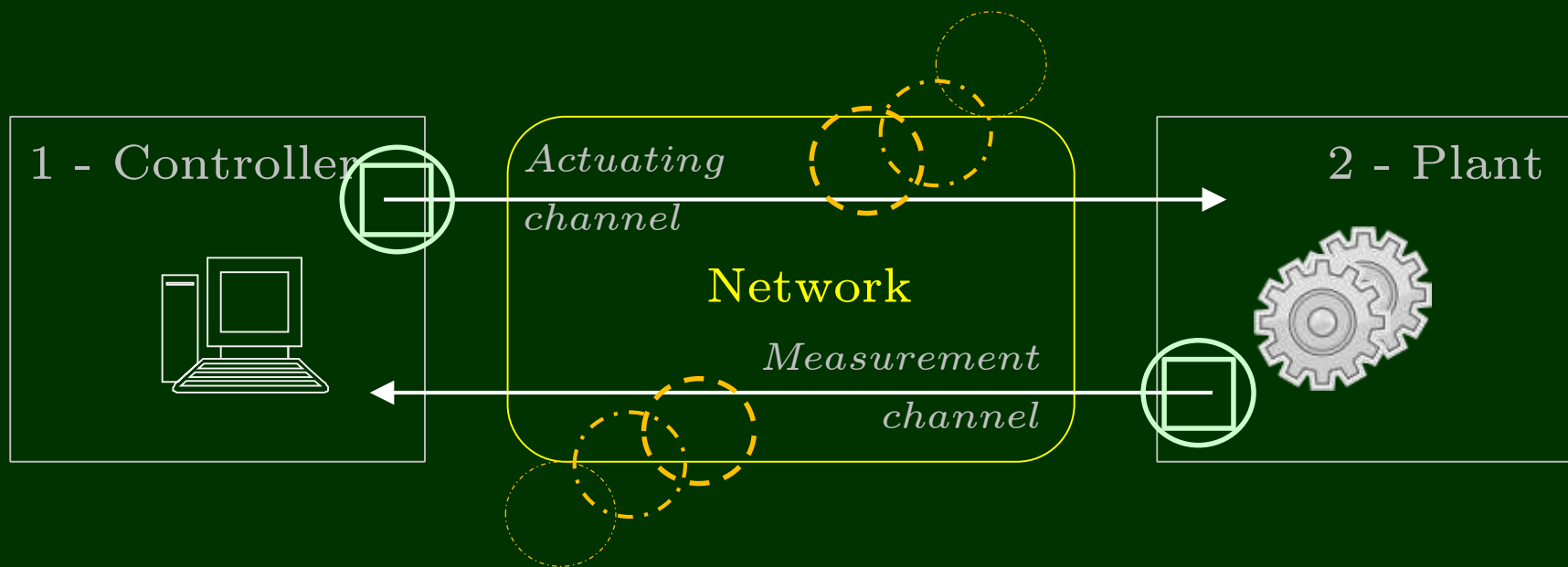
Effects of the network on the closed-loop control

<i>Issue</i>	<i>Translation in control terms</i>	<i>Concerned</i>	<i>Not concerned</i>
limited bandwidth	quantification, limited quantity of info per second (Shannon, <i>maximum bit rate</i>)	limited energy resource systems (UAVs, WSN, μ -sensors or μ -actuators, aerosp...)	packet-transmiss. type Inter/Ethernet, Bluetooth... 1 bit or 300 \rightarrow <i>idem</i> ATM=384, Ethernet>368, Bluetooth>499
sampling, coding, scheduling, transmission, asynchronism	variable delays, estimated if there is a model, or time-stamps	packet transmission systems	dedicated and unshared netw. (ControlNet, DeviceNet)
packet losses	asynchronous sampling, variable delay	wireless, UDP-like protocols	TCP-like protocols (but generally useless: time wasting for outdated info)
out-of-sync clocks	delays (at least)	internet	control-dedicated netw. (CAN bus...)

today

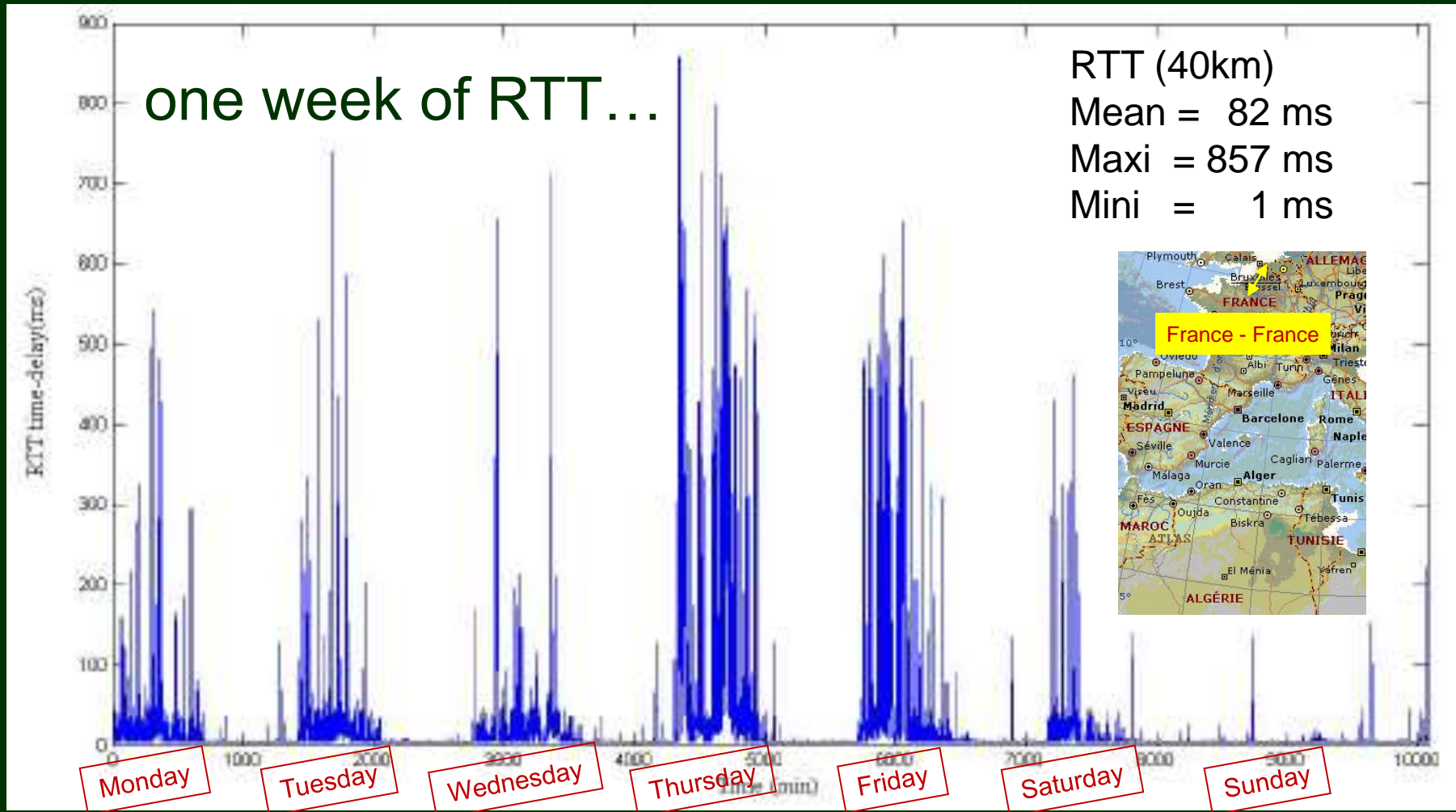
In such a framework, let's show we have the equation:

transmission + sampling + packet loss = 1 delay



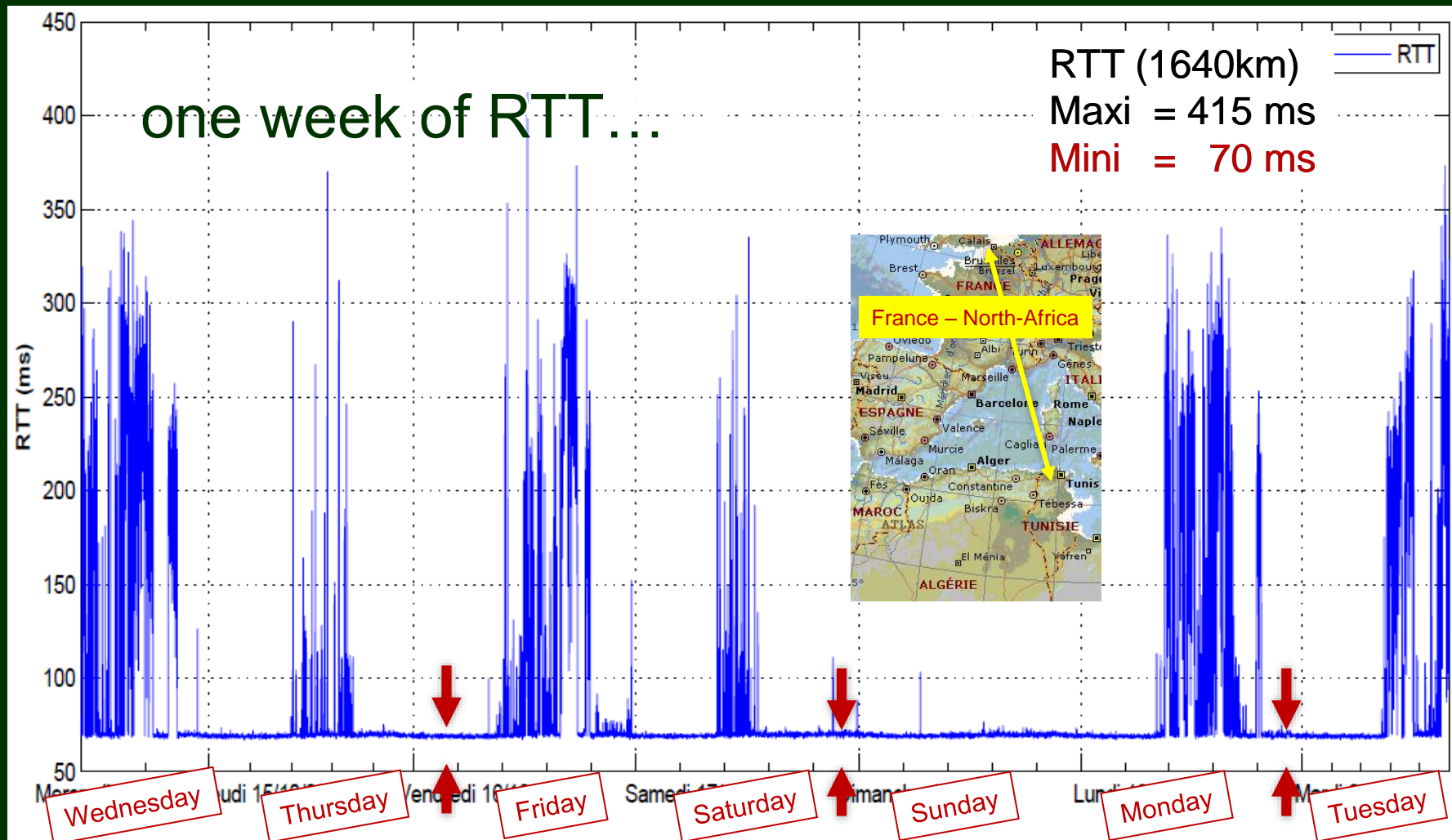
To give an idea on the delay variation...

Transmission delays



To give an idea on the delay variation...

Transmission delays



Tunis-Lille (1640 km) – Source: S. Belhaj, ENSIT 2009

To give an idea on the delay variation...

Transmission delays

Other RTT approximated values

<i>unshared CAN 2m:</i>	<i>200 μsec</i>
<i>bluetooth 2m:</i>	<i>40 msec</i>
<i>Internet:</i>	<i>100-400 msec</i>
<i>orbital stations:</i>	<i>0.4-7 sec</i>
<i>underwater 1.7km:</i>	<i>>2 sec</i>

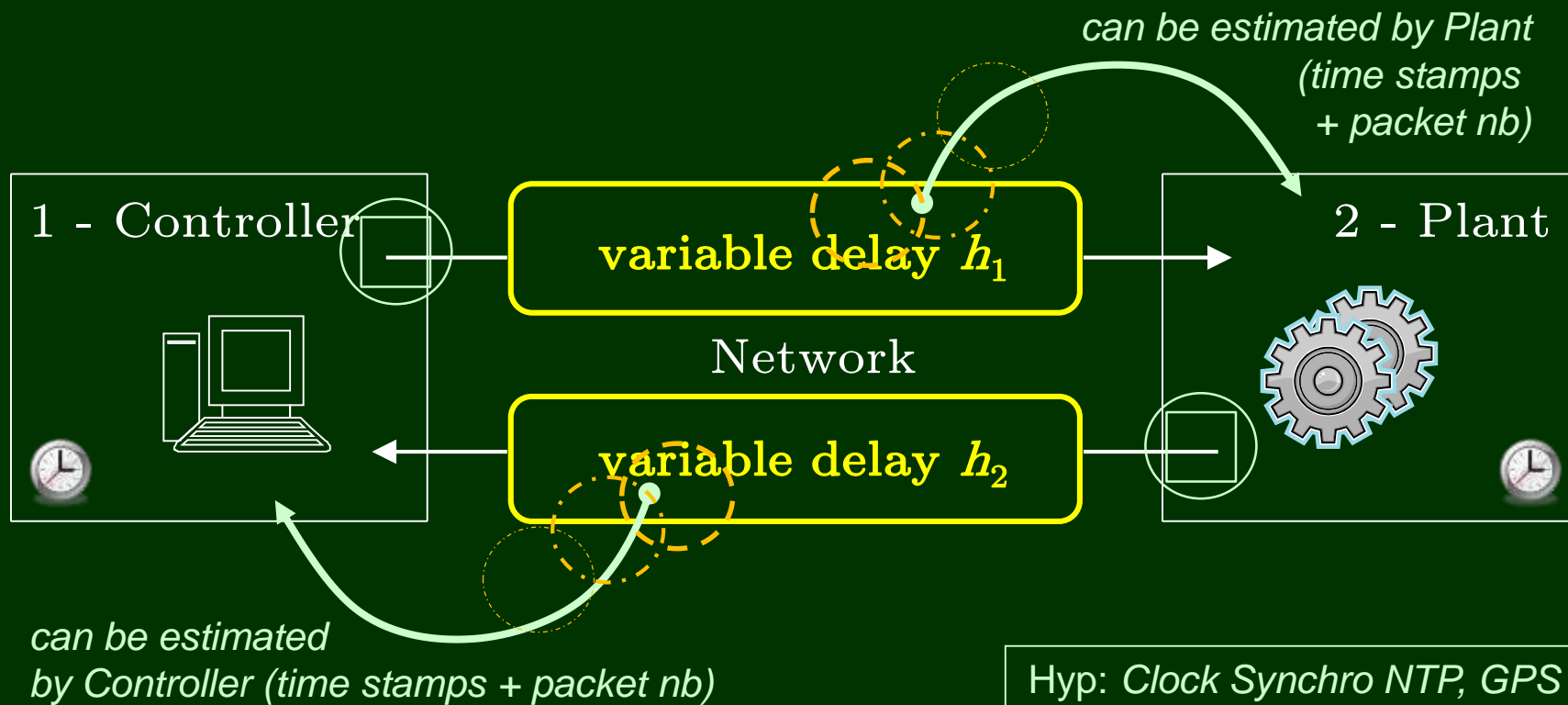


... let's sum up until now:

transmission time + access time + packet loss + sampling...

= 2 variable delays

known / unknown ?



to buff, or not buff?

1st solution = act « as if » constant

- ✓ [Niemeyer & Slotine 98][Huang & Lewis 03] → *approximation*
- [Azorin et al. 03][Fattouh & Sename 03] etc.

2nd solution = force the delay to be constant

- therefore, maximize it : $0 \leq h_i(t) \leq h_{max} \Leftrightarrow h_i(t) = h_{max}$
- thanks to a *buffer* → *time-driven*
- then, apply classical techniques:
 - ✓ predictor (Smith) [Lelevé & Fraise 01]
 - ✓ error eqn. obeying a retarded model [Estrada-Marquez-Moog 07]...

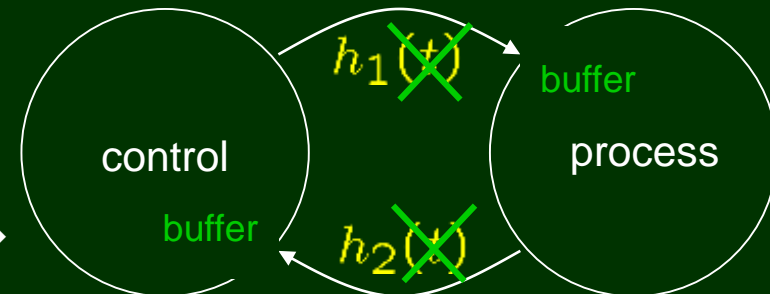
3rd solution
(intermediate)
just one
buffer

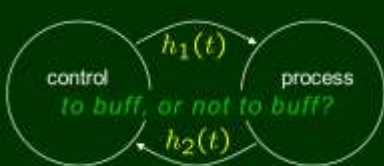
[Seuret PhD 06]
[Jiang et.al 08]

4th solution = keep the variable delay...

- model & predict the delay [Witrant et al. 07] → *event-driven*
- complexify the Lyapunov technique [Seuret-Richard 08][Kruszewski et al. 11,12] [Demirel et al. 13][Zhang PhD12][Zhang et al. 14]

Network delay: variable, asymmetric →





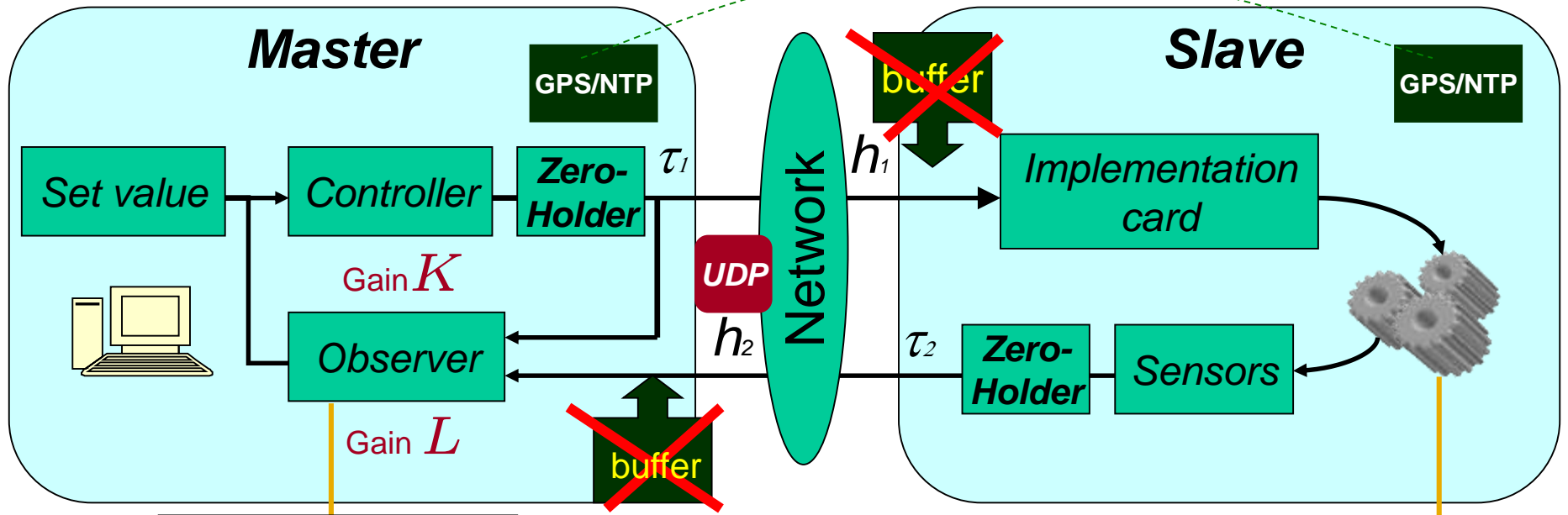
4 Buffer-free control (event-driven)

A. Seuret, J.P. Richard - IFAC Seoul 2008

(theory only)

A. Kruszewski, W.J. Jiang, E. Fridman, J.P. Richard, A. Toguyeni - IEEE T. CST 2011

(with experiments)



- defines the target
- receives Slave's output
- observes Slave's state
- computes & sends control

- receives & applies control
- sends measured output

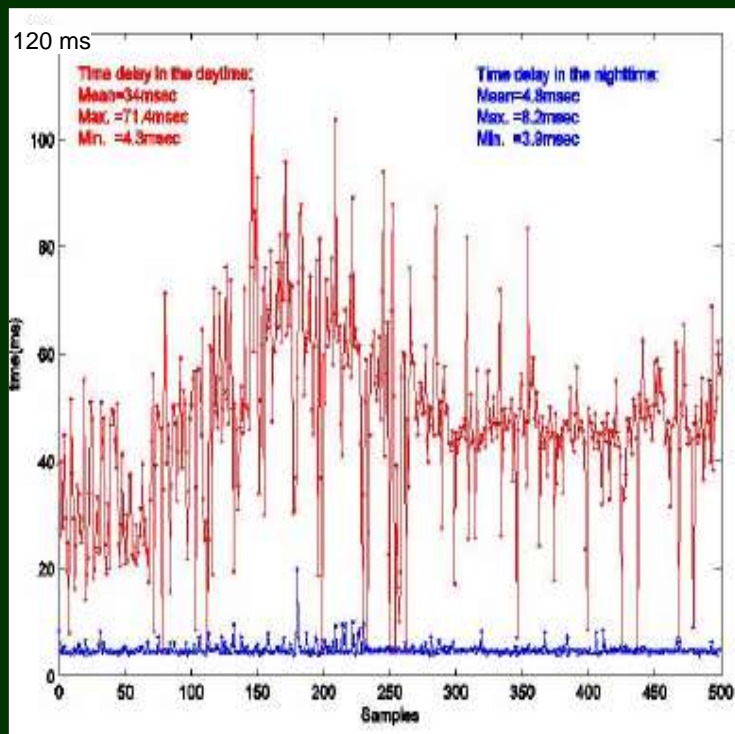
$$\hat{\delta} \neq \delta$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t - \hat{\delta}_1(t)) - L(y(t - \delta_2(t)) - \hat{y}(t + \delta_2(t))), \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t), \end{cases}$$

known thx to time-stamps

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - \delta_1(t)), \\ y(t) = Cx(t). \end{cases}$$

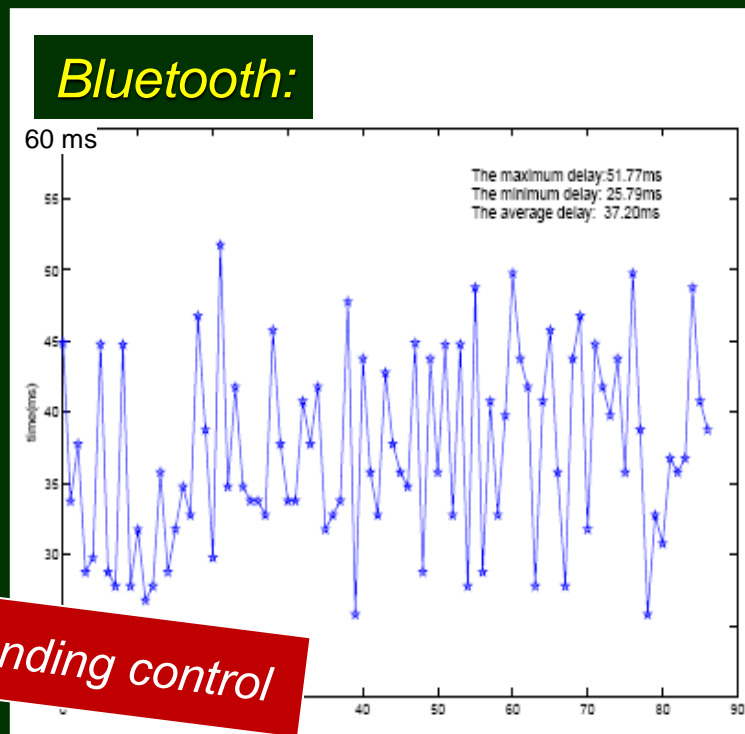
Experimental set-up



Internet:

**Night-time
VS
Day-time**

NB: QoS-depending control



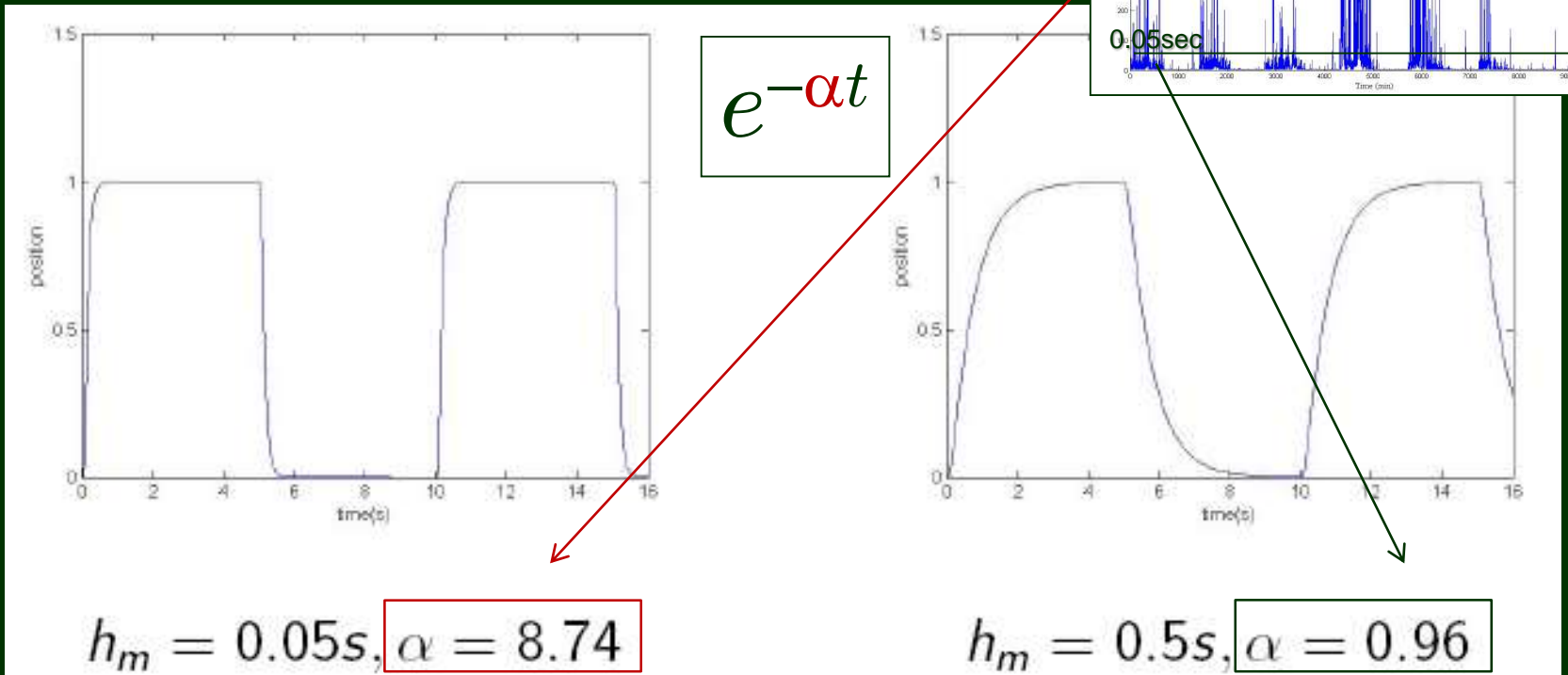
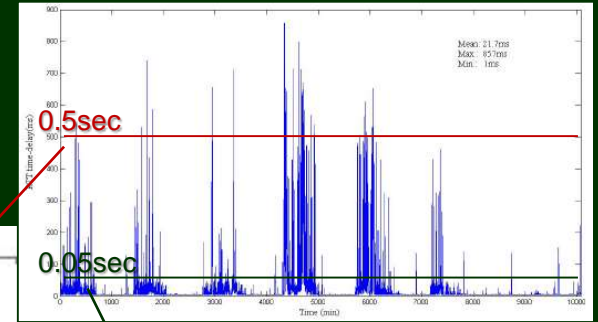
Bluetooth:

A switched system approach to exponential stabilization through communication network.

A. KRUSZEWSKI, W.J. JIANG, E. FRIDMAN, J.P. RICHARD, A.TOGUYENI. IEEE TCST, 20 (4) 2012

One week of RTT...

The achievable exponential rate depends on h_m , which motivates some adaptation w.r.t. QoS...



Link max delay \leftrightarrow provable performance

Model of the switching system

Two switching modes are considered : the big time-delay and the small time-delay.

$$1) \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + \chi_{[h_1, h_2]}(\delta_{con}(t))BK_1x(t - \delta_{con}(t)) + (1 - \chi_{[h_1, h_2]}(\delta_{con}(t)))BK_2x(t - \delta_{con}(t)), \quad (8)$$

$$2) \quad \dot{e}(t) = Ae(t) - \chi_{[h_1, h_2]}(\delta_{obs}(t))L_1Ce(t - \delta_{obs}(t)) - (1 - \chi_{[h_1, h_2]}(\delta_{obs}(t)))L_2Ce(t - \delta_{obs}(t)). \quad (9)$$

$\chi : \mathbb{R} \rightarrow \{0, 1\}$ is defined by :

$$\chi_{[h_1, h_2]}(s) = \begin{cases} 1, & \text{if } s \in [h_1, h_2] \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases} \quad (10)$$

Note : we assume $\chi(\delta_{con}(t)) = \chi(\delta_{obs}(t))$

General switched system

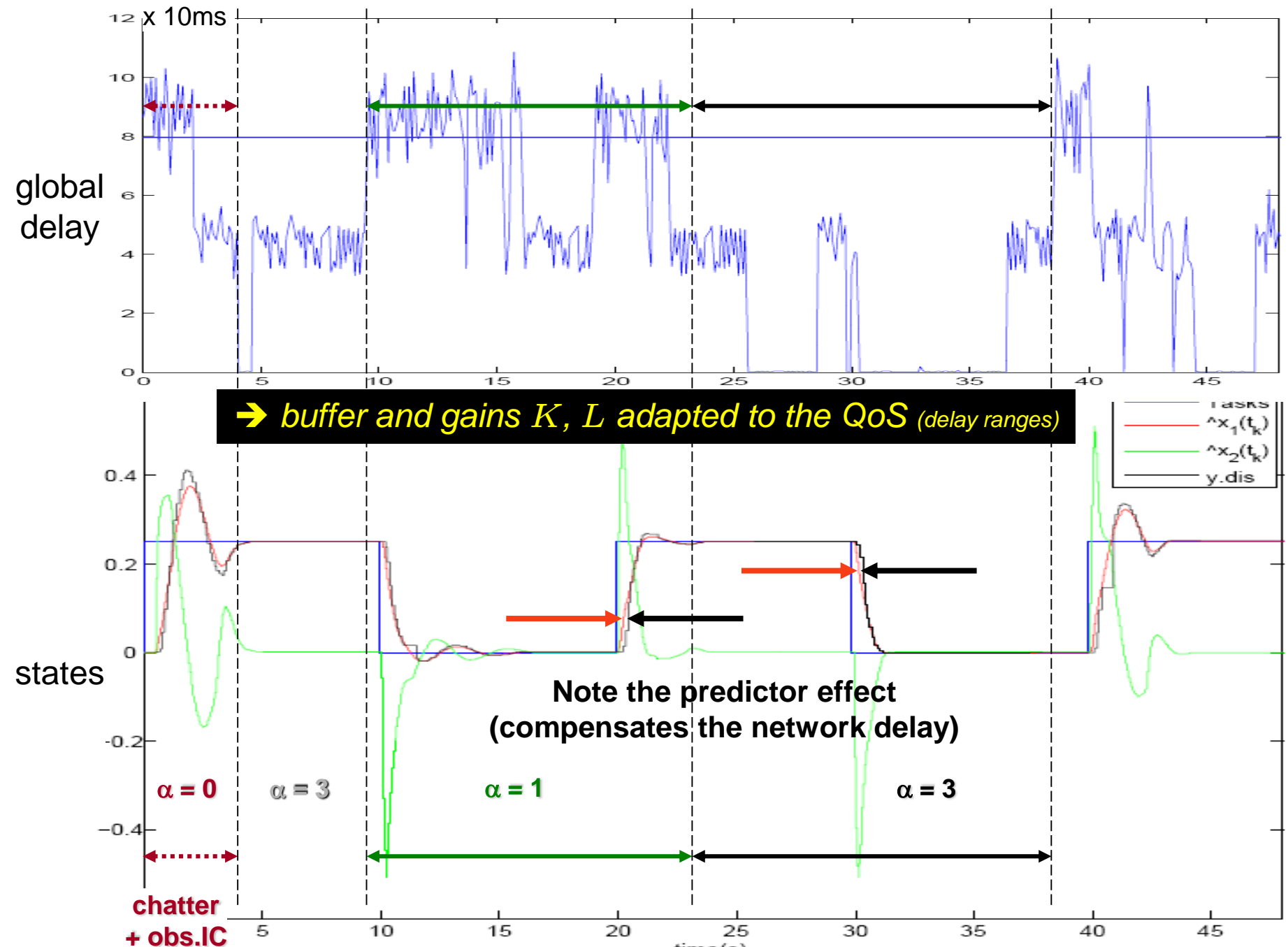
$$\dot{x}(t) = Ax(t) + \chi_{[h_1, h_2]}(\tau)A_1x(t - \tau(t)) + (1 - \chi_{[h_1, h_2]}(\tau))A_2x(t - \tau(t)), \quad (11)$$

The LKF :

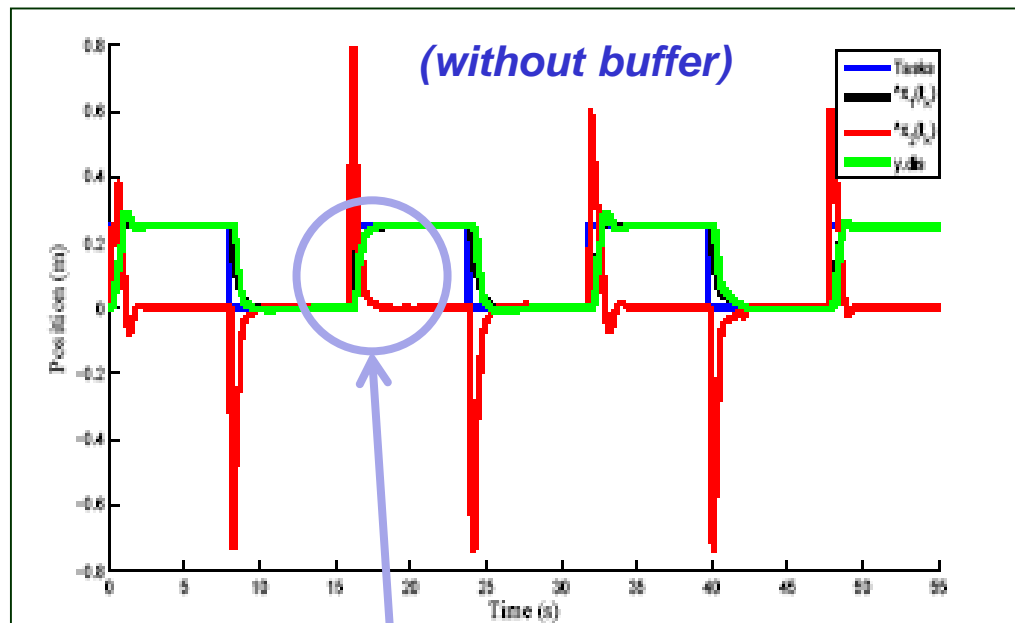
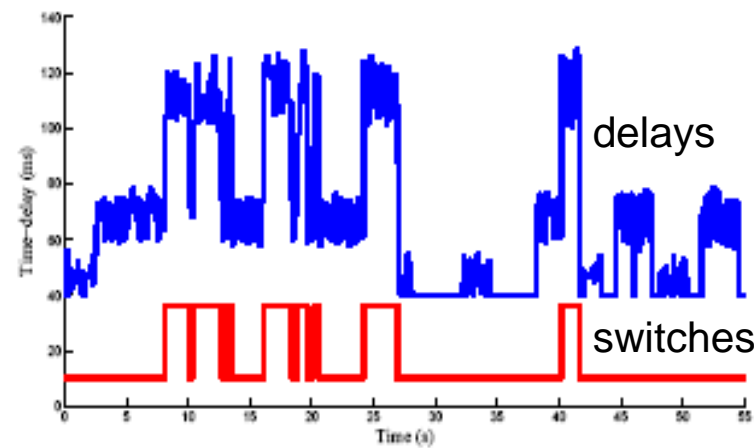
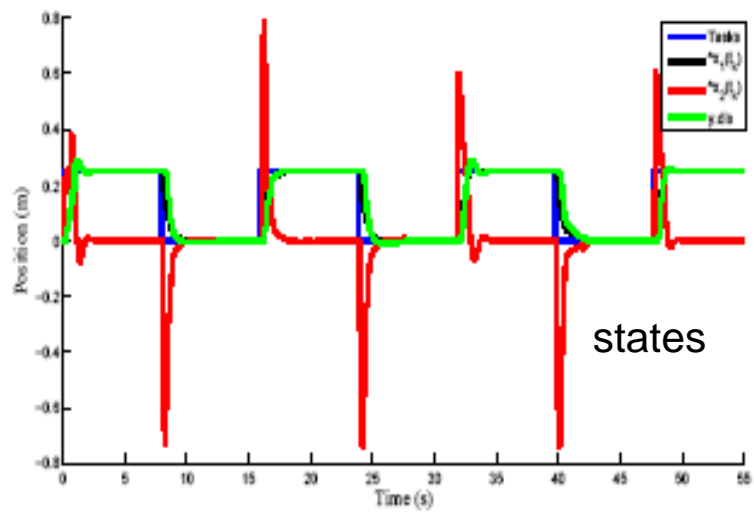
$$V(t, x_t, \dot{x}_t) = x^T(t)Px(t) + \sum_{i=0}^2 \int_{t-h_{i+1}}^t x^T(s)S_i x(s)ds + \sum_{i=0}^2 (h_{i+1} - h_i) \int_{-h_{i+1}}^{-h_i} \int_{t+\theta}^t x^T(s)R_i \dot{x}(s)dsd\theta, \quad (12)$$

where $h_0 = 0$, $P > 0$ and $R_i, S_i \geq 0$.

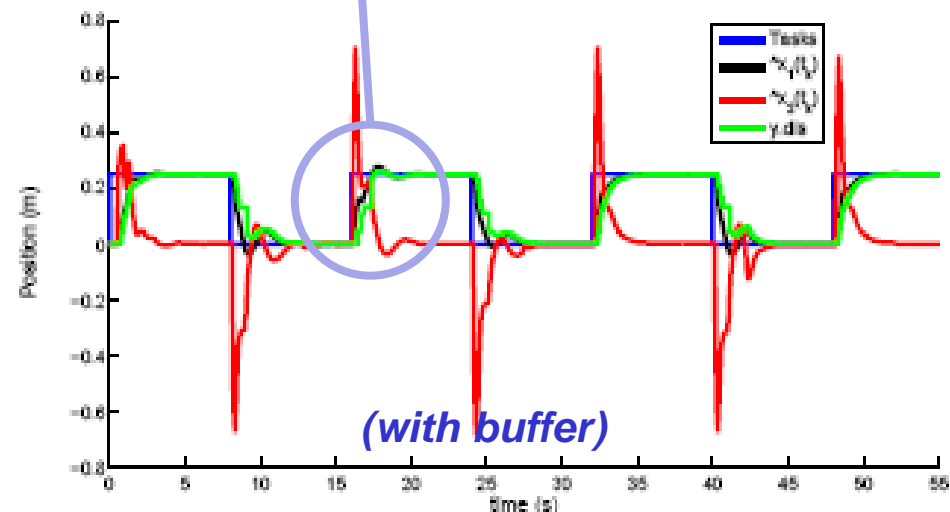
Experimental results with one buffer (time-driven)

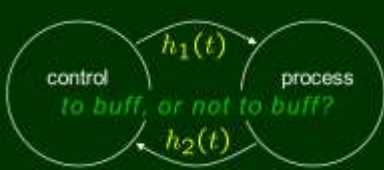


Experimental results without buffer (event-driven)



Event-driven vs. time-driven mode.



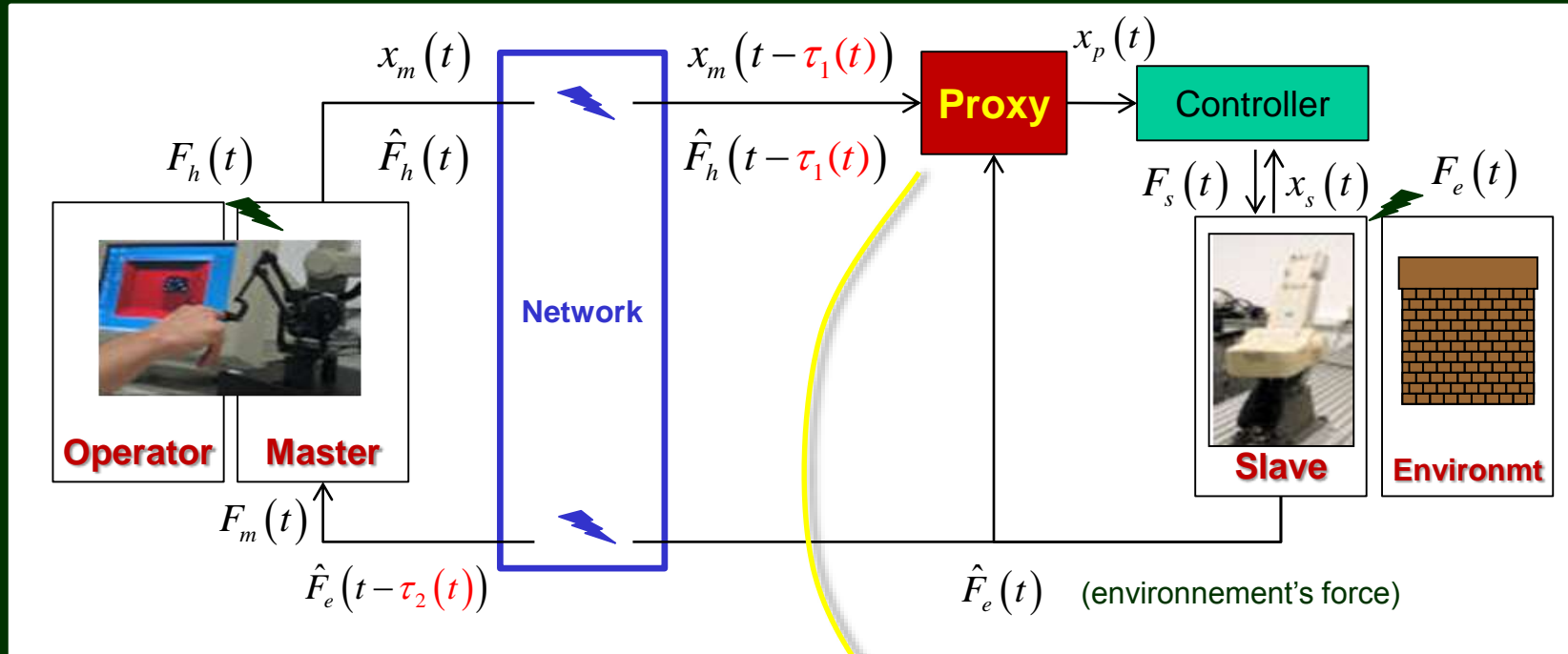


5 Natural continuation: teleoperation (event driven)

force & position tracking (haptic rendering)

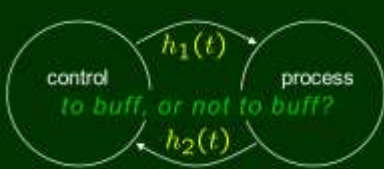
PhD Bo Zhang (2012)

+ Zhang, Kruszewski, Richard, Int.J.Control 2014



- Proxy synchronized on Master
- Slave synchronized on Proxy
- Combines LKF with H_∞
- Reduction of the delay effect

Proxy « emulates » Master without delay



5) Natural continuation: teleoperation (event driven)

« combines LKF with H_∞ » means...



$$w(t) = \begin{pmatrix} F_e(t) \\ F_h(t) \end{pmatrix}$$

$$x(t) = \begin{pmatrix} \dot{\theta}_s(t) \\ \dot{\theta}_m(t) \\ \theta_s(t) - \theta_m(t) \end{pmatrix} = z(t)$$

$$J(w) = \int_0^\infty (z(t)^T z(t) - \gamma^2 w(t)^T w(t)) dt < 0$$

To ensure $J(w) < 0$, we consider the condition,

$$\dot{V}(t, x(t), \dot{x}(t)) + z(t)^T z(t) - \gamma^2 w(t)^T w(t) < 0$$

We choose a Lyapunov-Krasovskii Functional candidate,

$$\begin{aligned} V(t, x(t), \dot{x}(t)) = & x(t)^T P x(t) \\ & + \int_{t-h_2}^t x(s)^T S_a x(s) ds + \int_{t-h_1}^t x(s)^T S x(s) ds \\ & + h_1 \int_{-h_1}^0 \int_{t+\theta}^t \dot{x}(s)^T R \dot{x}(s) ds d\theta \\ & + \sum_{i=1}^n (h_2 - h_1) \int_{-h_2}^{-h_1} \int_{t+\theta}^t \dot{x}(s)^T R_{ai} \dot{x}(s) ds d\theta \end{aligned}$$



Généralités

Classification

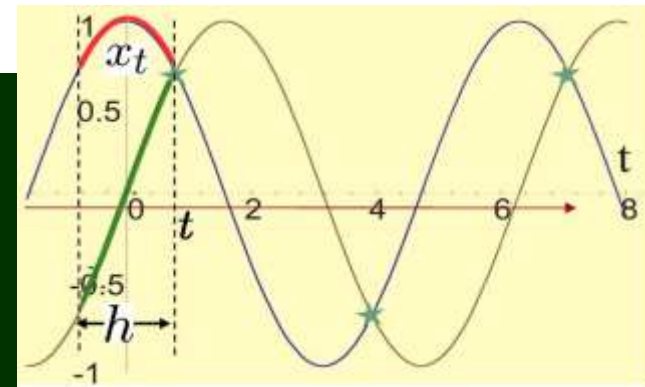
- systèmes de type retardé

$$\dot{x}(t) = f(x_t, t, u_t)$$

$$\begin{aligned}x_t(\theta) &= x(t + \theta), & -h \leq \theta \leq 0, \\u_t(\theta) &= u(t + \theta), & -h \leq \theta \leq 0, \\x(\theta) &= \varphi(\theta), & t_0 - h \leq \theta \leq t_0,\end{aligned}$$

- systèmes de type neutre

$$\dot{x}(t) = f(x_t, \dot{x}_t, t, u_t)$$

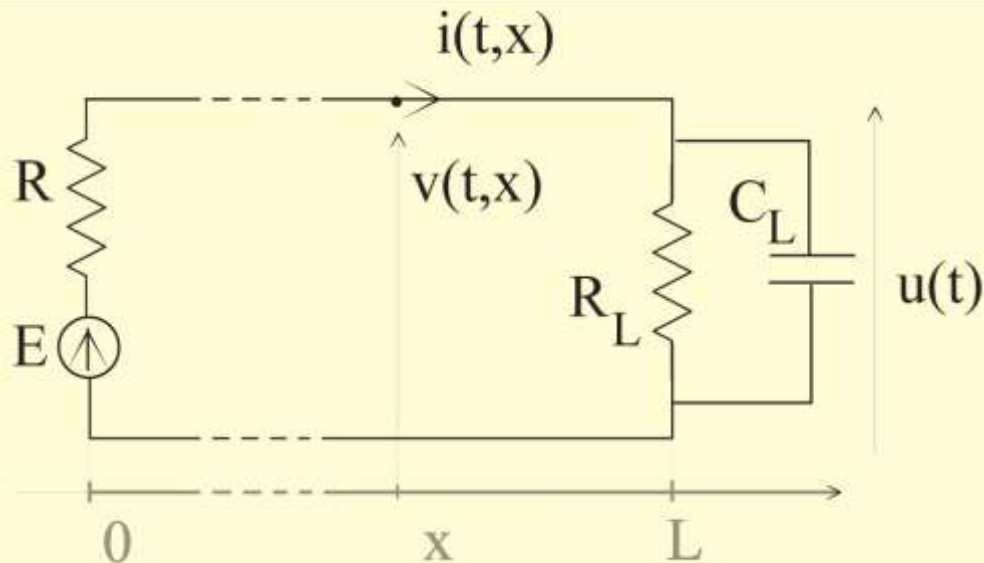


Classification

exemple 5

- système de type neutre :
ligne de transmission sans perte

$$\dot{x}(t) = f(x_t, \dot{x}_t, t, u_t)$$



$$\begin{cases} L \frac{\partial i}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial x} , \\ C \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial i}{\partial x} , \end{cases}$$

+ conditions aux limites ($x=0, L$) :

$$\begin{cases} v(t, 0) = E - Ri(t, 0) , \\ i(t, L) = \frac{1}{R_L}u(t) + C_L \frac{du}{dt}(t) . \end{cases}$$

transformation de d'Alembert $(v, i) \rightarrow (\phi, \psi)$:

$$v(t, x) = \phi(x - ct) + \psi(x + ct)$$

$$Zi(t, x) = \phi(x - ct) - \psi(x + ct)$$

$$c = (LC)^{-1/2}, \quad Z = (L/C)^{1/2}$$

$$\tau = 2L/c, \quad \kappa = (Z - R)/(Z + R)$$

$$\dot{u}(t) - \kappa \dot{u}(t - \tau) + \alpha u(t) + \beta u(t - \tau) = \alpha E$$

exemple 6

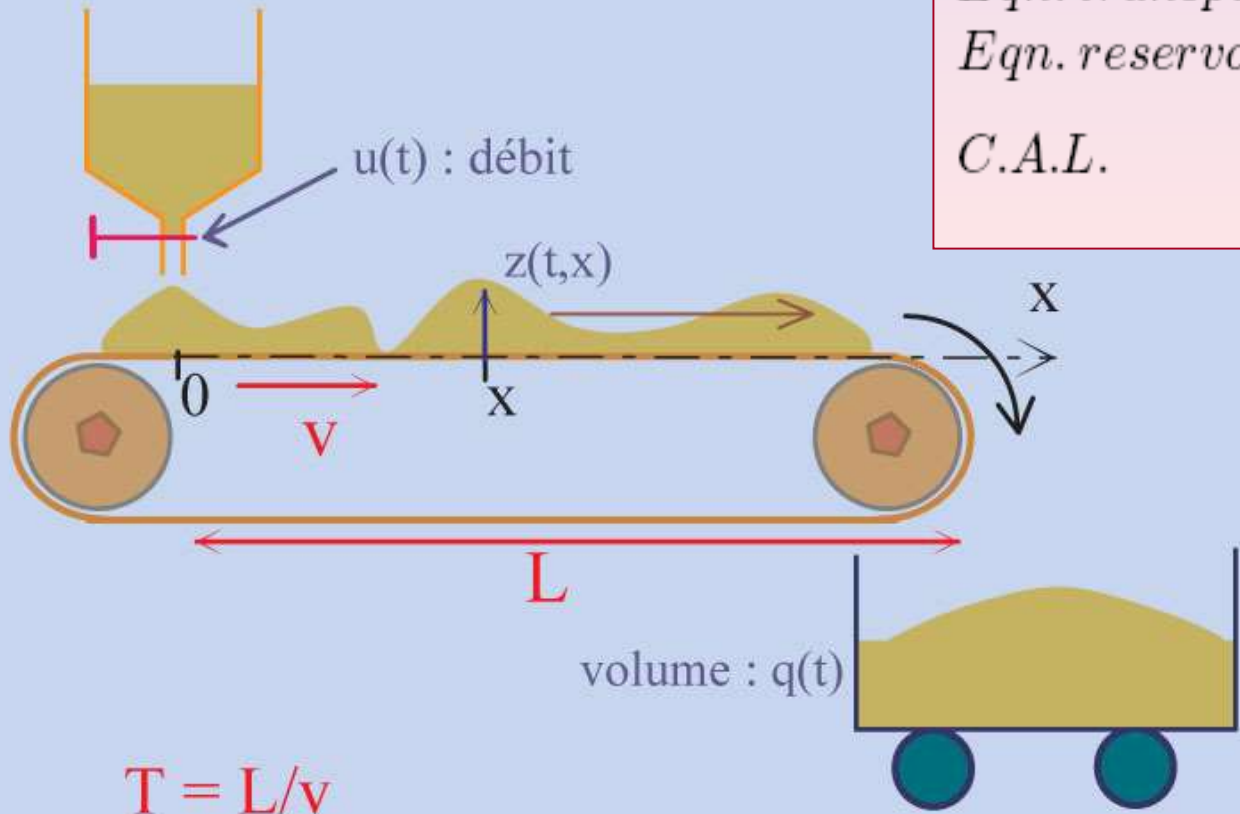
- système de type retardé :
équation de transport

$$\dot{x}(t) = f(x_t, t, u_t)$$

Eqn. transport : $\frac{\partial z}{\partial t} + v \frac{\partial z}{\partial x} = 0$

Eqn. reservoir : $\dot{q}(t) = y(t)$

C.A.L. $\begin{cases} y(t) = H \frac{\partial z}{\partial t}(t, L) \\ H \frac{\partial z}{\partial t}(t, 0) = u(t) \end{cases}$



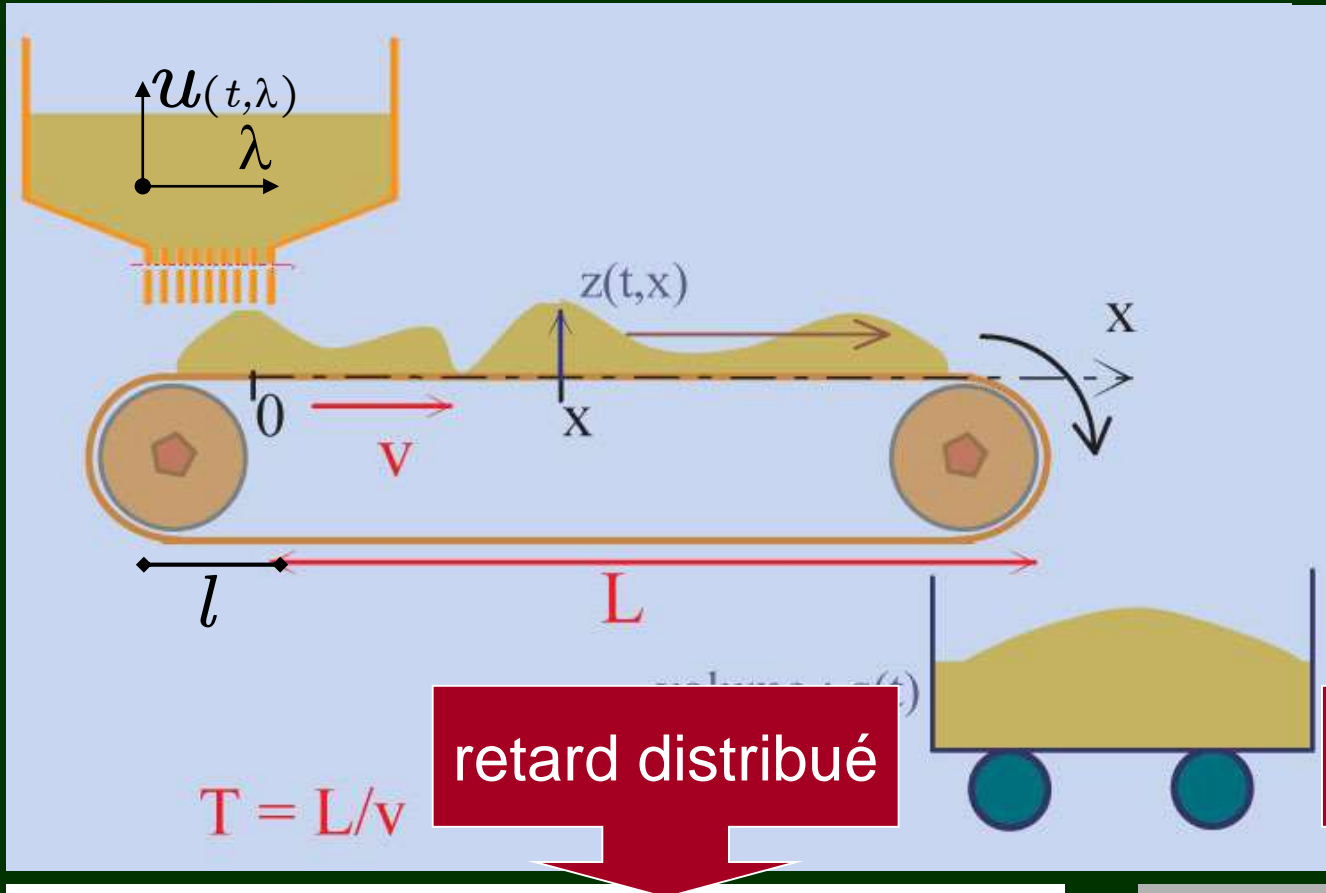
$$\dot{q}(t) = u\left(t - \frac{L}{v}\right)$$

Classification

exemple 6 bis

- système de type retardé :
équation de transport

$$\dot{x}(t) = f(x_t, t, u_t)$$

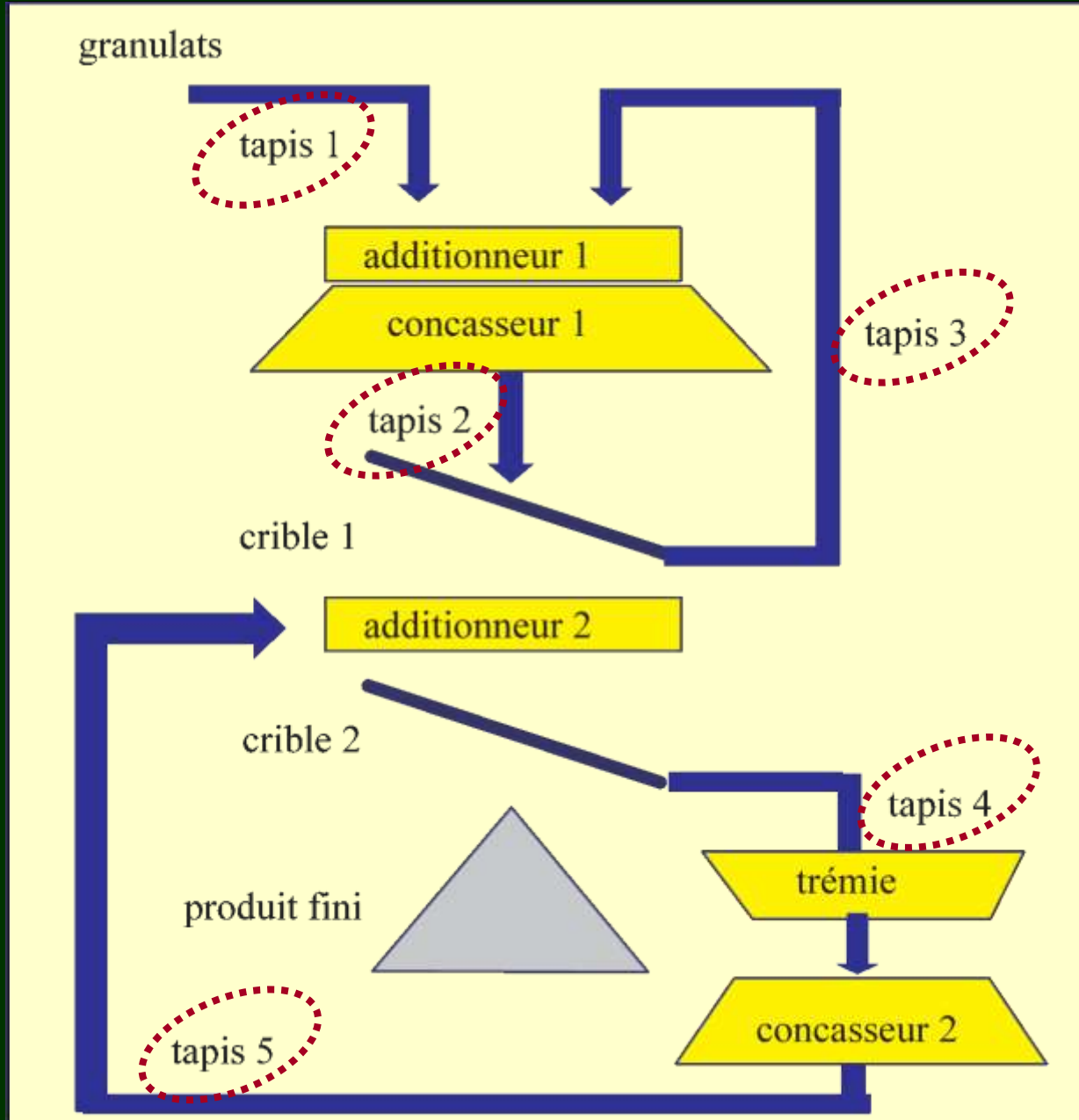


$$\dot{q}(t) = \int_{-l}^0 u\left(t - \frac{L}{v} + \frac{\lambda}{v}, \lambda\right) d\lambda$$

$$\dot{q}(t) = u\left(t - \frac{L}{v}\right)$$

Classification

NB : la réalité est un peu plus compliquée...



Exemple 7 : macro-modèle de réseau

- modèle « par session » (ATM, TCP)

[Mascolo 99] → contrôle de congestion par prédicteur de Smith

$$\dot{x}_j(t) = \sum_{i=1}^{n_j} u_{ij}(t - \tau_{ij}) - d_j$$

x_j niveau du tampon mémoire associé à la session l_j

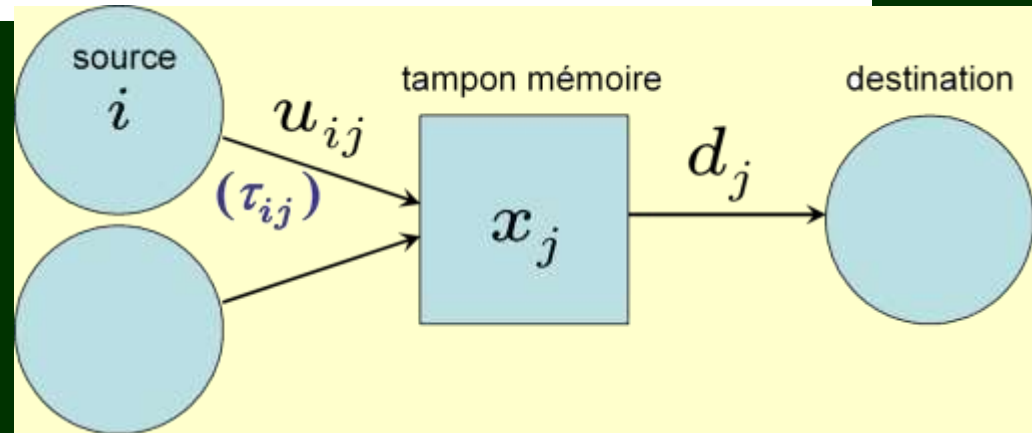
u_{ij} débit de la source i (commande)

n_j nombre de sessions partageant le tampon j

τ_{ij} retard de propagation de source i vers tampon j

d_j débit de service du tampon j (perturbation)

→ système de type retardé



Problème de Cauchy

(existence de solution pour un SàR)

- Notion de solution
- Condition de type Lipschitz
- Cas où le retard peut s'annuler

direct
stabilité

direct
formal.

direct
contrôle

direct
biblio

2.3 Notion of solution

System (S) : $\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau(t)))$

with $x(t) \in \mathbb{R}^n$, and $0 \leq \tau(t) \leq \tau$

Let $\varphi : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ be an arbitrary map.

Definition: A map $x(t) : [t_0 - \tau, t_0 + b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ s.t.

1) $x(t_0 + s) = \varphi(s)$, for all s in $[-\tau, 0]$;

2) x is continuous over $[t_0, t_0 + b)$;

3) x satisfies (S) over $[t_0, t_0 + b)$ (\dot{x} right-hand, Dini)

is called a **solution** of (S) with initial value φ at t_0 .

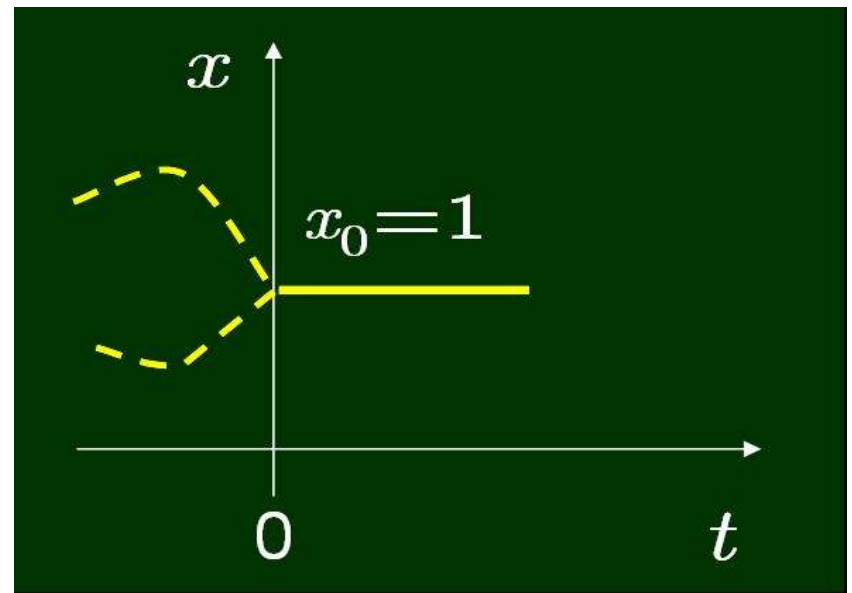
If only one map satisfies these 3 points, then the solution is **unique**.

Remark: There is a weaker notion of solution, where

2) $\rightarrow x$ absolutely continuous function over $[t_0, t_0 + b)$

3) $\rightarrow x$ satisfies (S) almost everywhere on $[t_0, t_0 + b)$

Remark



Even if unicity holds, *different solutions may coincide after a finite time*. For instance:

$$\dot{x}(t) = -x(t - \tau)[1 - x(t)],$$

$$x(t, \varphi) = 1 \quad (\forall t \geq 0)$$

for any $\varphi \in C([-\tau, 0], \mathbb{R})$ such that $\varphi(0) = 1$.

(donc, généralement, non-unicité de la réversion de trajectoire)

2.4 Existence and uniqueness of solutions

For system (S) with $0 < \delta \leq \tau(t) \leq \tau_m$:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau(t))).$$

Consequence of the step method:

Given a continuous map $\varphi \in \mathcal{C}$, if the ODE

$$\dot{x}(t) = f_\varphi(t, x(t)) \equiv f(t, x(t), \varphi(t - \tau(t)))$$

has a (unique) solution, then there exists a (unique) solution of (S) with initial condition φ

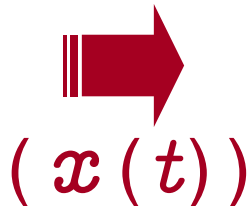
From there, using classical Cauchy-Lipschitz conditions:

→ Conditions of existence and uniqueness (I):

If f is a continuous map and satisfies a local Lipschitz condition in x ,

$$\|f(t, x_2, y) - f(t, x_1, y)\| \leq K \|x_2 - x_1\|,$$

then for any initial condition $\varphi \in \mathcal{C}$, (S) has a unique solution, depending continuously on f and φ .



Cauchy pb.

If the delay can become zero $0 \leq \tau(t) \leq \tau_m$, the step method does not apply anymore

⇒ need of a general framework: **FDEs** [Myshkis 49]

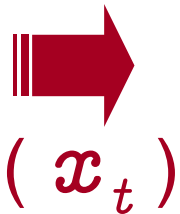
$$(RFDE) : \quad \dot{x}(t) = F_R(t, x_t) \quad (\text{retarded type})$$

Conditions of existence and uniqueness (II):

If F_R is a continuous map with local-Lipschitz cond. in its second (functional) argument, i.e.

$$\|F_R(t, \varphi_2) - F_R(t, \varphi_1)\| \leq K \|\varphi_2 - \varphi_1\|_C, \dots$$

then for any initial condition $\varphi \in \mathcal{C}([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$, (RFDE) has a unique solution, depending continuously on F_R and φ .





Rudolf Otto Sigismund Lipschitz
(1832-1903) Allemand, professeur à l'Université de Bonn

Stabilité

- Equilibre
- Définition(s)
- Théorèmes

direct
formal.

direct
contrôle

direct
biblio

Stabilité : équilibre

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t), \quad (5.1)$$

$$x_{t_0} = \psi, \quad \psi \in \mathcal{C}[-h, 0].$$

Nous supposons que $f(t, \varphi)$ est continue, bornée pour φ bornée, localement lipschitzienne en φ . La solution de (5.1) est notée $x(t, t_0, \psi)$.

Définition 1. La fonction $\varphi_e \in \mathcal{C}[-h, 0]$ est un état d'équilibre de (5.1) si pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, la solution $x(t, t_0, \varphi_e)$ existe et vérifie $x(t, t_0, \varphi_e) = \varphi_e$.

Théorème 1. [19] La fonction $\varphi_e \in \mathcal{C}[-h, 0]$ est un état d'équilibre de (5.1) si, et seulement si, les trois conditions suivantes sont vérifiées :

- (i) $\forall t_0 \in \mathbb{R}$, $x(t, t_0, \varphi_e)$ existe et est unique;
- (ii) $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t, \varphi_e) = 0$;
- (iii) φ_e est une fonction constante de $\mathcal{C}[-h, 0]$: $\forall \theta \in [-h, 0], \varphi_e(\theta) = x_e$.

On parlera donc indifféremment d'état d'équilibre (φ_e) ou de *point d'équilibre* (x_e).

Stabilité : définitions

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t)$$

Définition 2. *L'équilibre $x = 0$ du système (5.1) est dit :*

1. *stable si $\forall \varepsilon > 0, \forall t_0, \exists \delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0, \psi \in \mathcal{B}_\delta \Rightarrow x(t, t_0, \psi) \in \mathcal{B}_\varepsilon$;*
2. *uniformément stable par rapport à t_0 si la propriété précédente est vérifiée avec $\delta = \delta(\varepsilon)$ (donc δ indépendant de t_0) ;*
3. *asymptotiquement stable s'il est stable et s'il existe $\eta = \eta(t_0) > 0$ tel que $[\psi \in \mathcal{B}_\eta] \Rightarrow [\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, t_0, \psi) = 0]$;*
4. *uniformément asymptotiquement stable s'il est uniformément stable et si la limite de la propriété précédente est uniforme, c'est-à-dire si $\exists \eta > 0 : \forall \gamma > 0, \exists T(\gamma) > 0 : [\psi \in \mathcal{B}_\eta \text{ et } t \geq T(\gamma)] \Rightarrow [x(t, t_0, \psi) \in \mathcal{B}_\gamma] \forall t_0$;*
5. *globalement (uniformément) asymptotiquement stable s'il est (uniformément) asymptotiquement stable avec $\eta = +\infty$;*
6. *globalement exponentiellement stable s'il existe deux nombres strictement positifs α (appelé taux de convergence exponentielle) et k tels que :*

$$|x(t, t_0, \psi)| \leq k \|\psi\|_C e^{-\alpha(t-t_0)}. \quad (5.2)$$

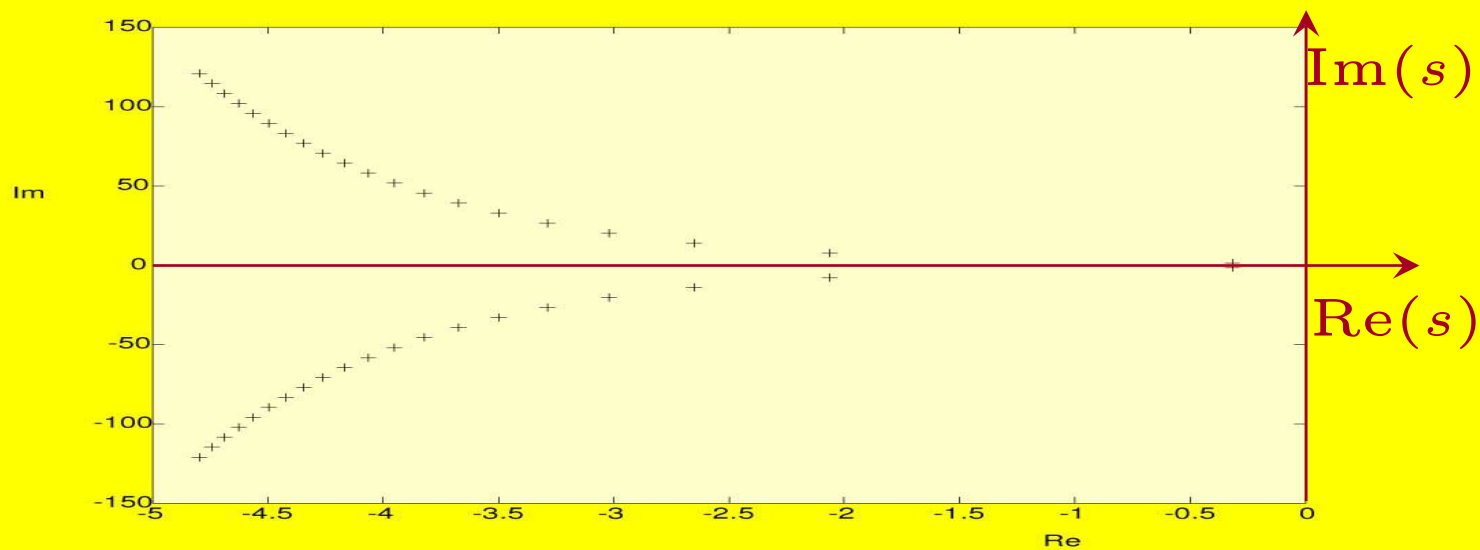
Stabilité : cas linéaire stationnaire

Théorème 2. *Un système linéaire stationnaire de type retardé est globalement asymptotiquement stable si, et seulement si, toutes ses racines caractéristiques sont dans le demi-plan complexe gauche (l'axe imaginaire étant exclu).*

Stabilité : cas linéaire stationnaire

Théorème 2. *Un système linéaire stationnaire de type retardé est globalement asymptotiquement stable si, et seulement si, toutes ses racines caractéristiques sont dans le demi-plan complexe gauche (l'axe imaginaire étant exclu).*

Exemple 1: *Considérons l'équation $\dot{x}(t) = -x(t-1)$. Son équation caractéristique est $s + e^{-s} = 0$, dont les solutions $s = \alpha \pm j\beta$ sont en nombre infini. Le système n'est donc pas dégénéré. Ici, $s = -0.318 \pm 1.337j$ est une estimation de la paire de racines de plus grande partie réelle : il y a donc stabilité asymptotique².*



Stabilité : cas linéaire stationnaire

Théorème 2. *Un système linéaire stationnaire de type retardé est globalement asymptotiquement stable si, et seulement si, toutes ses racines caractéristiques sont dans le demi-plan complexe gauche (l'axe imaginaire étant exclu).*

Exemple 1: *Considérons l'équation $\dot{x}(t) = -x(t-1)$. Son équation caractéristique est $s + e^{-s} = 0$, dont les solutions $s = \alpha \pm j\beta$ sont en nombre infini. Le système n'est donc pas dégénéré. Ici, $s = -0.318 \pm 1.337j$ est une estimation de la paire de racines de plus grande partie réelle : il y a donc stabilité asymptotique². Par contre, le cas suivant est dégénéré et instable :*

Exemple 2:

$$\dot{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ +\frac{1}{2} & 0 & 1 \\ 0 & +\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} x(t-h),$$

$$\Delta(s) = s(s^2 - 1).$$

Instable (et « dégénéré »)

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h),$$

$$\det(sI - A_0 - e^{-hs} A_1) = \dots s(s^2 - 1).$$

Méthode de Walton et Marshall (1987)

Extrait de Borne, Dauphin, Richard, Rotella, Zambettakis

Analyse et régulation des processus industriels - Régulation continue. 495 pages, Edt. Technip 1993

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau)$$

$$p(s, \tau) = \det[sI - A - Be^{-\tau s}] = 0.$$

$$p(s, \tau) = D(s) + N(s)e^{-\tau s} = 0, \quad (10.35)$$

où N et D sont deux polynômes réels.

Pour analyser la stabilité, l'idée est de chercher s'il existe des valeurs du retard τ_j pour lesquelles cette équation caractéristique admet des racines imaginaires pures, et c'est en ces points τ_j qu'un changement dans le comportement asymptotique du système (10.33) peut se produire. On est donc amené à calculer un lieu des racines paramétré en τ . La procédure est la suivante :

1. Déterminer la situation des racines du système non retardé ($p(s, 0) = 0$).
2. Calculer le polynôme $q(\omega^2) = D(j\omega)D(-j\omega) - N(j\omega)N(-j\omega)$, obtenu à partir de l'équation $p(s, \tau) = 0 = p(\bar{s}, \tau)$ pour les racines imaginaires pures $s = j\omega$.
3. Rechercher les éventuelles racines ω_j réelles positives de $q(\omega^2) = 0$, qui correspondent aussi à des racines de $p(s, \tau) = 0$.
4. Etudier le comportement du lieu des racines en ces points ω_j : si $q(\omega_j^2)$ traverse l'abscisse (axe des ω^2) de haut en bas, $p(s, \tau_j)$ traverse l'axe imaginaire de la droite vers la gauche, et on a donc stabilité à partir de $\tau > \tau_j$ (jusqu'à $\tau = \tau_{j+1}$ au moins).

Cette méthode donne en général de bons résultats, mais est difficilement applicable si le modèle est paramétré par d'autres coefficients que τ .

• Exemple 1

On considère le système de la figure 10.31, avec $D(s) = (s + 2)^2$, $N(s) = -1/4$.

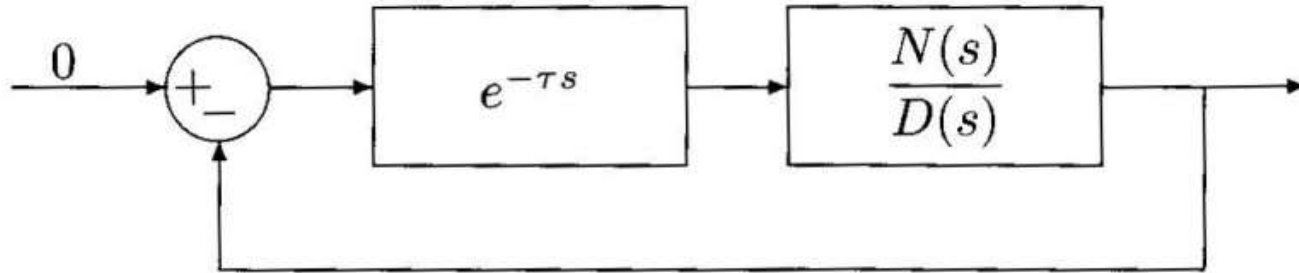


FIG. 10.31 : Système linéaire retardé.

1. Système non retardé :

$$p(s, 0) = s^2 + 4s + \frac{15}{4} = \left(s + \frac{5}{2}\right) \left(s + \frac{3}{2}\right), \quad (10.36)$$

en $\tau = 0$ les deux racines sont dans le demi-plan complexe gauche.

2. $q(\omega^2) = (4 + \omega^2)^2 - \frac{1}{16} = \left(\omega^2 + \frac{15}{4}\right) \left(\omega^2 + \frac{17}{4}\right).$

3. $q(\omega^2) = 0$ n'a pas de racines réelles positives.

4. Le système est donc stable indépendamment du retard $\tau > 0$.

- *Exemple 2*

Soit un système d'équation caractéristique :

$$p(s, \tau) = s^3 + s^2 + 2s + 1 + e^{-\tau s} = 0. \quad (10.37)$$

1. $p(s, 0) = (s + 1)(s^2 + 2)$ est instable ;
2. $q(\omega^2) = \omega^2(\omega^2 - 1)(\omega^2 - 2)$;
3. $s = 0$ n'est pas racine de $p(s, \tau) = 0$, on l'écarte donc.

En $\omega = 1$, $p(j, \tau) = j + e^{-\tau j} = 0$, pour $\tau = \pi/2 + 2\pi n$, la courbe $q(\omega^2) \sim 1 - \omega^2$ traverse l'axe des ω^2 de haut en bas (pour ω^2 croissant) et $p(s, \tau)$ traverse l'axe imaginaire de droite à gauche. On a donc stabilité après $\tau > \pi/2 + 2\pi n$ (n entier positif).

En $\omega = \sqrt{2}$, $p(j\sqrt{2}, \tau) = -1 + e^{-\tau j\sqrt{2}} = 0$, pour $\tau = k\pi\sqrt{2}$, la courbe $q(\omega^2) \sim 2(\omega^2 - 2)$ traverse l'axe des ω^2 de bas en haut, et on a stabilité jusqu'à $\tau < k\pi\sqrt{2}$ (k entier positif).

Le système (10.37) est donc asymptotiquement stable pour :

$$\frac{\pi}{2} < \tau < \pi\sqrt{2}, \quad \text{ou} \quad \frac{5\pi}{2} < \tau < 2\pi\sqrt{2}, \quad (10.38)$$

ou $9\pi/2 < \tau < 4\pi\sqrt{2}$, etc...

- *Exemple 3*

Soit le système :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t - \tau). \quad (10.39)$$

Son équation caractéristique s'écrit :

$$p(s, \tau) = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 1 & s + 1 + e^{-\tau s} \end{vmatrix} = s^2 + s + 1 + se^{-\tau s} = 0. \quad (10.40)$$

1. $p(s, 0) = (s + 1)^2$, asymptotiquement stable.
2. $q(\omega^2) = (1 - \omega^2)^2$.
3. $\omega = 1$ est une racine double de $q(\omega^2)$, donc le lieu de $p(s, \tau)$ touche l'axe imaginaire, sans le traverser, pour $\tau = (2n + 1)\pi$, n entier positif.
4. Le système (10.39) est asymptotiquement stable, pour tout $\tau \neq (2n + 1)\pi$.

Stabilité : 1ère méthode de Liapounov

« approximation des petits mouvements »



$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^k A_i x(t - h_i) + q(t, x_t) \quad (5.8)$$

$$q(t, x_t) = q(t, x(t), x(t - \tau_1(t)), \dots, x(t - \tau_k(t))),$$

$$h_0 = 0, \quad h_i = \text{constantes}, \quad \tau_j(t) \in [0, \tau_i] \text{ continues},$$

$$\|u_i\| \leq \varepsilon \Rightarrow \|q(t, u_0, \dots, u_k)\| \leq \beta_\varepsilon (\|u_0\| + \dots + \|u_k\|),$$

avec $\beta_\varepsilon = \text{constante}$ pour ε donné, β_ε uniformément décroissante vers 0 quand $\varepsilon \rightarrow 0$. L'approximation au premier ordre est définie par :

$$\dot{z}(t) = \sum_{i=0}^k A_i z(t - h_i). \quad (5.9)$$

Théorème 4. [26] *Si le système linéarisé (5.9) est asymptotiquement stable, alors $z = 0$ l'est aussi pour (5.8). Si (5.9) a au moins une racine caractéristique à partie réelle positive, alors $z = 0$ est instable pour (5.8).*

Stabilité : cas des retards faibles

« approximation des petits retards »

$$\dot{z}(t) = \sum_{i=0}^k A_i z(t - h_i). \quad (5.9)$$

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^k A_i x(t - h_i) + q(t, x_t) \quad (5.8)$$

Le résultat précédent peut être utilement complété par une *approximation des petits retards*, résultat de nature qualitative obtenu par continuité des racines caractéristiques de (5.9) vis-à-vis des retards h_i .

Théorème 5. [26] *Si $A = \sum_{i=0}^k A_i$ est de Hurwitz (respectivement, instable), alors pour des valeurs suffisamment faibles des retards h_i , la solution nulle $z = 0$ est asymptotiquement stable (respectivement, instable) pour (5.9) et donc (5.8). Si, sur les n valeurs propres de A , $n-1$ ont des parties réelles strictement négatives et la n -ième est nulle, alors, pour des valeurs suffisamment faibles des h_i , $z = 0$ est stable pour (5.9)*

Stabilité : cas mono-retard faible

quantification d'un retard « faible » admissible

$$\frac{dz(t)}{dt} = A_0 z(t) + A_1 z(t - \underline{h}), \quad (5.10)$$

qui, pour un retard nul, devient :

$$\frac{dz(t)}{dt} = (A_0 + A_1) z(t). \quad (5.11)$$

condition suffisante

Théorème 6. [40] *Si le système à retard nul (5.11) est asymptotiquement stable et si P est la matrice solution de l'équation de Liapounov (où Q est une matrice réelle définie positive [117]) :*

$$(A_0 + A_1)^T P + P (A_0 + A_1) = -Q^T Q, \quad (5.12)$$

alors (5.10) est asymptotiquement stable pour tout retard $h \in [0, h_{\max}]$:

$$h_{\max} = \frac{1}{2} [\lambda_{\max}(B^T B)]^{-\frac{1}{2}}, \quad \text{avec } B = Q^{-T} A_1^T P (A_0 + A_1) Q^{-1}. \quad (5.13)$$

Un résultat de V.B. Kolmanovskii & Myshkis (1999)

$$\dot{x}(t) = Ax(t - h)$$

$$V(x_t) = \|x(t)\| \text{ (some norm)}$$

$\|A\|$ = associated matrix norm,

$\gamma(A)$ = logarithmic norm (“measure”).

$$\gamma(A) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\|I + hA\| - 1}{h}$$

$$\gamma(A) < -h\|A\|^2 \implies \text{expon. stable, } e^{-\omega t}$$

$$\omega : \text{solution of } \omega = -\gamma(A) - h\|A\|^2 e^{2\omega h}$$

Stabilité : méthode directe de Liapounov

Seconde méthode de Lyapunov

Insuffisance de la théorie classique

- Système :

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) - x_1(t)x_2^2(t - \tau_1) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) - x_2(t)x_1^2(t - \tau_2) \end{cases}$$

- Fonction de Lyapunov : $V(x) = x_1^2 + x_2^2$
- Dérivée le long des solutions :

$$\frac{dV}{dt}(x(t)) = -2 [x_1^2(t)x_2^2(t - \tau_1) + x_2^2(t)x_1^2(t - \tau_2)] \leq 0$$

$\Rightarrow x = 0$ est stable. Cet exemple est un cas très (!) particulier

Suite : Méthode « directe » de Liapounov

FDE :

$$\dot{x}(t) = -ax(t) - bx(t-h)$$

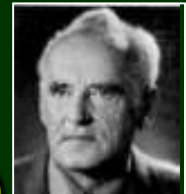
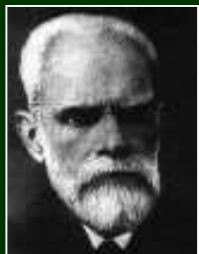
$$V(x(t)) = x^2(t) \quad (\text{quadratique « usuelle »})$$

$$\dot{V}(x(t)) = -2 [ax^2(t) + \overbrace{bx(t)x(t-h)}^{\text{termes croisés}}] \leq \dots ?$$

→ besoin de méthodes dédiées :

1) fonctions de Lyapunov-Razumikhin (pas ici)

2) fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii



une illustration simple de la méthode de Lyapunov-Krasovskii

$$\dot{x}(t) = -ax(t) - bx(t-h)$$

$$V(x_t) = x^2(t) + |b| \int_{-h}^0 x^2(t+s) ds \quad (\text{quad} + \text{intégrale})$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) &= -2x(t)[ax(t) + bx(t-h)] \\ &\quad + |b| \underline{[x^2(t) - x^2(t-h)]} \\ &\leq -2(a - |b|)x^2(t) \quad \dots \dot{V}(x_t) < 0 \text{ if } |b| < a \end{aligned}$$

cas $b \geq 0$: $|b| = b$ et

$$-2bx(t)x(t-h) - |b|x^2(t-h) = -b[x(t) + x(t-h)]^2 + bx^2(t)$$

Stabilité : méthode directe de Liapounov ⁽¹⁾

1) définitions

Stabilité : méthode directe de Liapounov ⁽¹⁾

Définition 3. Une fonction scalaire $\omega : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ est dite définie positive si elle est continue et vérifie $\omega(r) > 0$ pour $r > 0$, et $\omega(0) = 0$. Une matrice carrée réelle Q est définie positive si $\omega(x) = x^T Q x$ l'est (donc si, et seulement si, ses valeurs propres λ_i vérifient $\lambda_i > 0$).

Stabilité : méthode directe de Liapounov ⁽¹⁾

Définition 3. Une fonction scalaire $\omega : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ est dite définie positive si elle est continue et vérifie $\omega(r) > 0$ pour $r > 0$, et $\omega(0) = 0$. Une matrice carrée réelle Q est définie positive si $\omega(x) = x^T Q x$ l'est (donc si, et seulement si, ses valeurs propres λ_i vérifient $\lambda_i > 0$).

Définition 4. Soit V une fonctionnelle vérifiant les propriétés suivantes :

- (a) $V : \mathbb{R} \times \mathcal{B}_h \rightarrow \mathbb{R}$ ($h > 0$) est continue, avec $V(t, 0) = 0$ pour tout t .
- (b) il existe des fonctions scalaires ω_1, ω_2 définies positives, non décroissantes, telles que :

$$\omega_1(\varphi(0)) \leq V(t, \varphi) \leq \omega_2(\|\varphi\|_C) \quad \forall t. \quad (5.14)$$

La dérivée totale de la fonctionnelle $V(t, \varphi)$ le long des solutions de (5.1) est alors définie par :

$$\dot{V}(t, \varphi) \triangleq \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{1}{\varepsilon} [V(t + \varepsilon, x(t + \varepsilon, t, \varphi)) - V(t, \varphi)].$$

Stabilité : méthode directe de Liapounov ⁽²⁾

Théorème 7. ^{*} *S'il existe une fonctionnelle $V(t, \varphi)$ vérifiant les propriétés (a) et (b) ci-dessus et, pour tout t_0 et tout $t \geq t_0$:*

$$\dot{V}(t, \varphi) \leq -\omega_3(\varphi(0)), \quad (5.15)$$

où ω_3 est définie positive, non décroissante, alors l'équilibre $x = 0$ de l'EDR (5.1) est uniformément asymptotiquement stable.

^{*} « Lyapunov – Krasovskii Functional »

Exemple simple (rappel...)

$$\dot{x}(t) = -ax(t) - bx(t - \tau)$$

$$\Rightarrow \mathcal{V}(\varphi) = \varphi^2(0) + |b| \int_{-\tau}^0 \varphi^2(t + s) ds$$

Conditions 1) et 2) remplies :

$$\varphi^2(0) \leq \mathcal{V}(\varphi) \leq (1 + |b|\tau) \|\varphi\|^2$$

Expression de la dérivée $\dot{\mathcal{V}}$:

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}}(x_t) &= -2x(t) [ax(t) + bx(t - \tau)] \\ &\quad + |b| [x^2(t) - x^2(t - \tau)] \end{aligned}$$

$$\dot{\mathcal{V}}(x_t) \leq -2(a - |b|)x^2(t)$$

$\Rightarrow x = 0$ est U.A.S i.d.r. si $a > |b|$.

Stabilité : méthode directe de Liapounov ⁽³⁾

Fonctionnelles de Liapounov – Krasovskii particulières

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t - h), \quad (5.18)$$

$$V(x_t) = x(t)^T Px(t) + \int_{-h}^0 x(t + \theta)^T Sx(t + \theta)d\theta, \quad (5.19)$$

➔ on obtient des conditions suffisantes sous forme d'équations de Riccati : (5.18) est asymptotiquement stable pour tout $h \geq 0$ s'il existe des matrices P , S , R positives et symétriques telles que :

$$A_0^T P + PA_0 + PA_1 S^{-1} A_1^T P + S + R = 0. \quad (5.20)$$

Cette équation (5.20) est équivalente à la LMI suivante :

$$\begin{pmatrix} A_0^T P + PA_0 + S & PA_1 \\ A_1^T P & -S \end{pmatrix} < 0. \quad (5.21)$$

Stabilité : méthode directe de Liapounov (4)

Bien sûr, pour $A_1 = 0$, (5.20) se réduit à l'équation de Liapounov $A_0^T P + P A_0 < 0$, CNS classique dans le cas ordinaire. Pourtant, dans le cas retardé, la condition suffisante (5.20)-(5.21) est loin d'être nécessaire. C'est pourquoi de très nombreuses généralisations de la fonctionnelle (5.19) ont été publiées dans les quinze dernières années. Elles mettent en jeu les termes variés suivants :

$$V_1(x(t)) = x^T(t) P x(t), \quad (5.22)$$

$$V_2(x_t) = x^T(t) \int_{-h_i}^0 Q_i x(t + \theta) d\theta,$$

$$V_3(x_t) = \int_{-h_i}^0 x^T(t + \theta) S_i x(t + \theta) d\theta,$$

$$V_4(x_t) = \int_{-\tau_i}^0 \int_{t+\theta}^t x^T(\theta) R_i x(\theta) d\theta ds,$$

$$V_5(x_t) = x(t)^T \int_{-h_i}^0 P_i(\eta) x(t + \eta) d\eta,$$

$$V_6(x_t) = \int_{-h_i}^0 \int_{-h_i}^0 x(t + \eta)^T P_i(\eta, \theta) x(t + \theta) d\eta d\theta.$$

Généralisation

$$(S) \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau), \text{ avec } x(t) \in \mathbb{R}^n.$$

Fonctionnelle : $V(\varphi) = \varphi^T(0)P\varphi(0) + \int_{-\tau}^0 \varphi^T(s)S\varphi(s) ds$
avec $P, S \succ 0$.

$$\Rightarrow \boxed{\dot{V}(x_t) = y^T(t)Qy(t)}$$

$$\text{avec } Q = \begin{bmatrix} A^T P + PA + S & PB \\ B^T P & -S \end{bmatrix} \text{ et } y(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t - \tau) \end{bmatrix}$$

\Rightarrow Stabilité asymptotique i.d.r. si $Q \prec 0$ (LMI)

2^e généralisation : $V(t) = \bar{x}^T(t)E\bar{x}(t) + \int_{t-\tau_2}^t x^T(s)Sx(s)ds + \int_{-\tau_2}^0 \int_{t+\theta}^t z^T(s)Rz(s)dsd\theta$,
(descripteur)

$$\text{où } E = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et où le vecteur } \bar{x}(t) \text{ est donné par } \text{col}\{x(t), z(t)\}.$$

Prise en compte de la valeur du retard

Hyp. : (S) asymp. stable pour $\tau = 0 \Rightarrow \mathcal{A} = A + B$ Hurwitz

Problème

Chercher une borne τ^* t.q. stab. asympt. $\forall \tau \leq \tau^*$.

Idée

Transformation du modèle à l'aide de la formule de Leibniz-Newton :

$$x(t) - x(t - \tau) = \int_{-\tau}^0 \dot{x}(t + s) ds$$

(S) \Rightarrow

$$\dot{x}(t) = (A + B)x(t) - B \int_{t-\tau}^t (Ax(s) + Bx(s - \tau)) ds$$

Cas des systèmes neutres ⁽¹⁾

$$\dot{x}(t) = f(x_t, t, \dot{x}_t, u_t), \quad (6.1)$$

On représente généralement les systèmes neutres sous la forme de Hale [48] :

$$F \dot{x}_t = \frac{dF x_t}{dt} = f(x_t, t, u_t), \quad (6.2)$$

où $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un opérateur régulier (ce qui évite les systèmes implicites) à argument différé. Dans le cas linéaire, stationnaire et à retards ponctuels, un système neutre s'écrit :

$$\dot{x}(t) - \sum_{j=1}^q D_j \dot{x}(t - \omega_j) = \sum_{i=0}^k [A_i x(t - h_i) + B_i u(t - h_i)], \quad (6.3)$$

équation à laquelle on associe l'équation linéaire aux différences :

$$F z_t = z(t) - \sum_{j=1}^q D_j z(t - \omega_j) = 0, \quad D_j \text{ matrices constantes.} \quad (6.4)$$

Cas (particulier) des systèmes neutres ⁽²⁾

On notera que, dans les publications concernant les applications aux sciences pour l'ingénieur, le cas mono-retard est quasiment le seul représenté, sous la forme particulière suivante :

$$\dot{x}(t) - D\dot{x}(t - h_1) = A_0x(t) + \sum_{i=1}^k [A_i x(t - h_i) + B_i u(t - h_i)], \quad (6.5)$$

dont l'équation aux différences associée est :

$$z(t) - Dz(t - h_1) = 0. \quad (6.6)$$

si on fait l'hypothèse de la stabilité asymptotique de l'équation aux différences (6.4) (ce que l'on nomme « stabilité formelle » du système neutre [16]), alors le nombre de racines instables devient fini [26]. La stabilité formelle est également appelée « f -stabilité » dans le cas non linéaire [69].

Formalismes

- FDEs (déjà présenté)
- Semi-groupes (opérateurs en dim. infinie)
- Géométrie (sur anneaux)
- Algébrique
- 2D (systèmes neutres)

direct
contrôle

direct
biblio

4.0 FDEs

(déjà vu)

$$\dot{x}(t) = f(x_t, t, u_t), \quad t \geq t_0$$

$$\begin{aligned} x_t(\theta) &= x(t + \theta), & -h \leq \theta \leq 0, \\ u_t(\theta) &= u(t + \theta), & -h \leq \theta \leq 0, \\ x(\theta) &= \varphi(\theta), & t_0 - h \leq \theta \leq t_0, \end{aligned}$$

- très général (retards qcques, lin./non lin., ...)
- commande par méthodes de type Lyapunov (en linéaire ou non lin. de type polytopique)

4.1 Operators in infinite dimension

Delfour72, Manitius78, Delfour-Karrakchou87, Bensoussan93...

$\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_2([-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n)$ fncts with integrable square

$\mathcal{M}_2 = \mathbb{R}^n \times \mathcal{L}_2$ Hilbert space

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_0x(t) + A_1x(t-h) + B_0u(t), \\ y(t) &= C_0x(t).\end{aligned}$$

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = \tilde{A}\bar{x}(t) + \tilde{B}u(t), \\ y(t) = \tilde{C}\bar{x}(t) \end{cases}$$

$$\bar{x}(t) = [x(t), x_t] \in \mathcal{M}_2$$

\tilde{A} unbounded, closed, dense operator,

\tilde{B} and \tilde{C} bounded operators (if no input/output delay)

properties of semi-groups hold
general theory of infinite-dimensional, differential eqns

disadvantages:

- 1) abstract mathematics
- 2) yields controls in *distributed* form.

4.2 Geometric approach over polynomial rings

for linear systems with commensurate, constant delays

$\mathbb{R}[\nabla]$ *commut. ring of polynom. in delay operator* ∇
 absence of inverse on $\mathbb{R}[\nabla] \Leftrightarrow$ absence of advance
 ∇^{-1}

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=0}^k A_i x(t - i\delta) + \sum_{i=0}^k B_i u(t - i\delta) \\ y(t) = \sum_{i=1}^k C_i x(t - i\delta) \end{cases}$$

↓

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \mathbf{A}(\nabla)x(t) + \mathbf{B}(\nabla)u(t), \\ y(t) = \mathbf{C}(\nabla)x(t), \end{cases}$$

$$\mathbf{A}(\nabla) \in \mathbb{R}^{n \times n}[\nabla], \mathbf{B}(\nabla) \in \mathbb{R}^{n \times m}[\nabla], \mathbf{C}(\nabla) \in \mathbb{R}^{p \times n}[\nabla]$$

$\Rightarrow x$ belongs to the *state-module* $\mathbb{R}[\nabla]^n$

Control: *polynomial* feedback \Rightarrow polynomial system

$$\begin{aligned} u(t) &= -\mathbf{F}(\nabla)x(t) + v(t), \\ \mathbf{F}(\nabla) &\in \mathbb{R}[\nabla]^{m \times n} \end{aligned}$$

- *control assumptions:* *polynomial* control remains a limitation since realizability of concrete controllers needs:

\rightarrow *rational* fractions (precompensators, neutral syst)

\rightarrow *distributed* delays (finite spectrum assignment)

4.3 Systems over rational rings

ring $R[\nabla] \rightarrow$ field $R(\nabla)$ of rational fractions in ∇
 \rightarrow allows dynamic feedback, but realizability?

$\mathcal{R}_u(\nabla)$ = subring of the irreducible, rational fractions in ∇ , which denominator has a non-zero constant term:

$$\mathcal{R}_u(\nabla) = \left\{ \frac{p(\nabla)}{q(\nabla)} \in \mathbb{R}(\nabla), q(0) \neq 0 \right\}.$$

Examples:

$\frac{1}{1+\nabla}$ belongs to $\mathcal{R}_u(\nabla)$ $y(t) = -y(t - \delta) + u(t)$

$\frac{1}{\nabla}$ does not $y(t) = u(t + \delta)$ is anticipative

Theorem (causality) [Picard, Lafay, Kucera 96]

$$\frac{p(s, \nabla)}{q(s, \nabla)} = \frac{p_0(\nabla) + \dots + s^r p_r(\nabla)}{q_0(\nabla) + \dots + s^k q_k(\nabla)}, \quad r \leq k$$

is causal $\iff q_k(\nabla) \in \mathcal{R}_u(\nabla)$ (ring property).

Advantage of models over $\mathbb{R}_u(\nabla)$:

dynamic feedback law defined over $\mathcal{R}_u(\nabla)$

\Rightarrow resulting system remains in the same class

4.4 Algebraic formalism for distrib. delays

Manitius-Olbrot 79, Kamen-Khargonekar-Tannenbaum 85,
Watanabe 96

Example:

$$u \rightarrow y, \quad y(t) = \int_{h_1}^{h_2} f(\theta)u(t - \theta)d\theta,$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = F(s) = \int_{h_1}^{h_2} f(\theta)e^{-s\theta}d\theta$$

$ex \rightarrow$ zero-holder operator $\frac{1 - e^{-sh}}{s} = \int_0^h e^{-s\theta}d\theta.$

\rightarrow explicit consideration of the relation $s \rightleftharpoons \nabla \equiv e^{-s\delta}$

$$\mathcal{G} = \{ \mathcal{L}(\text{realizable, distributed delay}) \in \mathbb{R}(s, e^{-s\delta}) \}$$

$\rightarrow \mathcal{E} =$ ring of *pseudo-polynomials* (analytic fct)

$$\mathcal{E} = \mathbb{R}[e^{-s\delta}] \cup \mathcal{G} \quad [\text{Brethé, Loiseau}]$$

\mathcal{E} is isomorphic to the quasi-polynomials ring $\mathbb{R}[s, e^{-s\delta}]$

\mathcal{E} is a domain of Bezout (\rightarrow finite-spectrum assign^{mt})

4.5 Generalization to nonlinear systems

[Moog, Marquez-Martinez 00]

Non commutative polynomial ring $\mathcal{K}[\nabla]$,

\mathcal{K} field of meromorphic (ratio of analytic) functions:

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t)x_2(t-1) \equiv x_{1,0}x_{2,1} = x_{1,0}\delta x_{2,0}$$

$$\dot{x}_2(t) = u_1(t) + x_2(t-2) \equiv u_{1,0} + x_{2,2}$$

non commutative :

$$x_{1,0}\delta x_{2,0} = x_{1,0}x_{2,1}$$

$$\neq$$

$$\delta x_{1,0}x_{2,0} = x_{1,1}x_{2,0}$$

$\mathcal{K}[\nabla]$ integer ring with Euclidean left-division.

4.6 2-D models and neutral systems

Roesser models [1975]:

s = derivation operator ω = h -advance operator.

$$\begin{cases} sX = A_0X + A_2Z + B_0U, \\ \omega Z = A_3X + DZ + B_3U, \end{cases}$$

$$Y = C_1X + C_2Z.$$

Example:

$$A_2 = I, \quad A_3 = A_1 + DA_0, \quad B_3 = B_1 + DB_0,$$

$$\Downarrow$$

$$\dot{x}(t) - D \dot{x}(t-h) = A_0x(t) + A_1x(t-h) + B_0u(t) + B_1u(t-h)$$

⇒ allows connection with previous results

→ realization [Eising 78]

→ stabilization [Zak 86]

→ factorization & model matching [Loiseau, Brethé].

→ equivalence with the question of realization over

$\mathcal{R}_u(\nabla)$ [Picard].

Contrôle

- Conditions structurelles (existence)
- Limite des méthodes « dim. finie »
- Prédicteur de Smith, le principe
- Quelques parallèles avec la prédiction...

direct
Smith



direct
biblio



exemple

$$\dot{x}(t) = x(t) + u(t - 1)$$

n'est pas stabilisable avec $u(t) = -kx(t)$

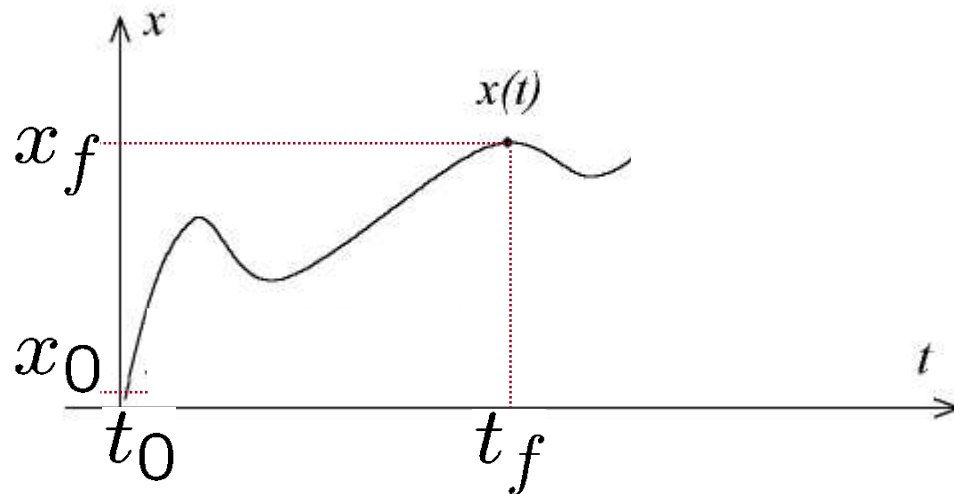
Structure de la commande ?

⇒ Besoin de connaître les propriétés structurelles du système.



Exemple de propriété structurelle : COMMANDABILITE

∃? commande u faisant passer l'état $x(t_0) = x_0$ en $x(t_f) = x_f$?



- 1) controllability: to reach a *function* instead of a point.
- 2) control delay \Rightarrow *minimum reaching time*.
 \Rightarrow the notion of reachable sets ("orders" of Kalman-like controllability chains) has to be completed by associating a "class" depending on the time needed to achieve the control.
- 3) realization of the control law: $u(t) = g(x_t)$
 \rightarrow one may prefer "memoryless" controls $u(t) = g(x(t))$
 or point-wise-delayed $u(t) = g(x(t), x(t - h_i))$.

\Rightarrow Several notions (controllability ↓)

Syst. dim. finie : état $x(t_0) = x_0$ à $x(t_f) = x_f$

En linéaire-stationnaire (principe de superposition OK) :

- si $\exists u$, indépendant de $t_f - t_0$ et : ce qui est possible en T l'est en $T/100$ (!)
- si passage possible de x_0 à x_f , alors possible de x_f à x_0

Ce n'est plus vrai non linéaire

Syst. dim. infinie : état = fonction x_{t_f}

Ce n'est plus vrai non plus, même en linéaire

Commande

	controlability	abridged def	restrict
functional	1 \mathcal{M}_2 -strict	$\exists u, \exists t_1,$ $x_{t_1} = \varphi_1$	-
	2 \mathcal{M}_2 -approx.	$\exists u_n, \exists t_1,$ $\lim[x_{t_1}]_{u_n} = \varphi_1$	-
	3 absolute	$\exists u, u_{t_1} = 0,$ $x_{t_1} = \varphi_1$	lin, ∇u
	4 (ψ, \mathbb{R}^n) -fct	$\exists u, \exists t_1,$ $x_{t_1} = \psi \in \mathcal{C}$	lin, ∇x
	5 spectral	$\exists u,$ $\sigma_{A(e^{-\delta s})} = \{\lambda_i\}$	lin, coms.
point-wise	6 \mathbb{R}^n -	$\exists u, \exists t_1,$ $x(t_1) = x_1$	lin, coms.
	7 strong \mathbb{R}^n -	$\exists u, \forall t_1,$ $x(t_1) = x_1$	lin, coms.
	8 \mathbb{R}^n -to 0	$\exists u, \exists t_1,$ $x(t_1) = 0$	lin, coms.
$u(t)$ type	9 (strong) over $\mathbb{R}[\nabla]$	polyn. $u(t)$ $= K(\nabla)x(t)$	lin, coms.
	10 (weak) over $\mathbb{R}(\nabla)$	rational $L(\nabla)u(t)$ $= K(\nabla)x(t)$	lin, coms.

for LTI with coms delays:



OK, c'est de l'existence...

mais **comment calculer cette commande ?**

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=0}^q A_i x(t - ih) + \sum_{i=0}^q B_i u(t - ih) \\ y(t) = \sum_{i=0}^q C_i x(t - ih) \end{cases}$$

Trouver un retour de sortie (dynamique) ou d'état $u(t)$ t.q. le système bouclé soit asympt. stable

2 méthodes :

- Approximation en dim. finie

$\exp(-hs) \rightarrow \frac{N(s)}{D(s)}$ ex. approximants de Padé

$$\frac{1 - \frac{h}{2}s}{1 + \frac{h}{2}s} = 1 - hs + \frac{h^2}{2}s^2 - \frac{h^3}{4}s^3 + O(s^4)$$

- conserver le système de dim. infinie

Première approche :

Problème :

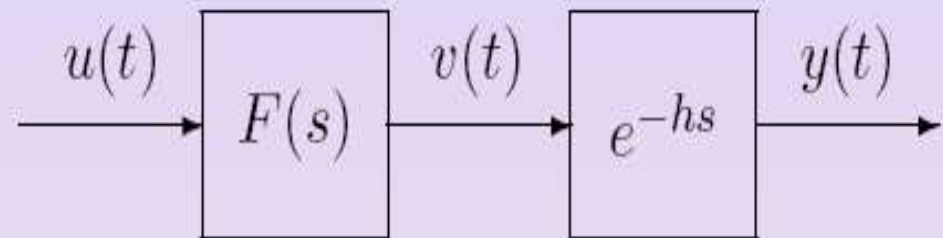
\Rightarrow syst. de grande dimension \Rightarrow contrôleurs complexes

Ordre de l'approximation, stabilité numérique des algorithmes ?

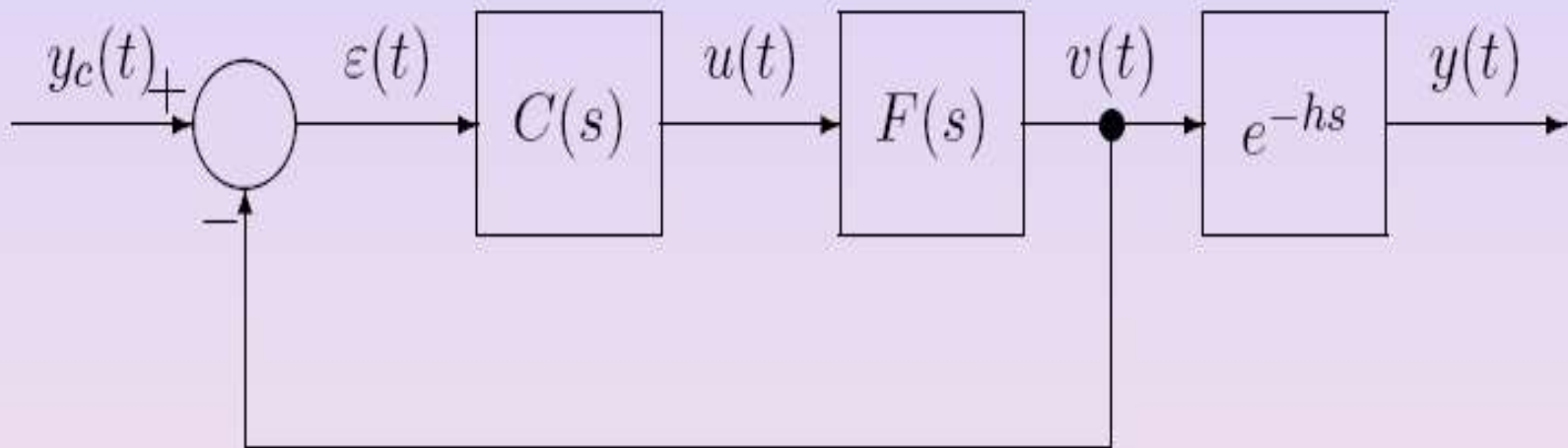
Seconde approche :

- Besoin d'outils spécifiques
- Régulateurs de dimension infinie
 \Rightarrow Implantation / approximation ?

Exemple : cas d'un système à retard sur le capteur

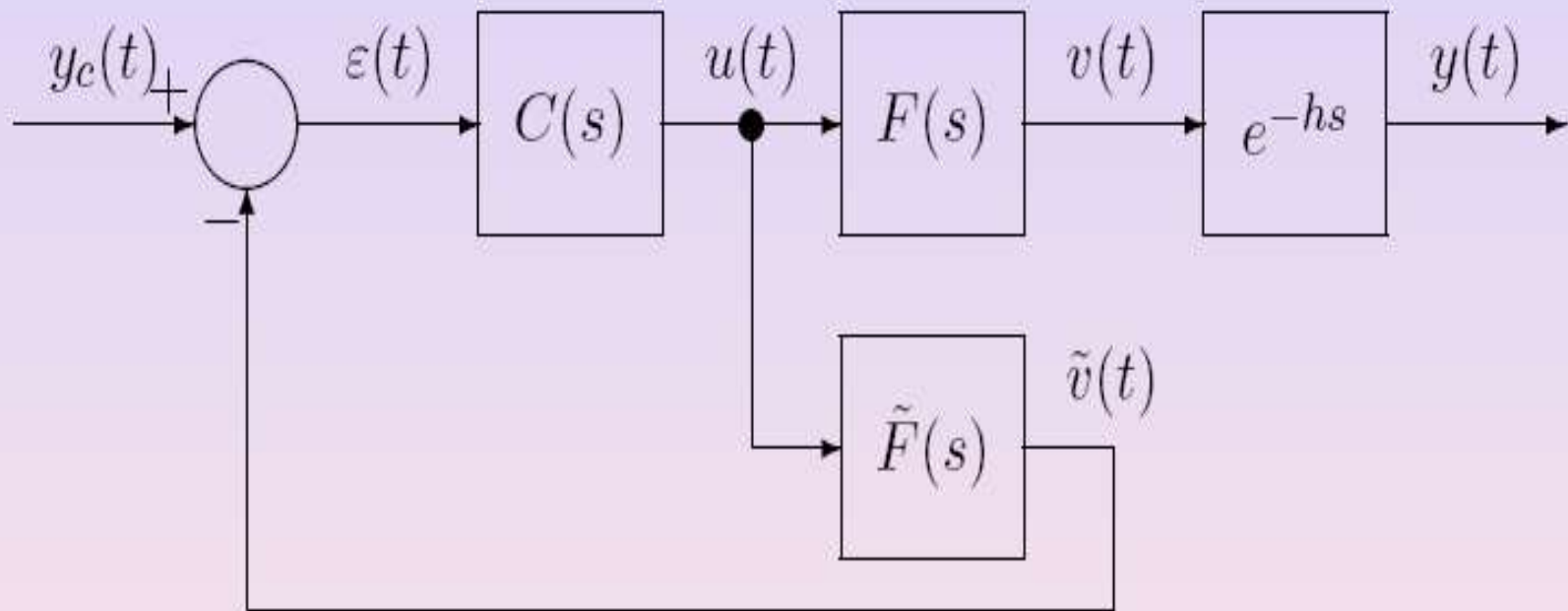


Exemple : cas d'un système à retard sur le capteur



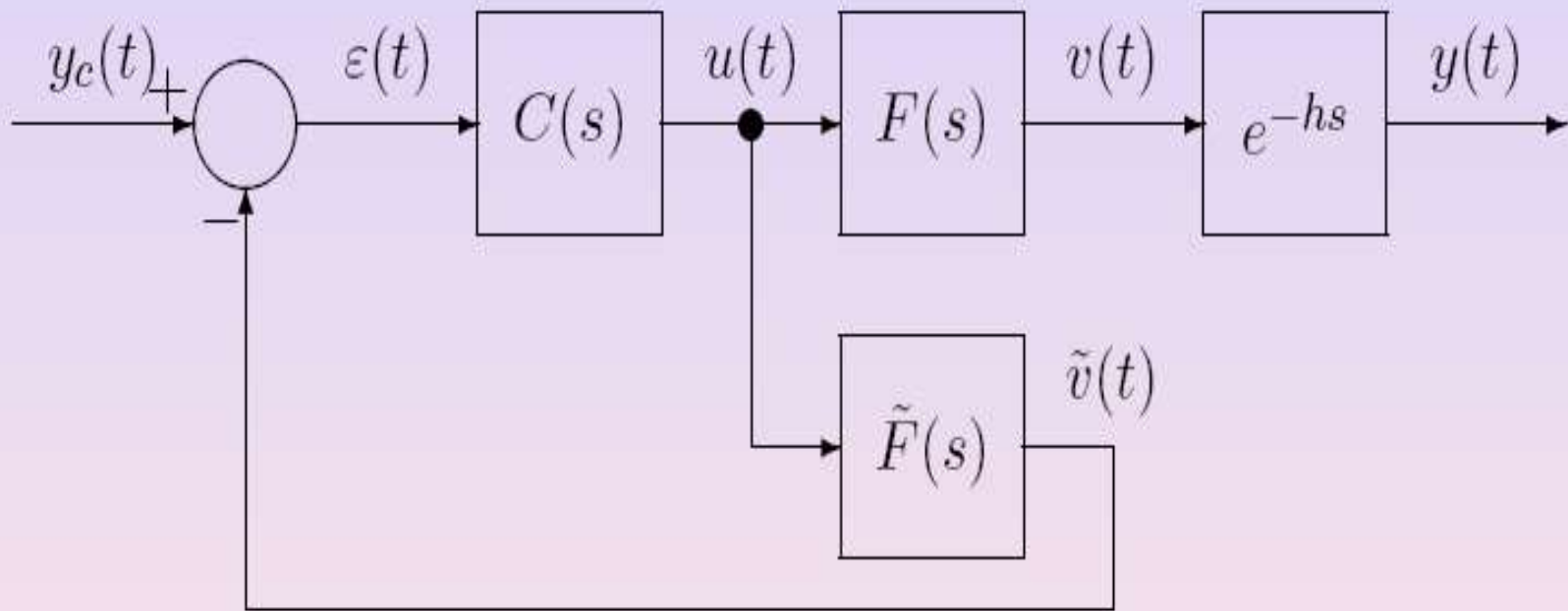
Si on dispose d'un autre capteur non retardé : commande classique

Exemple : cas d'un système à retard sur le capteur



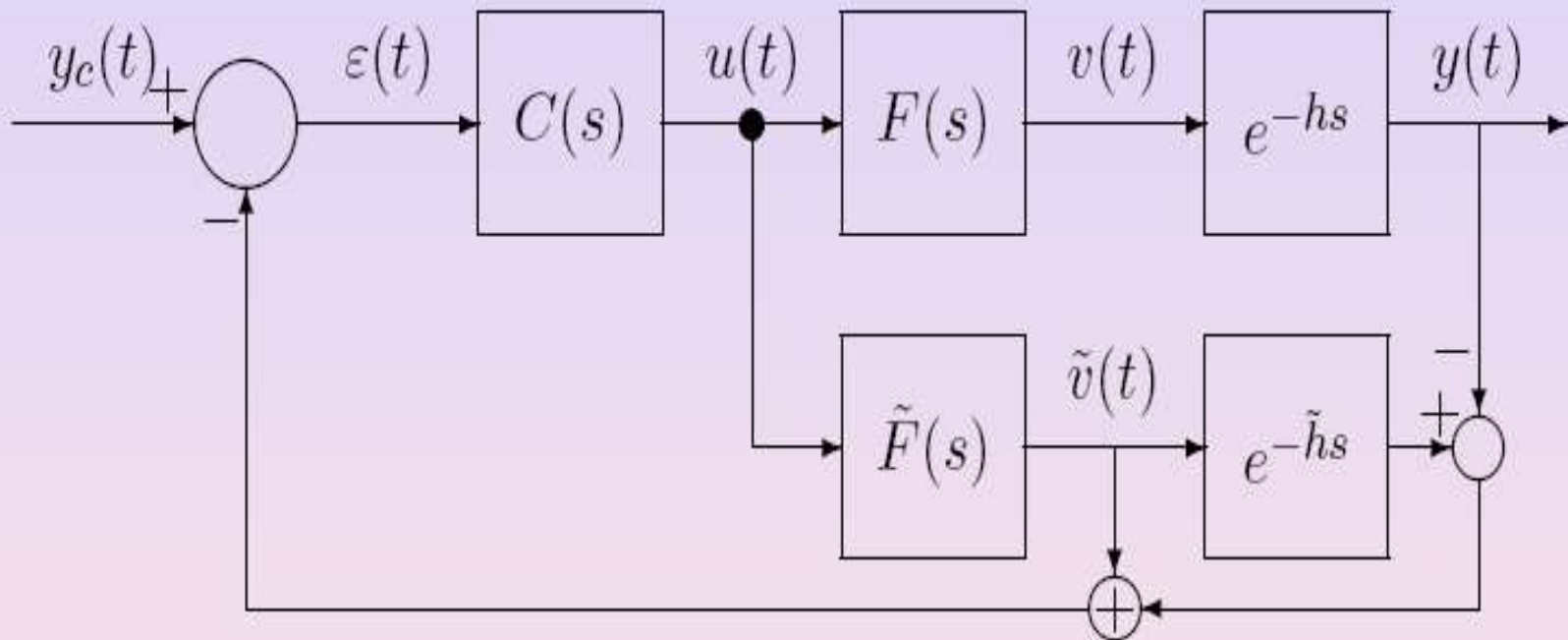
On estime $v(t)$ à l'aide de $u(t)$ et du modèle

Exemple : cas d'un système à retard sur le capteur



Problème ?

Exemple : cas d'un système à retard sur le capteur



→ avec rétroaction

→ **MAIS...**

Modèle parfait ($F = \tilde{F}$, $h = \tilde{h}$),

$$\frac{Y(s)}{Y_c(s)} = \frac{CF}{1 + CF} e^{-hs}$$

sinon :

$$\frac{Y(s)}{Y_c(s)} = \frac{CF}{1 + C\tilde{F} + C(Fe^{-hs} - \tilde{F}e^{-\tilde{h}s})} e^{-hs}$$

→ problème de la robustesse...

retard mal connu, non constant ?

F mal connue, instable ? (cf. exemple suivant)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) + u(t) \\ y(t) = x(t-1) \end{cases} \quad + \text{ régulateur P : } C(s) = K.$$

Equations syst. BF :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= ax(t) + Kr(t) - Kx(t-1) - K\hat{v}(t) + K\hat{v}(t-1) \\ d\hat{v}/dt(t) &= a\hat{v}(t) + Kr(t) - Kx(t-1) - K\hat{v}(t) + K\hat{v}(t-1) \end{aligned}$$

Equation caractéristique :

$$\det \begin{bmatrix} s - a + Ke^{-s} & K - Ke^{-s} \\ Ke^{-s} & s - a + K - Ke^{-s} \end{bmatrix} = (s-a)(s-a+K) = 0.$$


instable pour un système instable en BO!

→ une autre façon de voir le prédicteur de Smith...

Systeme $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - \tau),$

Idée : $u(t) = -Kx(t + \tau) \Rightarrow \dot{x}(t) = (A - BK)x(t)$

mais commande non causale!



→ construire l' « avance » par l'intermédiaire du modèle ?

⇒ prédiction non dynamique de $x(t + \tau)$:

$$\begin{aligned}x(t + \tau) &= e^{A\tau} x(t) + \int_t^{t+\tau} e^{A(t+\tau-s)} B u(s - \tau) ds \\ &= e^{A\tau} x(t) + \int_{-\tau}^0 e^{-A\theta} B u(t + \theta) d\theta.\end{aligned}$$

$$\Rightarrow u(t) = -K e^{A\tau} x(t) - K \int_{-\tau}^0 e^{-A\theta} B u(t + \theta) d\theta.$$

pôles BF = valeurs propres de $A - BK$

→ plusieurs méthodes s'inspirant de ce principe

Transformations équivalentes

Cas des systèmes avec retard sur l'entrée

→ par exemple (... transformation « d'Artstein »)

Système :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - \tau),$$

Changement de variables :

$$z(t) = x(t) + \int_{t-\tau}^t e^{-A(s+\tau-t)} Bu(s) ds$$

$$\Rightarrow \dot{z}(t) = Az(t) + e^{-A\tau} Bu(t)$$

(Kwon & Pearson 80, Artstein 82)

placement de pôles $\iff (A, e^{-A\tau} B)$ commandable (équivalent ici à (A, B) commandable.)

Petite bibliographie

- Richard *et al.* (2009) ISBN : 978-9973-0-0852-7 (385 pages)
Mathématiques pour l'Ingénieur
- Kolmanovski-Nosov (1986), Academic Press.
Stability of functional differential equations.
- Fridman (2014), Springer
Introduction to time-delay systems: Analysis and control.
- Richard (2003), *Automatica* 39 (10), 1667-1694
TDS: An overview of some recent advances and open problems"
- Polyakov, Efimov, Perruquetti, Richard (2013) *Automatica* 49
Output Stabilization of Time-Varying Input Delay Systems <https://hal.inria.fr/hal-00847565>
- Hetel, Fiter, Omran, Seuret, Fridman, Richard, Niculescu (2017) *Automatica* 76
Recent developments on the stability of systems with aperiodic sampling: An overview