

Networked Control Systems :

*to buff, or not to buff? **

web

Jean-Pierre Richard

<http://researchers.lille.inria.fr/~jrichard>

jean-pierre.richard@ec-lille.fr

Séminaire LIRMM, 12 décembre 2011

* *Systèmes Contrôlés en Réseau : s'en tamponner, ou pas ?*



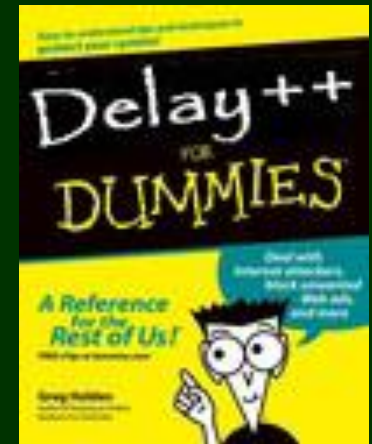
In delay there lies no plenty†

web

Jean-Pierre Richard

<http://researchers.lille.inria.fr/~jrichard>

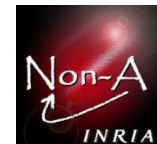
jean-pierre.richard@ec-lille.fr



INTERNATIONAL SCHOOL ON COMPLEX DYNAMICS ENGINEERING
BATZ-SUR-MER, OCTOBER 17-21, 2011
GDR 2984 DYCOEC – DYnamique et COntôle des Ensembles Complexes

*What's to come is still unsure:
In delay there lies no plenty;
Then come kiss me, sweet and twenty,
Youth's a stuff will not endure.*

† Shakespeare, W. *Twelfth Night, Or what you will*, 2(3), 1599.



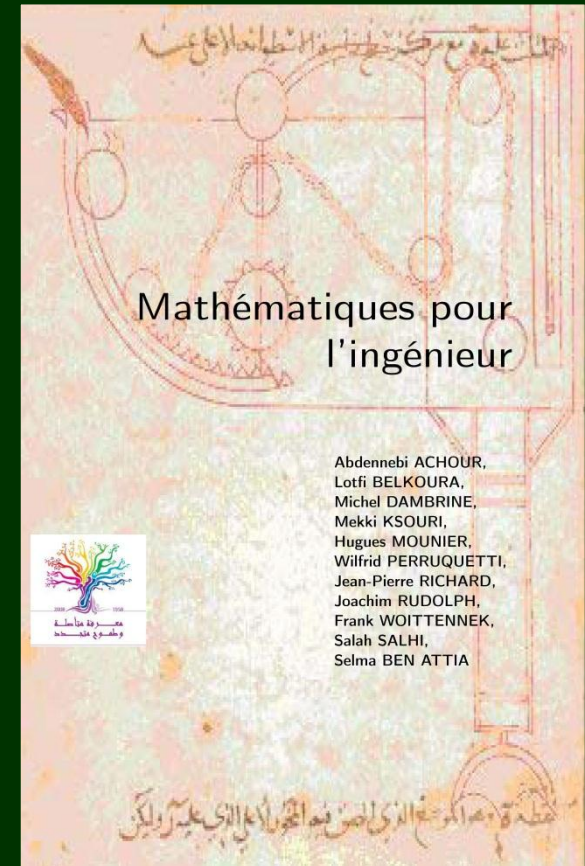
web

... et plus de mathématiques, voir

Mathématiques pour l'Ingénieur

ISBN : 978-9973-0-0852-7 (Tunisie) 385 pages, 2009

http://hal.inria.fr/hal-00519555_v1/



Petite bibliographie



- **Richard *et al.* (2009)** ISBN : 978-9973-0-0852-7 (385 pages)
Mathématiques pour l'Ingénieur
- **Kolmanovski-Nosov (1986)**, Academic Press.
Stability of functional differential equations.
- **Niculescu (2001)**, Springer
Delay effects on stability. LNCIS Vol. 269.
- **Richard (2003)**, *Automatica* 39 (10), 1667-1694
TDS: An overview of some recent advances and open problems"
- **Fridman-Seuret-Richard (2004)** *Automatica* 40 (8)
Robust sampled data stabilization of lin. syst.: an input delay approach
- **Kruszewski-Jiang-Fridman-Richard-Toguyeni (2011)** *IEEE CST*
A switched system approach to exponential stabilization through communication network

Systemes à retards

G3 SDI 2011-2012 / voie 2

Jean-Pierre RICHARD
Ecole Centrale de Lille



UMR 8219



PROJET



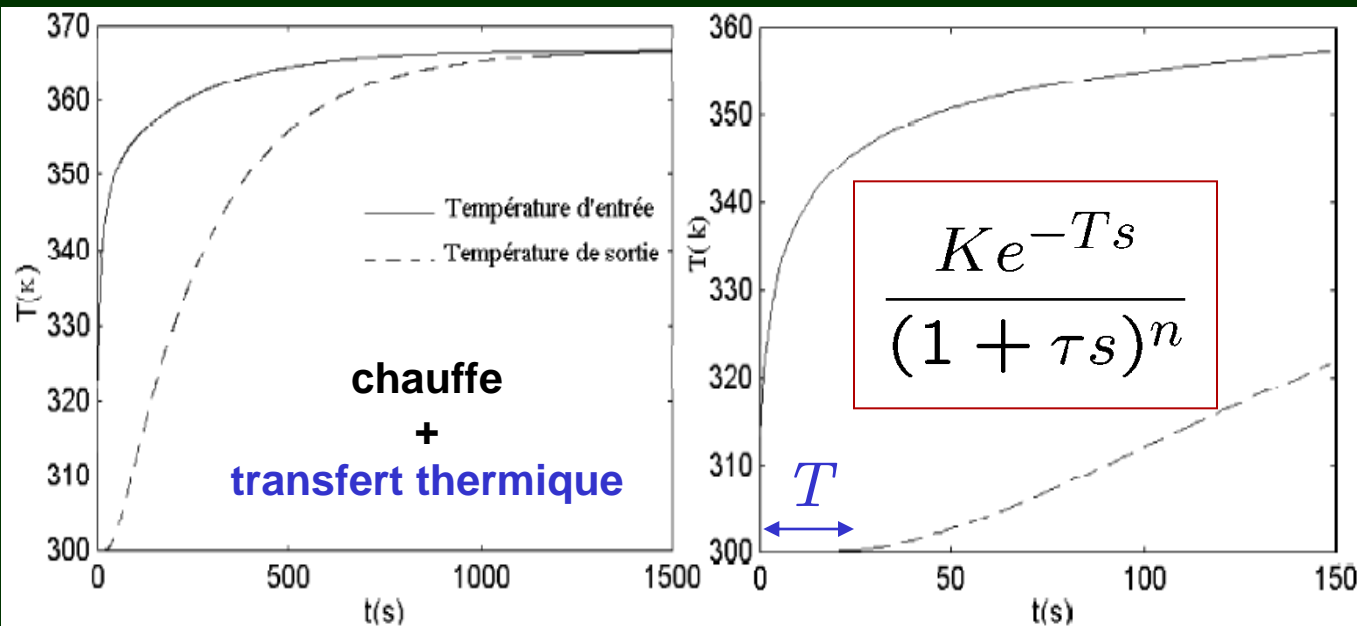
<http://chercheurs.lille.inria.fr/~jrichard>
jean-pierre.richard@ec-lille.fr



Retard : exemple classique

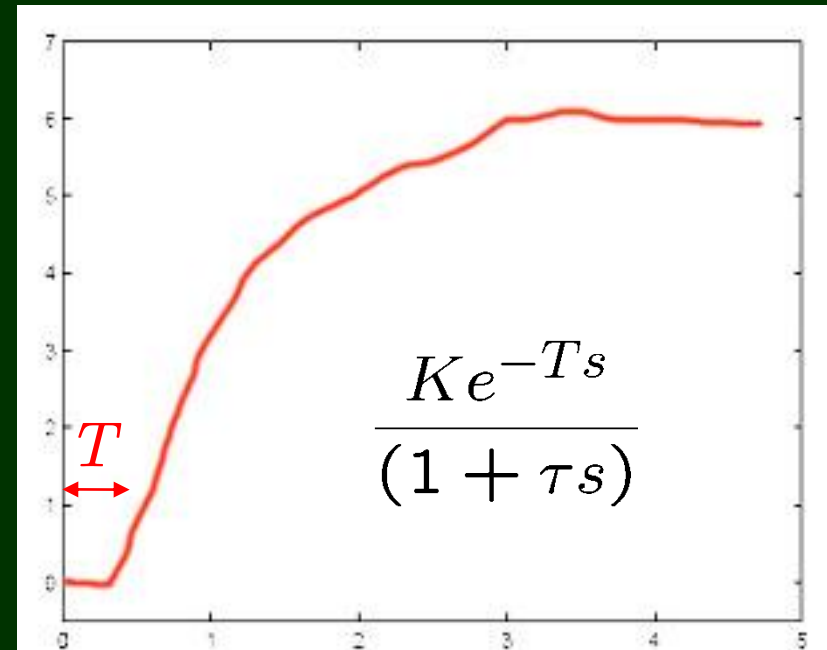
Modèles de type Strejč-Broïda pour la commande industrielle

- usage fréquent en génie des procédés
- approximation simple et générique (même si pas de retard physique)
- commande PID ? ... marche mal si $T > \tau$
- prédicteur de Smith ou « GPID »



Retard : autre exemple classique

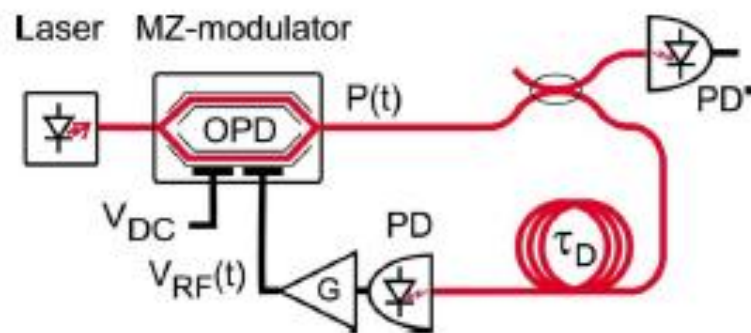
... un grand classique des TP d'automatique (Feedback)



$$\left. \begin{array}{l} T \approx 20.10^{-3} \text{ sec}, \\ \tau \approx 1 \text{ sec}. \end{array} \right\} \text{PID ok}$$

Routes to chaos and multiple time scale dynamics in broadband bandpass nonlinear delay electro-optic oscillators

Michael Peil,¹ Maxime Jacquot,¹ Yanne Kouomou Chembo,¹ Laurent Larger,¹ and Thomas Erneux²



$$\tau x' = -x + f[x(t - \tau_D)]$$

$$\theta^{-1} \int_{t_0}^t x(\eta) d\eta + \tau x' = - \left(1 + \frac{\tau}{\theta} \right) x + f[x(t - \tau_D)].$$

$$\theta \approx 10^3 \tau_D \approx 10^6 \tau.$$

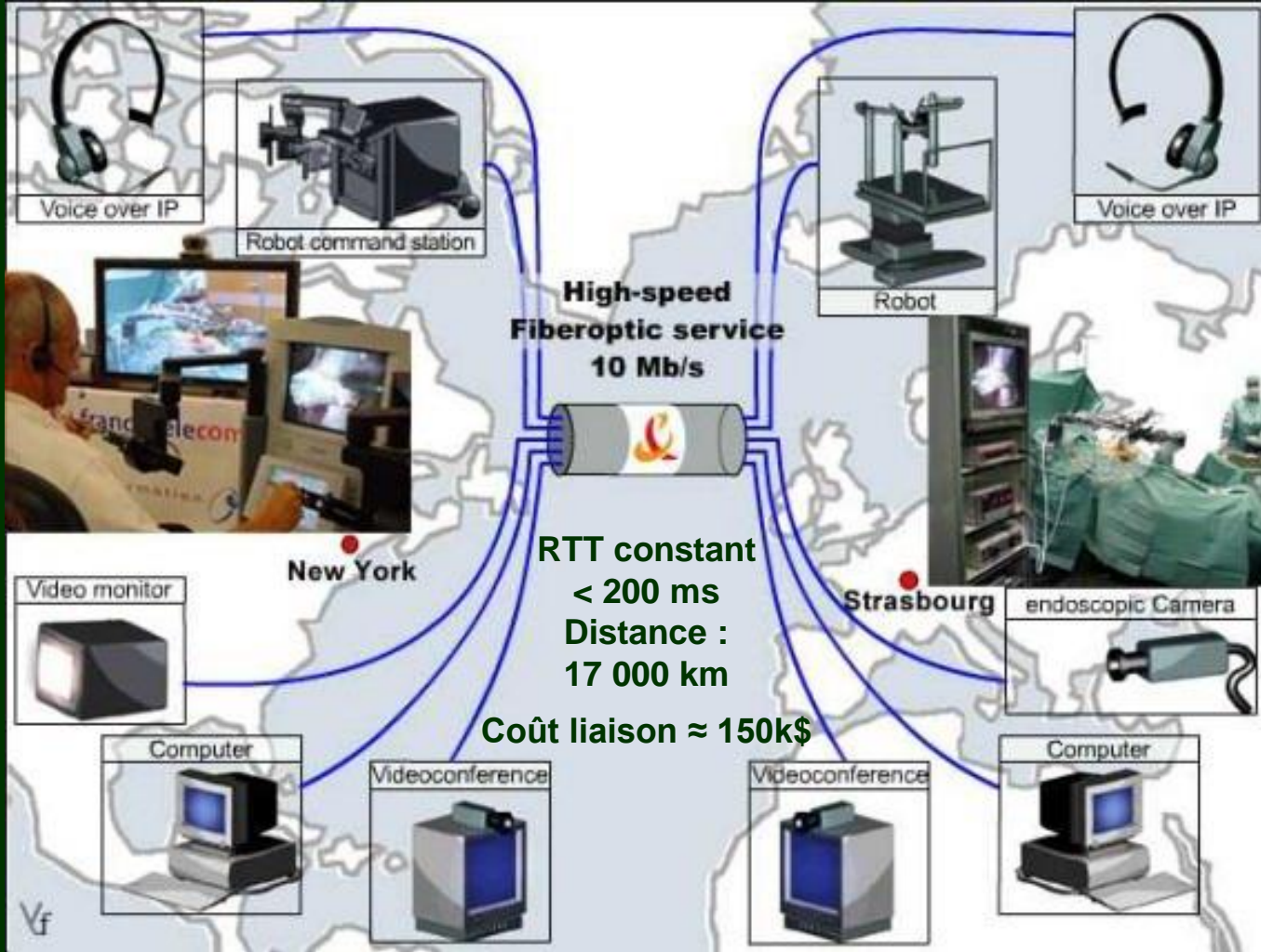
delay τ_D of the order of 100 ns.

FIG. 1. (Color online) Experimental setup of the nonlinear electro-optic delay oscillator.

(a smarter system
with transport
phenomenon)

can be widely adjusted between θ and τ . For short delays, the accessible range is limited by the minimal length of the fibers and electrical connectors required to close the optoelectronic feedback loop. This length corresponds to about one meter or less of optical fiber, leading to a delay of a few nanoseconds or even tenths of nanoseconds. On the other hand, very long delay of several tens of microseconds, corresponding to several kilometers of optical fiber, can be realized owing to the low absorption of modern fibers. In this

NCS (Networked Control Systems) : opération Lindbergh, 07/09/2001



« Le seul frein au développement de la télé chirurgie à grande distance demeure, aujourd'hui encore, son prix. Pour opérer à distance, il faut utiliser une ligne ATM en transcontinental, qu'il faut réserver pour six mois, et qui coûte environ 1 million de dollars. »
Prof. J. Marescaux, Le Monde, 6 janvier 2010

d'autres exemples de NCS...

Monitoring distant



Réduction des câblages



Networked

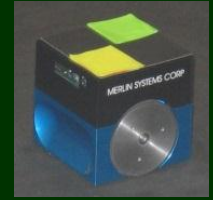


Delay-Free

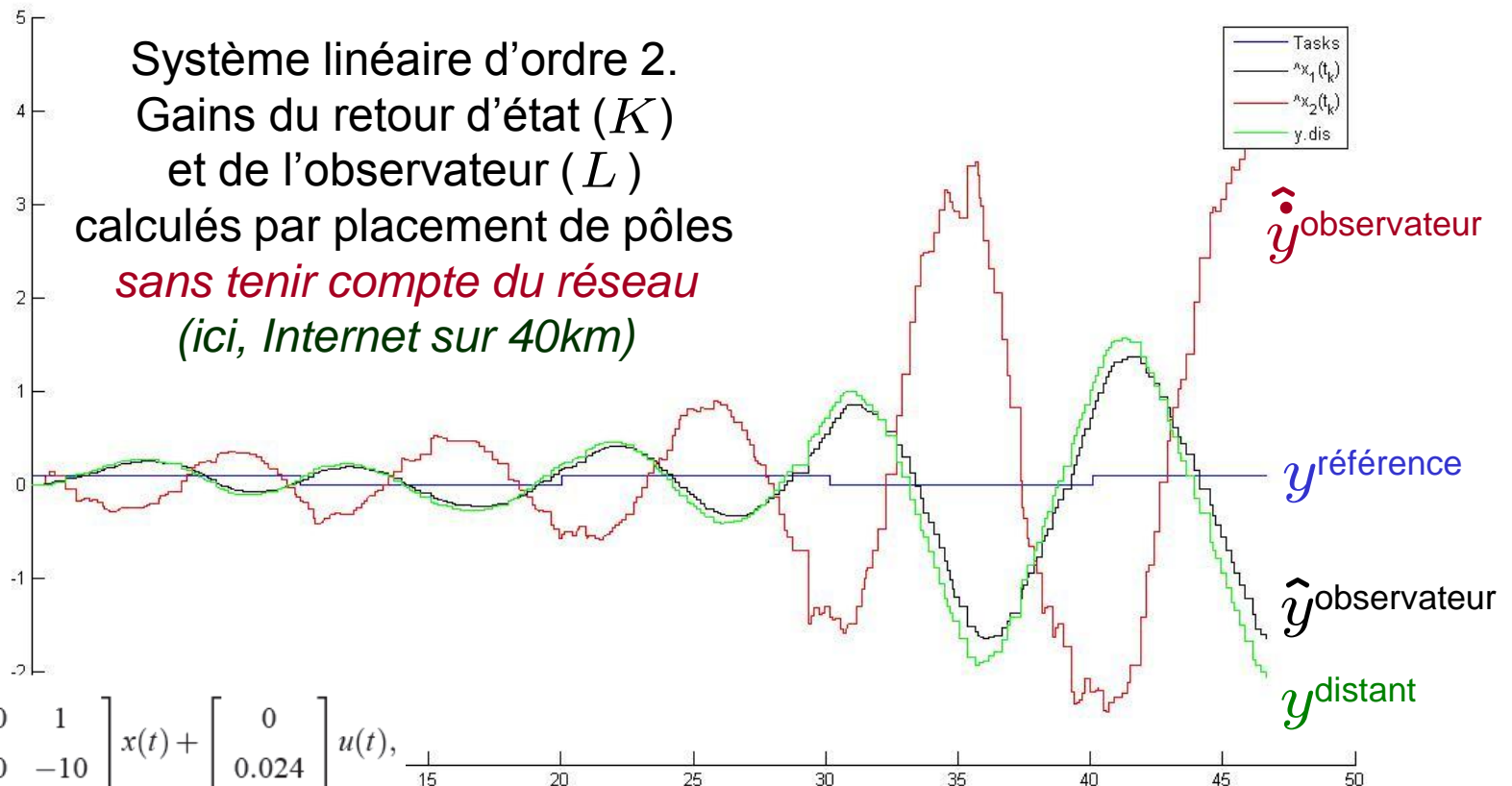
Téléopération bilatérale

Robotique collaborative





expérimentation (avec réseau... négligé)



$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -10 \end{bmatrix} x(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ 0.024 \end{bmatrix} u(t), \\ y(t) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x(t). \end{cases}$$

pôles contrôleur BF = -1 et -15

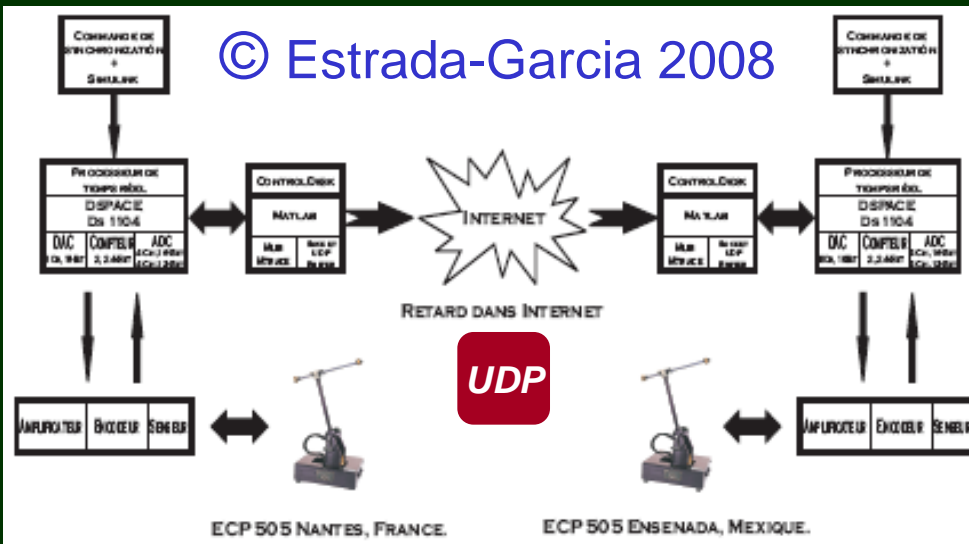
pôles observateur = -2 et -20

$$\Rightarrow K = \begin{bmatrix} -750 & -300 \end{bmatrix} \quad L = \begin{bmatrix} 12 \\ -80 \end{bmatrix}$$

Retard variable vs constant : autre exemple classique

Thèse H.J. Estrada-Garcia 2008 (+Moog, Marquez-Martinez)

© Estrada-Garcia 2008



But : synchronisation d'un pendule esclave (Nantes) sur un pendule maître (Ensenada).

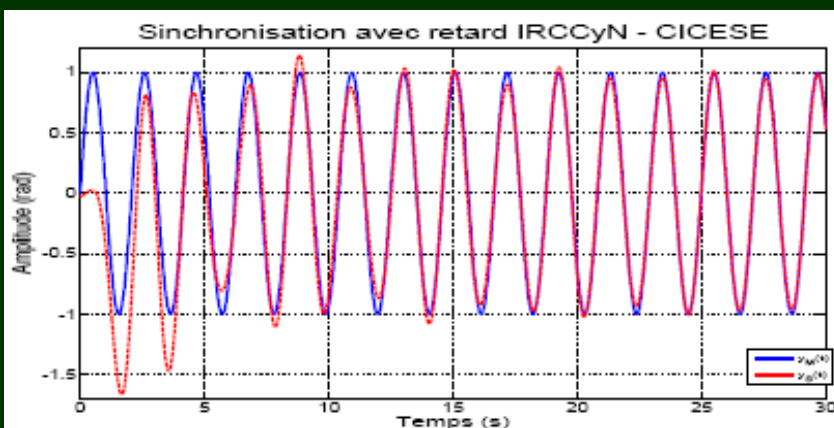
y^{ref} supposée connue par les deux.

Stratégie :

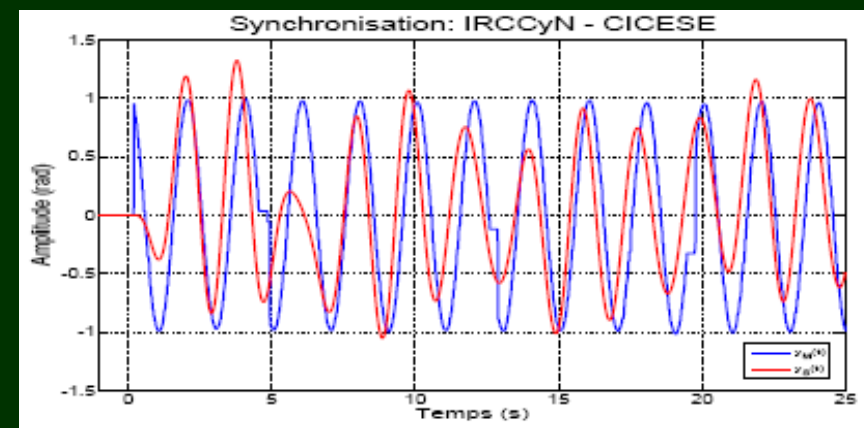
- 1) buffers à 300ms = τ
- 2) commande tq écart m/e régi par :

$$e^{(3)}(t) + a_2 \ddot{e}(t - \tau) + b_2 \dot{e}(t - \tau) + c_2 e(t - \tau) = 0.$$

→ commande causale



Pendule simulé, réseau réel



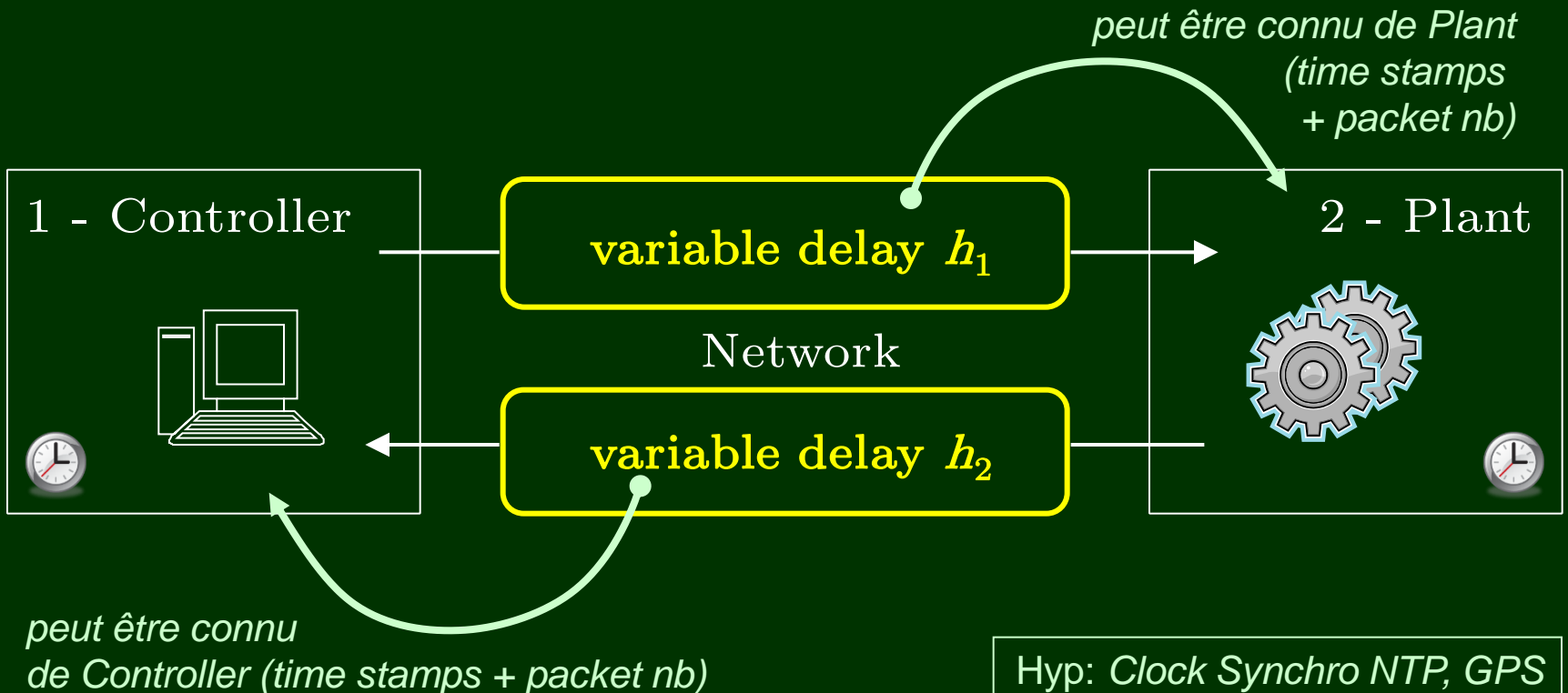
Pendule réel, réseau réel

Plus globalement...

transmission + accès + pertes paquets + échantillonnage...

= *2 retards variables*

connus / inconnus ?



to buff, or not buff?

1^{ère} solution = faire « comme si » constant

- ✓ [Niemeyer & Slotine 98][Huang & Lewis 03][Azorin et al. 03][Fattouh & Sename 03] etc.

2^{ème} solution = rendre le retard constant

- donc le maximiser : $0 \leq h_i(t) \leq h_{max} \Rightarrow h_i(t) = h_{max}$
- grâce à une mémoire tampon (*buffer*) → *time-driven*
- puis application des techniques classiques :
 - ✓ prédictives (Smith) [Lelevé & Fraisse 01]
 - ✓ écart à modèle de réf. retardé [Estrada, Marquez, Moog 07]
 - ✓ etc.

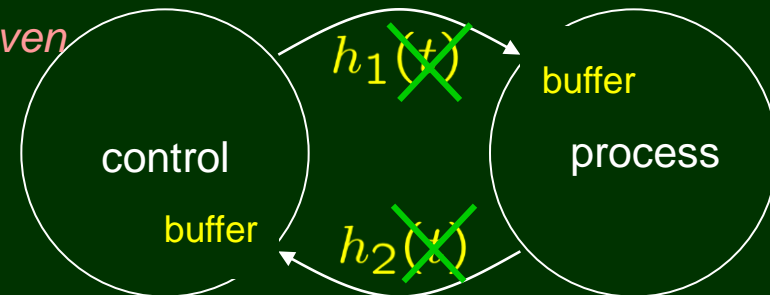
3^e solution (intermédi.) à un seul buffer

[Seuret 06]
[Jiang et.al 08]

4^{ème} solution = garder le retard variable...

- ✓ [Witrant et al. 07] [Seuret&Richard 08] → *event-driven*
[Jiang et al. 09] [Kruszewski et al.11]

Retard de réseau : variable, asymétrique →



et un exemple de la vie quotidienne...

TO BE OR NOT TO BE,
THAT IS THE QUESTION: WHETHER
'TIS NOBLER IN THE MIND TO
SUFFER THE SLINGS AND ARROWS
OF OUTRAGEOUS FORTUNE. OR TO
TAKE ARMS AGAINST A SEA OF
TROUBLES, AND BY OPPOSING,
END THEM? TO DIE: TO SLEEP; NO
MORE; AND BY A SLEEP
TO SAY WE END

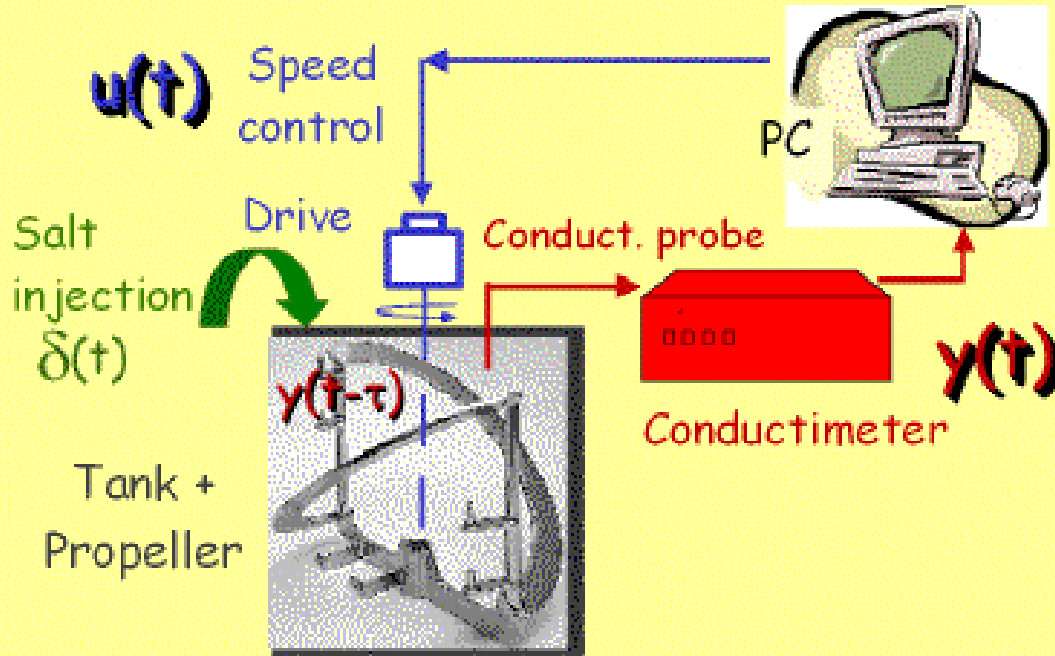
Boucle audio-phonatoire naturelle

Goodies

Mixing tank system (with total recycle)

- Control = delay = $k(\text{motor speed})^{-1}$
- Non flat system

$$T(u(t))\dot{y}(t) = y(t - h(u(t))) - y(t),$$



$y(t)$ with/without ψ saturation

An arrangement of ideal zones with shifting boundaries as a way to model mixing processes in unsteady stirring conditions in agitated vessels

J.-Y. Dieulot^{a,*}, N. Petit^b, P. Rouchon^b, G. Delaplace^c
Chemical Engineering Science 60 (2005) 5544–5554

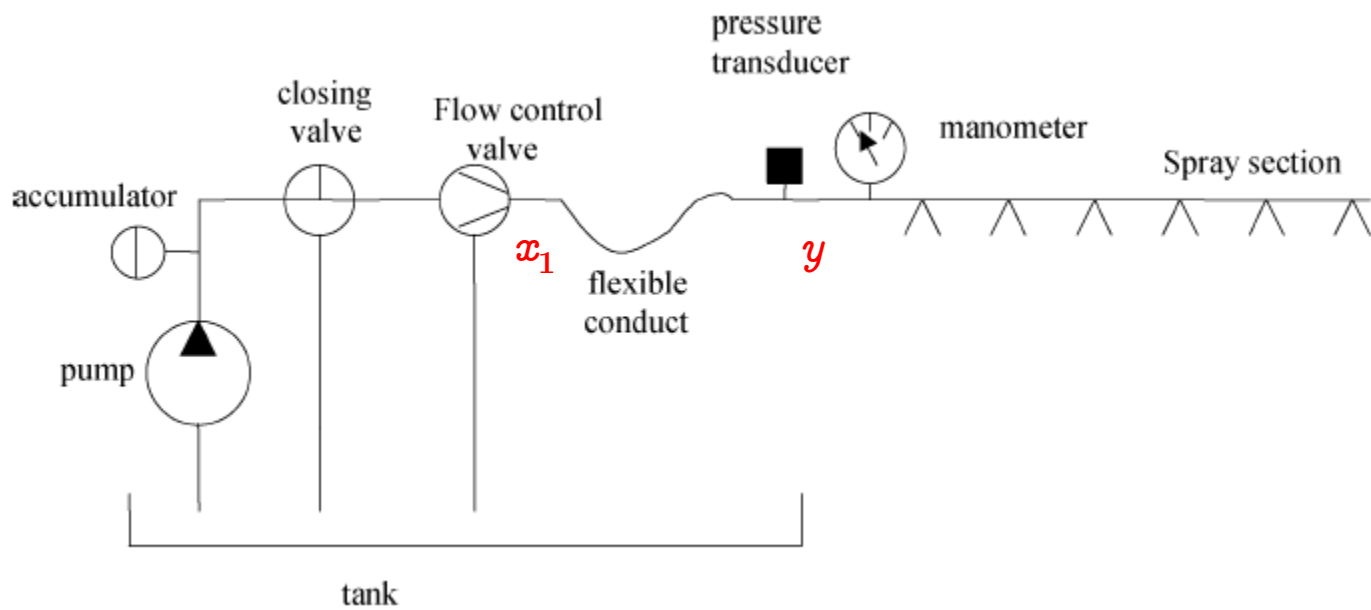
Dieulot, J. Y., & Richard, J. P. (2001). Tracking control of a nonlinear system with input-dependent delay. In *40th IEEE CDC'01 (Conference on decision and control)*, Orlando, FL, December 2001.

Goodies (2)

Design of a Pressure Control System With Dead Band and Time Delay

Jan Anthonis, Alexandre Seuret, Jean-Pierre Richard, and Herman Ramon

IEEE TRANSACTIONS ON CONTROL SYSTEMS TECHNOLOGY, VOL. 15, NO. 6, NOVEMBER 2007

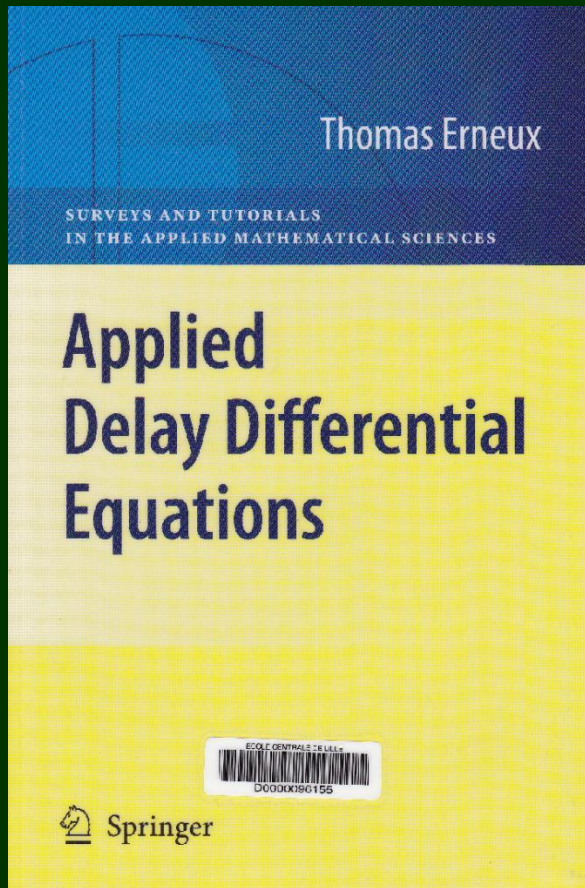


- deadzone (dry friction on angle x_1)
- + delay (measured pressure y)
- + sign functions (control)

Pressure y ruled by the angle x_1

$$\sqrt{y} = \frac{\alpha x_1(t-h) + \beta}{x_1(t-h) + \gamma}, \quad 0 \leq h_{\min} \leq h \leq h_{\max}.$$

Delays : various other examples



250 references taken from

- life sciences
- physics
- technology
- chemistry
- economics

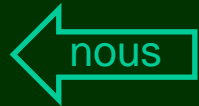
Bon, bref.

- Connaissez-vous dans le monde réel un système *linéaire* ?
- Connaissez-vous dans le monde réel un système *sans retard* ?

mais aussi...

- Connaissez-vous dans le monde réel un système *non réparti* ?

Échelle de complexité croissante





11,758 articles found for: TITLE(delay)

[Edit this search](#) | [Save this search](#) | [Save as search alert](#) | [RSS Feed](#)

Font Size: [A](#) [A](#)

11758 articles

= Full-text available = Abstract only Go to page: of 236 [Go](#) | [Next >](#)

Search within results

[Search](#)

Refine results

[Limit to](#) [Exclude](#)

Content Type

- Journal (11,697)
- Book (101)
- Reference Work (2)

including 101 books

- Journal of Mathematical Analysis and Applicatio... (533)
 - Applied Mathematics and Computation (470)
 - Nonlinear Analysis: Theory, Methods & Applicati... (347)
 - Chaos, Solitons & Fractals (345)
 - Automatica (322)
- [view more](#)

Year

- 2012 (27)
- 2011 (1,013)
- 2010 (856)
- 2009 (1,125)
- 2008 (861)

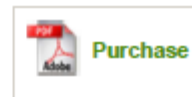
and 1013 in 2011

[Purchase](#) | [Export citations](#) | [Open all previews](#) Sort by: [Relevance](#) | [Date](#)

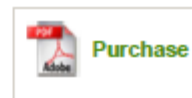
1 **Time-delay systems: an overview of some recent advances and open problems** Original Research Article
Automatica, Volume 39, Issue 10, October 2003, Pages 1667-1694
 Jean-Pierre Richard
[Show preview](#) | [Related articles](#) | [Related reference work articles](#)



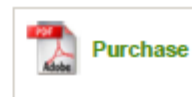
2 **Delay-dependent Stability for Systems with Fast-varying Neutral-type Delays via a PTVD Compensation** Original Research Article
Acta Automatica Sinica, Volume 36, Issue 1, January 2010, Pages 147-152
 Zhen-Wei LIU, Hua-Guang ZHANG
[Show preview](#) | [Related articles](#) | [Related reference work articles](#)



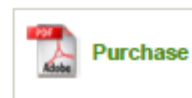
3 **Delays in construction projects: The case of Jordan** Original Research Article
International Journal of Project Management, Volume 26, Issue 6, August 2008, Pages 665-674
 G. Sweis, R. Sweis, A. Abu Hammad, A. Shboul
[Show preview](#) | [Related articles](#) | [Related reference work articles](#)



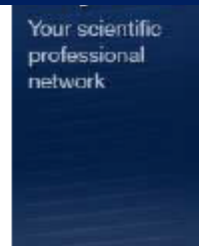
4 **Control of time delay processes with uncertain delays: Time delay stability margins** Original Research Article
Journal of Process Control, Volume 16, Issue 4, April 2006, Pages 403-408
 Mohammad Bozorg, Edward J. Davison
[Show preview](#) | [Related articles](#) | [Related reference work articles](#)



5 **Further results on robust stability of neutral system with mixed time-varying delays and nonlinear perturbations** Original Research Article
Nonlinear Analysis: Real World Applications, Volume 11, Issue 2, April 2010, Pages 895-906

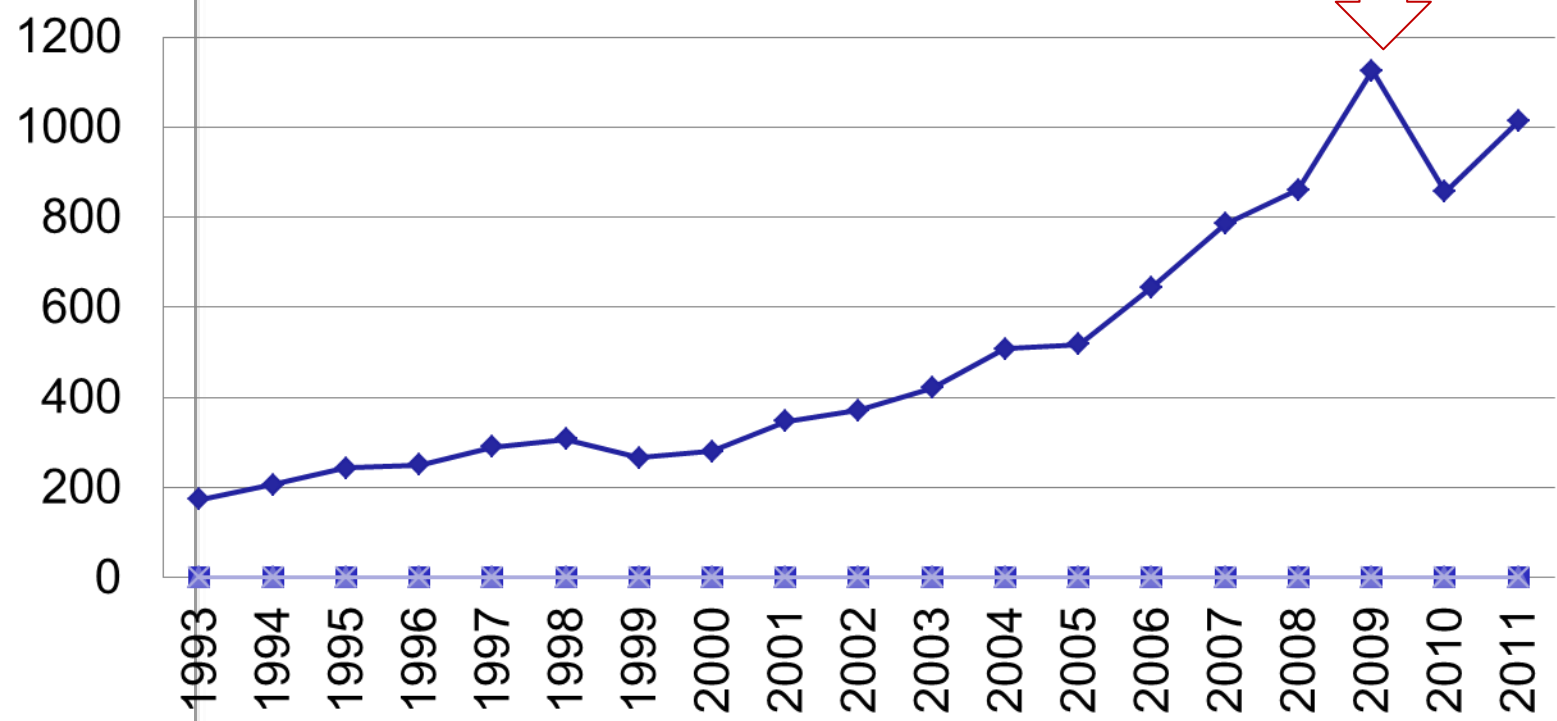


1) an applied topic,
 2) an already old topic [Smith 1959]
 but, also...
 a contemporary research topic



Year
2012 (27)
2011 (1,013)
2010 (856)
2009 (1,125)
2008 (861)
2007 (786)
2006 (845)
2005 (518)
2004 (508)
2003 (422)
2002 (371)
2001 (347)
2000 (281)
1999 (267)
1998 (307)
1997 (290)
1996 (250)
1995 (243)
1994 (207)
1993 (174)
1992 and earlier (2,260)

Evolution (nb. articles p. year since 1993)

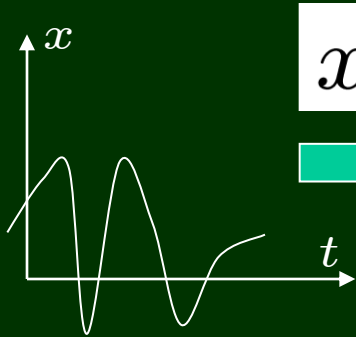


ELSEVIER AUTOMATICA Top 10 Cited (articles published in the last five years) Extracted from Scopus (on Sun Oct 31 20:08:05 GMT 2010)

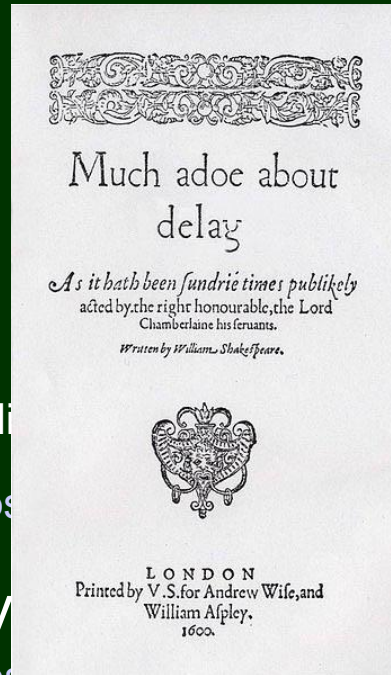
- [Network-based robust \$H^\infty\$ control of systems with uncertainty](#) 325
Volume 41, Issue 6, 2005, Pp 999-1007
Yue, D. | Han, Q.-L. | Lam, J.
- [Delay-range-dependent stability for systems with time-varying delay](#) 212
Volume 43, Issue 2, 2007, Pp 371-376
He, Y. | Wang, Q.-G. | Lin, C. | Wu, M.
- [Delay-dependent stabilization of linear systems with time-varying state and input delays](#) 181
Volume 41, Issue 8, 2005, Pp 1405-1412
Zhang, X.-M. | Wu, M. | She, J.-H. | He, Y.
- [Stabilization of linear systems over networks with bounded packet loss](#) 156
Volume 43, Issue 1, 2007, Pp 80-87
Xiong, J. | Lam, J.
- [Stability and L2-gain analysis for switched delay systems: A delay-dependent method](#) 149
Volume 42, Issue 10, 2006, Pp 1769-1774
Sun, X.-M. | Zhao, J. | Hill, D.J.
- [Bilateral teleoperation: An historical survey](#) 148
Volume 42, Issue 12, 2006, Pp 2035-2057
Hokayem, P.F. | Spong, M.W.
- [A new delay system approach to network-based control](#) 139
Volume 44, Issue 1, 2008, Pp 39-52
Gao, H. | Chen, T. | Lam, J.
- [Absolute stability of time-delay systems with sector-bounded nonlinearity](#) 132
Volume 41, Issue 12, 2005, Pp 2171-2176
Han, Q.-L.
- [Robust integral sliding mode control for uncertain stochastic systems with time-varying delay](#) 112
Volume 41, Issue 5, 2005, Pp 873-880
Niu, Y. | Ho, D.W.C. | Lam, J.

(oct.2010)
9 among the
last 5 years top 10 !

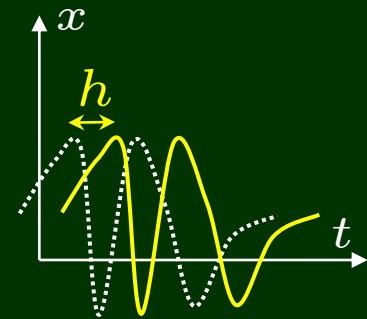
Much a do about delay ?



$x(t)$

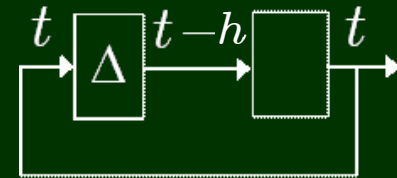


$x(t - h)$



- problème appliqué (bibliothèque de la ville de Paris, Richard 03)
(ingénierie, télécom., temps de propagation, biologie, populations, etc.)

- problème toujours ouvert dans de nombreux cas
(bouclage, retards variables, retards inconnus, identification, etc.)



- problème de dim. infinie «le plus simple»
(équations fonctionnelles = cas particulier des EDP)

- problème à surprises
(dégradation/amélioration par ajout de retard, modèle d'échantillonnage, etc.)

Plan du cours

Particularités des SàR

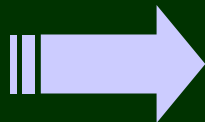
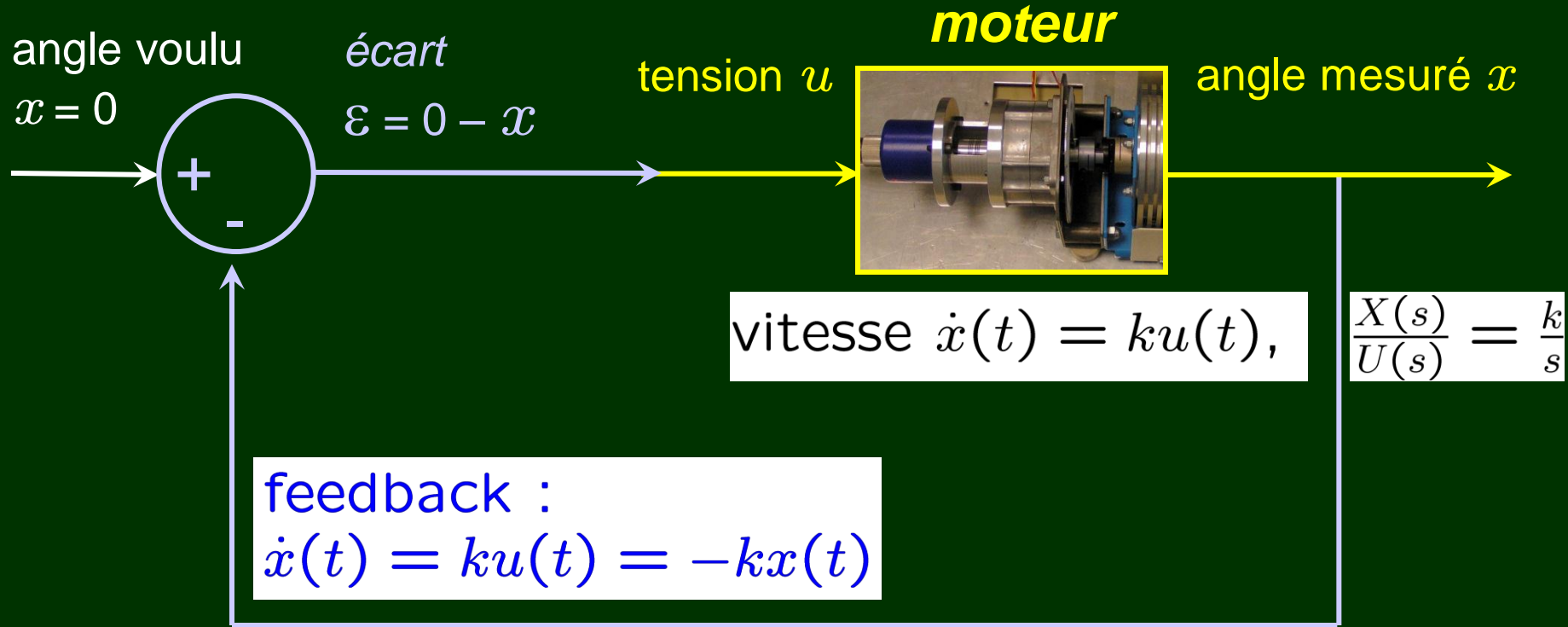
- motivations
- 1^{er} exemple (télé-op.) → notions de base (stabilité, état, dimension infinie)
- 2^{ème} exemple : retard variable → contre-exemple
- 3^{ème} exemple : échantillonnage asynchrone → intérêt
- 4^{ème} exemple : **Networked Control System** (maître-esclave *via* réseau)

Généralités mathématiques

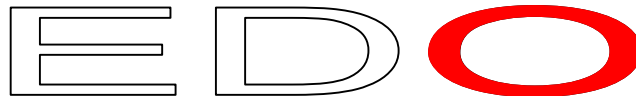
- classification (et exemples 5, 6, 7...)
- problème de Cauchy
- stabilité
- formalismes (modèles)
- commande (et commandabilité)
- petite bibliographie

Particularités

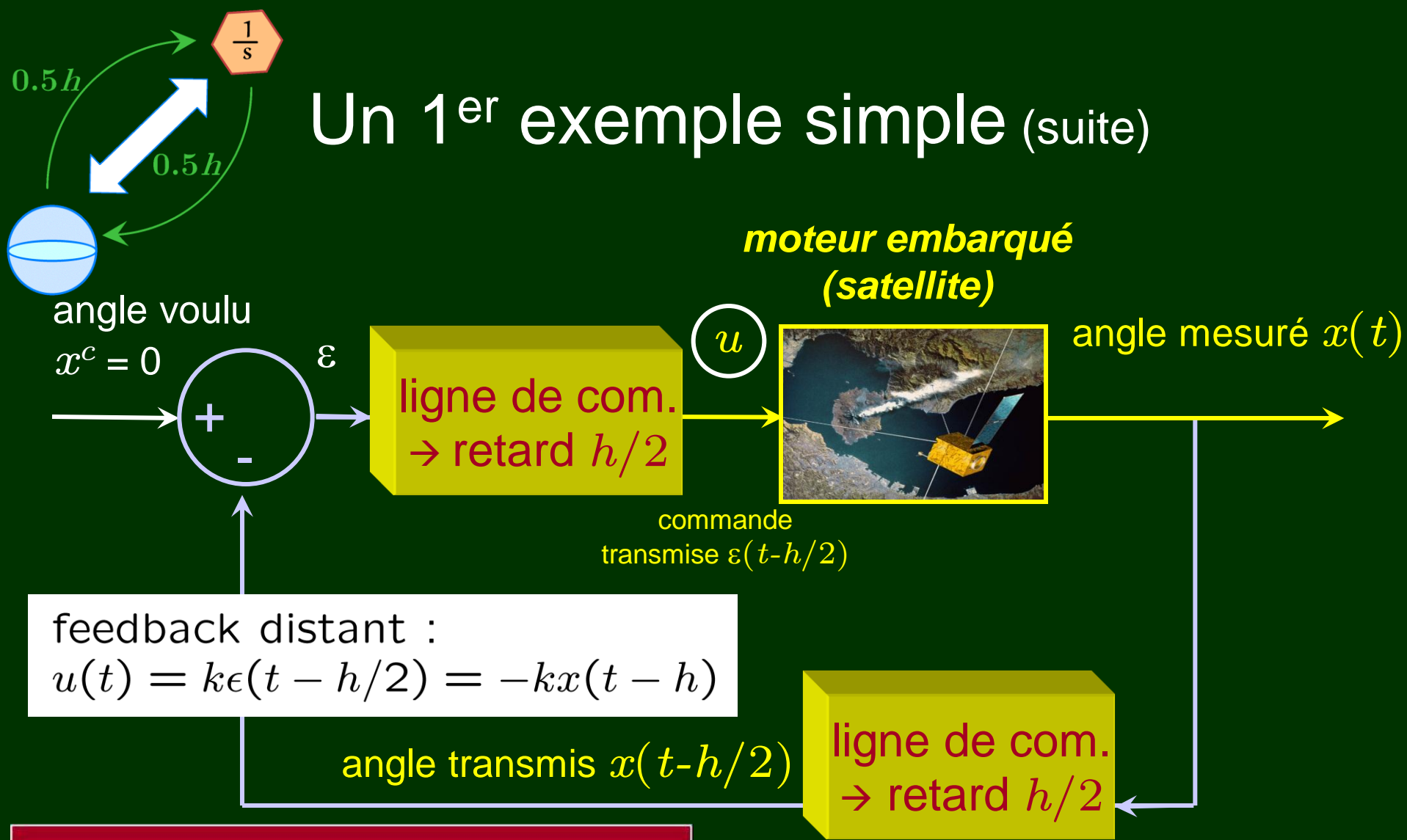
Un 1^{er} exemple simple



$$\dot{x}(t) + kx(t) = 0$$



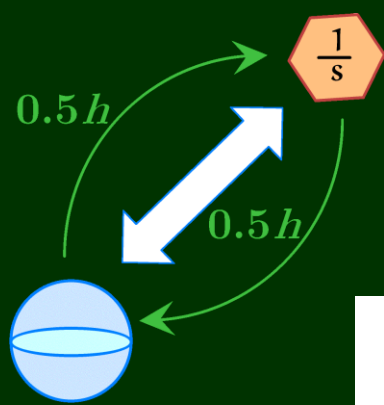
Un 1^{er} exemple simple (suite)



Paris-LA	$h/2 \approx 50 \cdot 10^{-3} \text{sec}$	$(15 \cdot 10^6 \text{m})$
♁ - ☾	$h/2 \approx 1.28 \text{sec}$	$(0.4 \cdot 10^9 \text{m})$
♁ - ♂	$h/2 \approx 260 \text{ à } 1260 \text{ sec...}$	

$$\dot{x}(t) + kx(t-h) = 0$$

EE F



Un 1^{er} exemple simple (suite)

$$\dot{x}(t) + x(t - h) = 0$$

(cas $h = 1, k = 1$)

$$\dot{x}(t) = -x(t - 1)$$

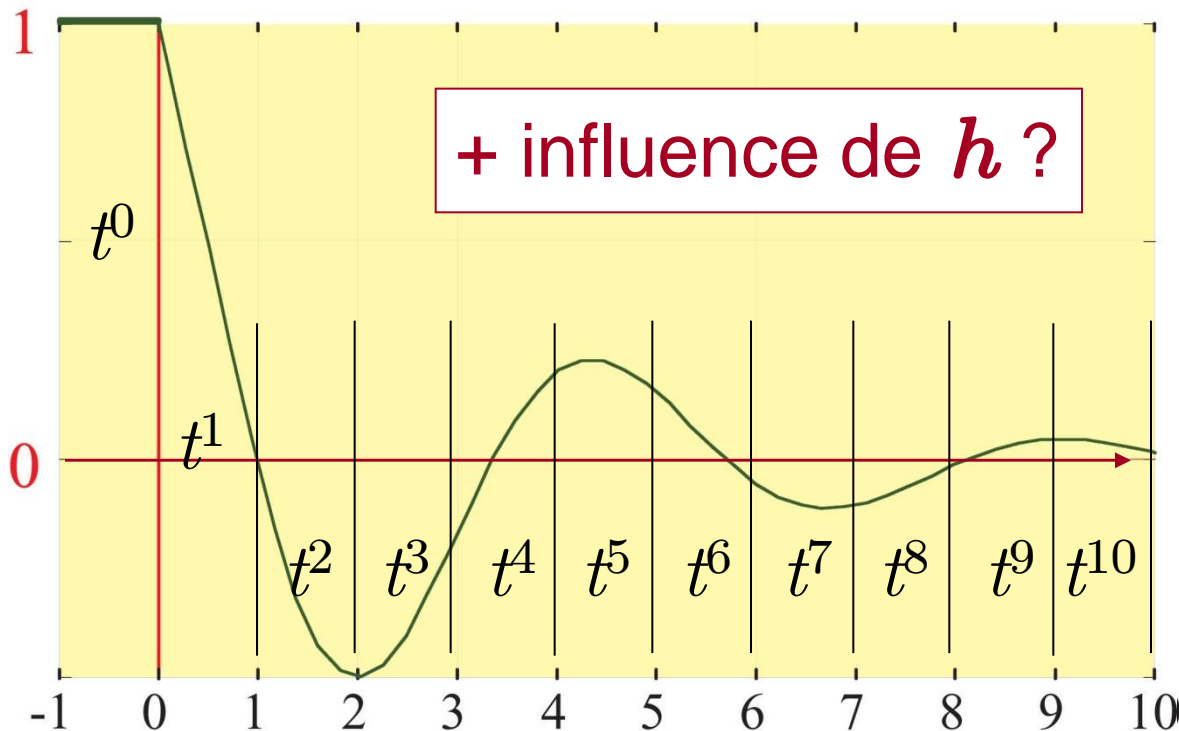
C.I. $t = 0 : x(t = 0) = 1$??

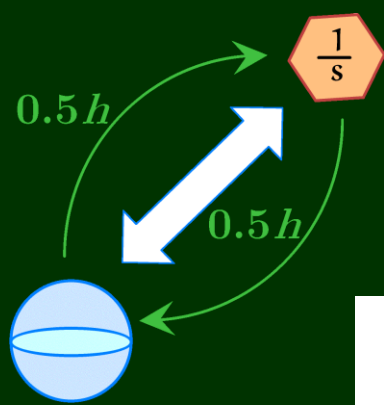
$t \in [-1, 0] : x(t) = 1$ (C.I.)

$t \in [0, 1] : x(t) = 1 - t,$

$t \in [1, 2] : x(t) = \frac{1}{2} - t + \frac{t^2}{2},$

etc.





Un 1^{er} exemple simple (suite)

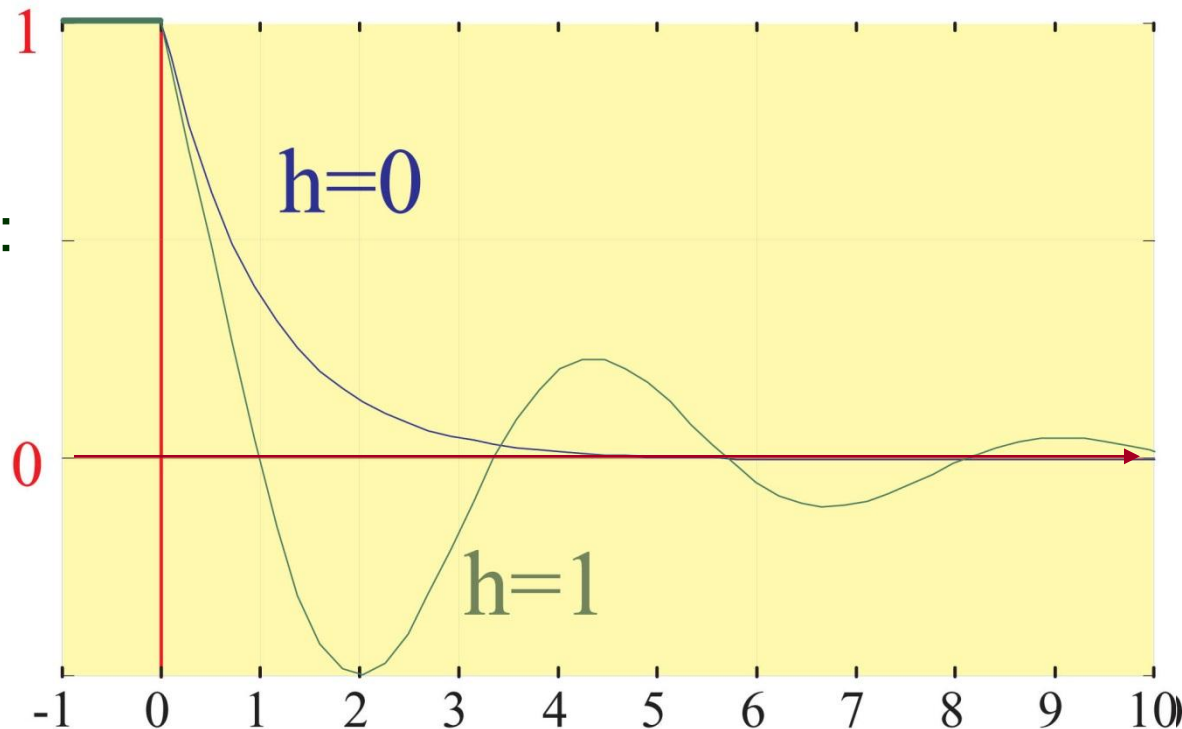
$$\dot{x}(t) + x(t - h) = 0$$

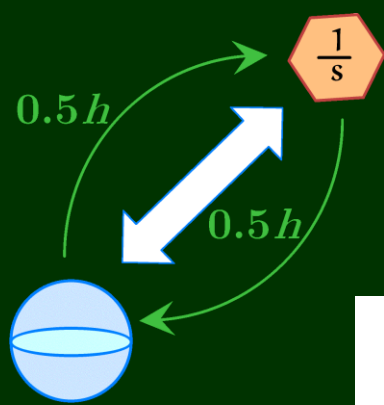
selon h ?

$$\dot{x}(t) + x(t - 1) = 0$$

à comparer avec ($h=0$) :

$$\dot{x}(t) + x(t) = 0$$





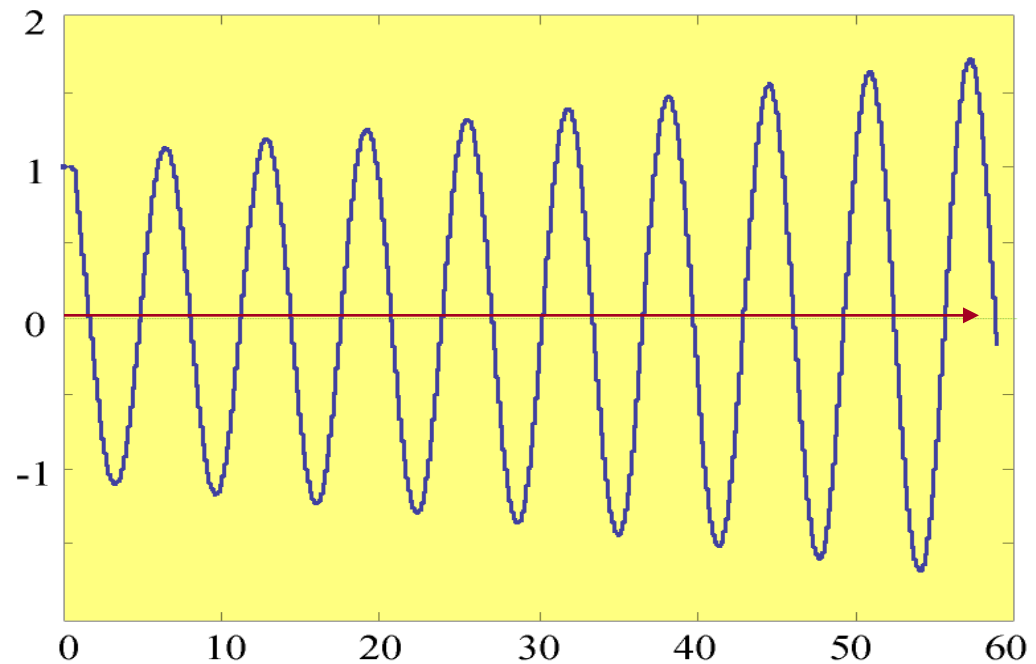
Un 1^{er} exemple simple (suite)

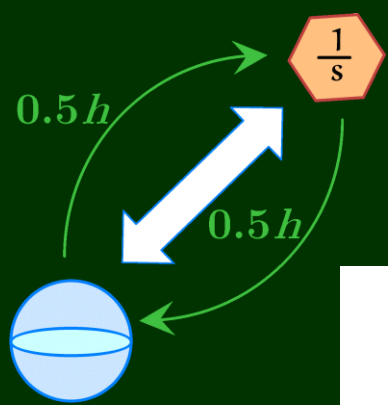
$$\dot{x}(t) + x(t - h) = 0$$

$$h = 1.6$$

$$\dot{x}(t) + x(t - 1.6) = 0$$

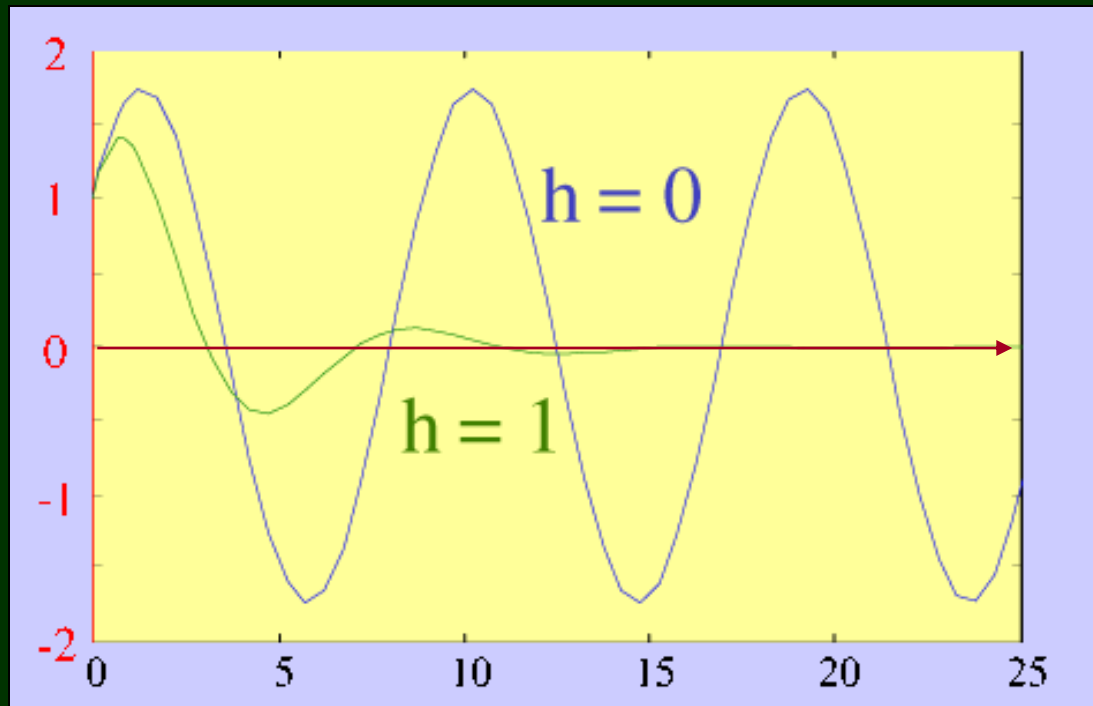
$t \in [-1, 0] : x(t) = 1$ (même C.I.)





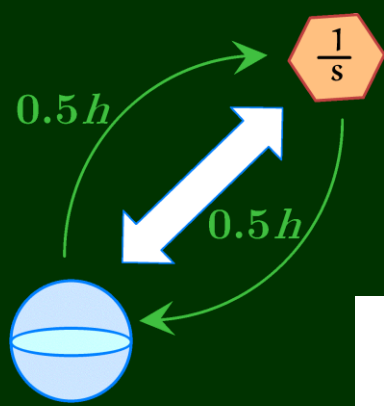
(parenthèse...)

$$\ddot{y}(t) + y(t) - \frac{1}{2}y(t - h) = 0$$



le retard peut aussi avoir un effet stabilisant

ici, effet de dérivée : $y(t - h) \approx y(t) - h\dot{y}(t)$



Retour au 1^{er} exemple simple...

$$\dot{x}(t) + x(t - h) = 0$$

$$h = \frac{\pi}{2}$$

$$\dot{x}(t) + x\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

$$\frac{d}{dt}x(t) = -x\left(t - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

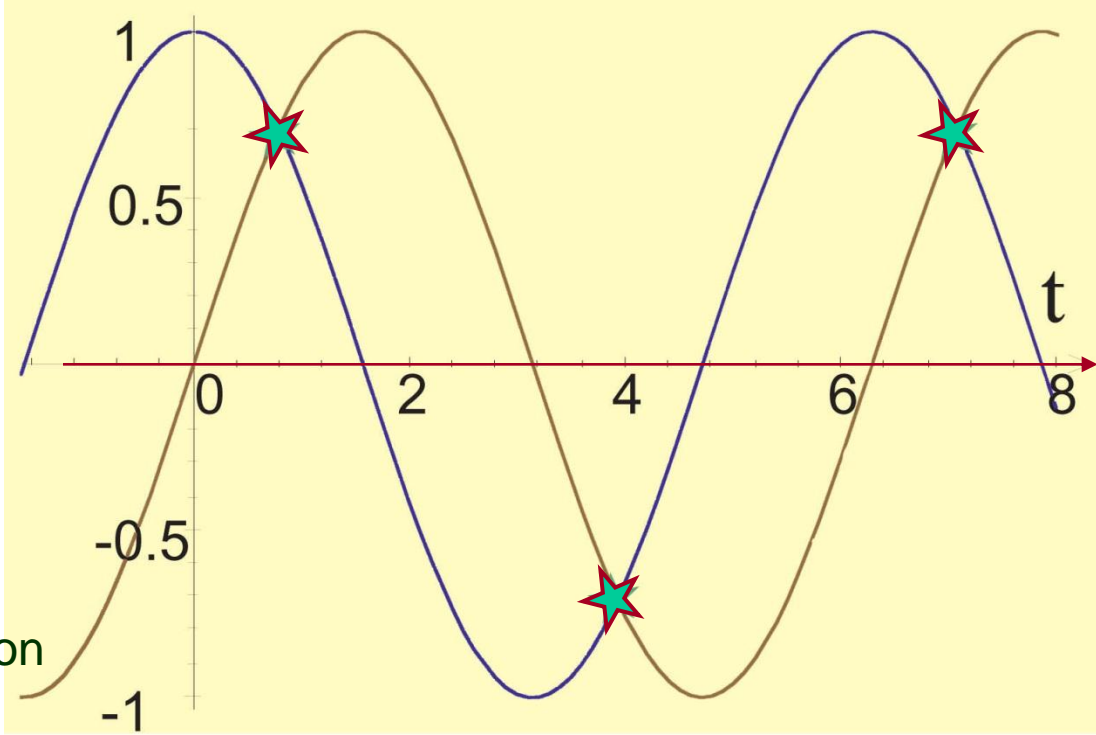
$$x(t) = \cos t,$$

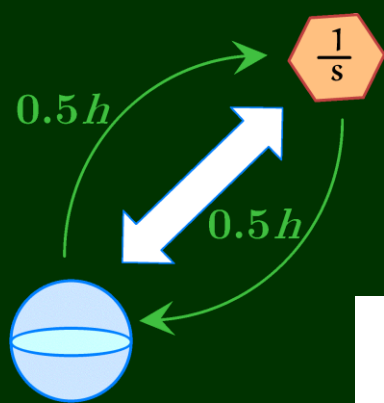
$$x(t) = \sin t,$$

...

→ notion d'« état » ?

variable $\mathbf{X}(t)$ générant une solution unique à partir de l'instant t





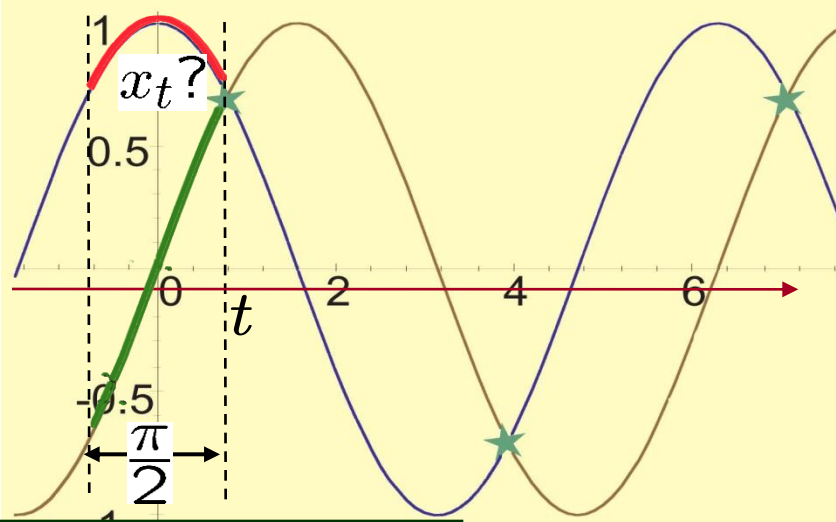
Un 1^{er} exemple simple (suite)

$$\dot{x}(t) + x(t - h) = 0$$

$$h = \frac{\pi}{2}$$

(notation de Shimanov, 1960)

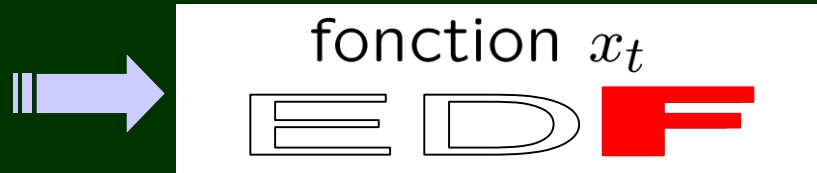
$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(x_t, t, u_t), & t &\geq t_0, \\ x_t(\theta) &= x(t + \theta), & -h &\leq \theta \leq 0, \\ u_t(\theta) &= u(t + \theta), & -h &\leq \theta \leq 0, \\ x(\theta) &= \varphi(\theta), & t_0 - h &\leq \theta \leq t_0, \end{aligned}$$



→ notion d' « **état** » ?

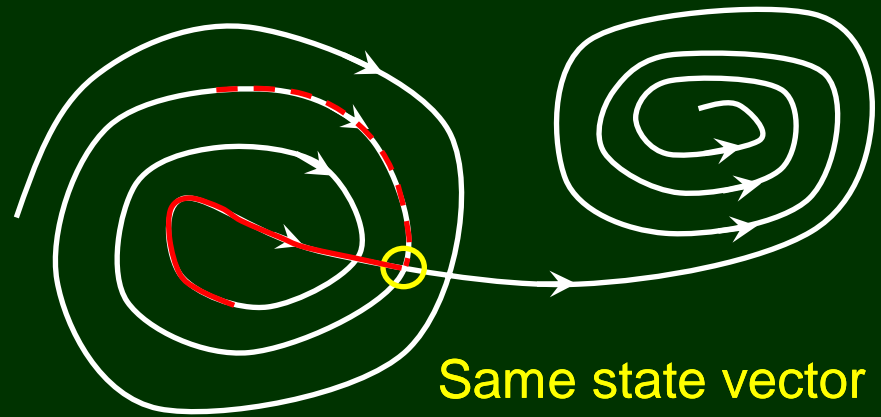
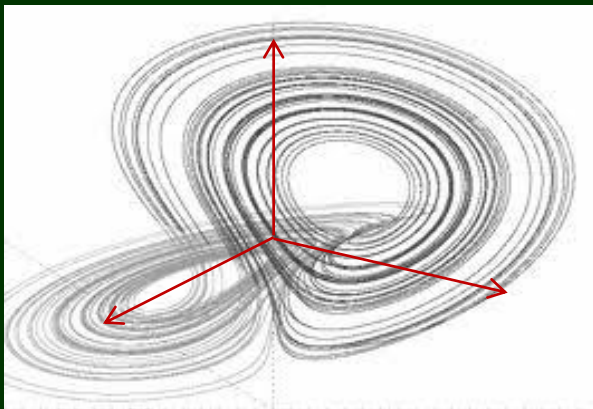
variable $X(t)$ générant une solution unique à partir de l'instant t

fonction $x_t = \text{état}$ à l'instant t
 vecteur $x(t) = x_t(0)$ solution à t



(parenthèse 2...) une remarque sur l'état et le chaos

- ODEs: no chaos for differential order < 3
- FDEs: possible for n=2...or less?



Same state vector
Different state functions

$$\dot{x}(t) = -\sin x(t - \tau)$$

$$\dot{x}_0 = \sin x_N,$$

$$\dot{x}_i = N(x_{i-1} - x_i)/\tau,$$

$$\text{where } 1 \leq i \leq N \rightarrow \infty.$$



more than
simulation

Available online at www.sciencedirect.com



Physics Letters A 366 (2007) 397–402

PHYSICS LETTERS A

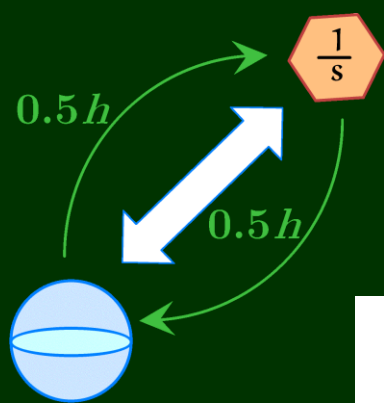
www.elsevier.com/locate/pla

A simple chaotic delay differential equation

J.C. Sprott*

Department of Physics, University of Wisconsin–Madison, Madison, WI 53706, USA

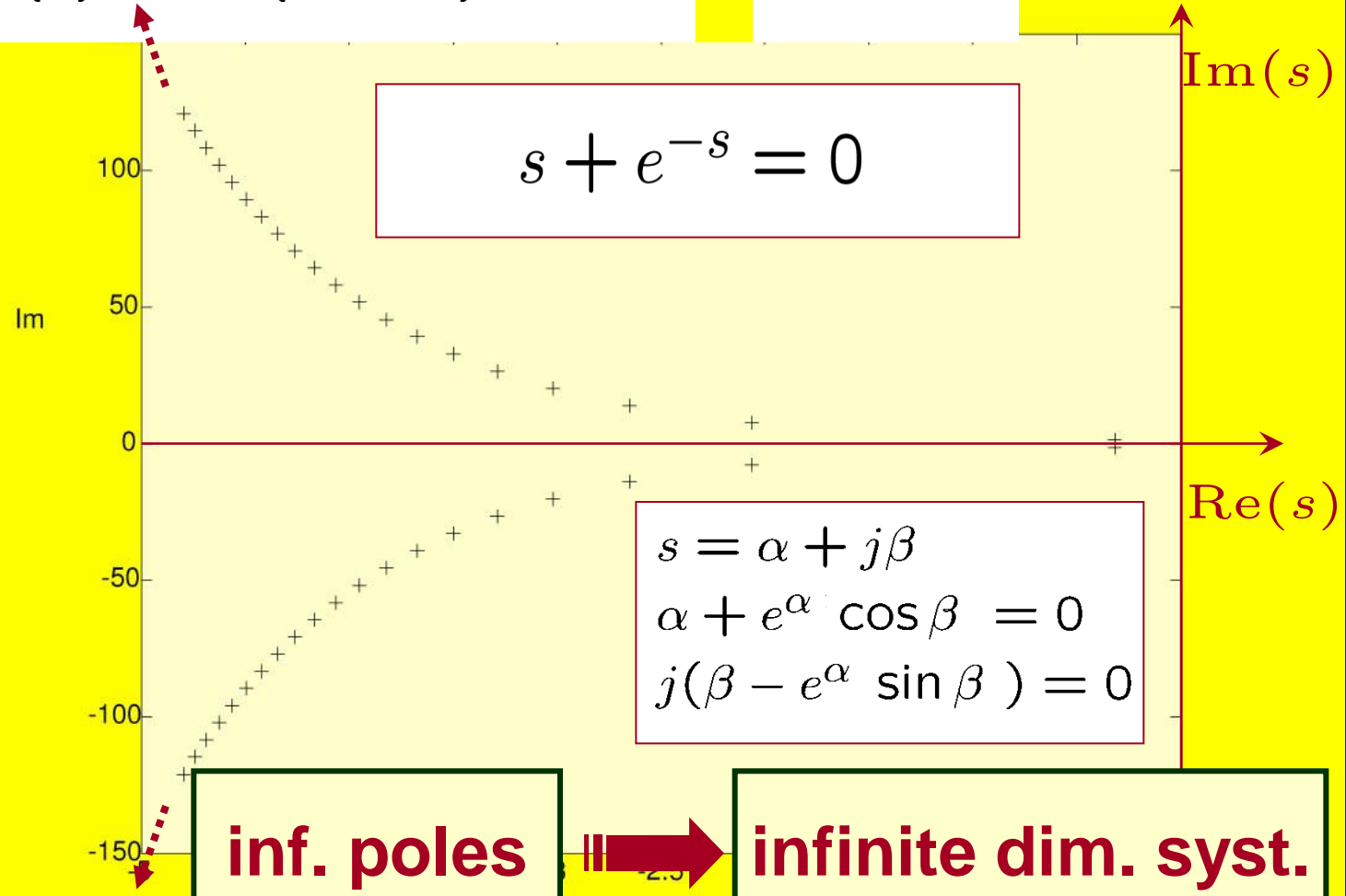
Simple example (cont'd)



$$\dot{x}(t) + x(t - h) = 0$$

$$h = 1$$

poles?



$$s + e^{-s} = 0$$

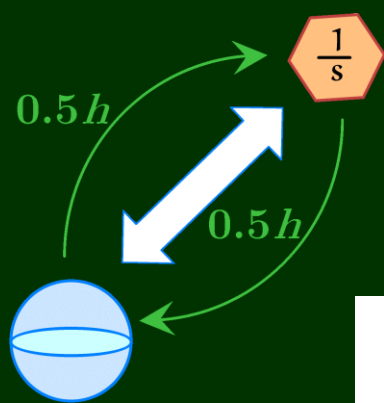
$$s = \alpha + j\beta$$

$$\alpha + e^{\alpha} \cos \beta = 0$$

$$j(\beta - e^{\alpha} \sin \beta) = 0$$

inf. poles

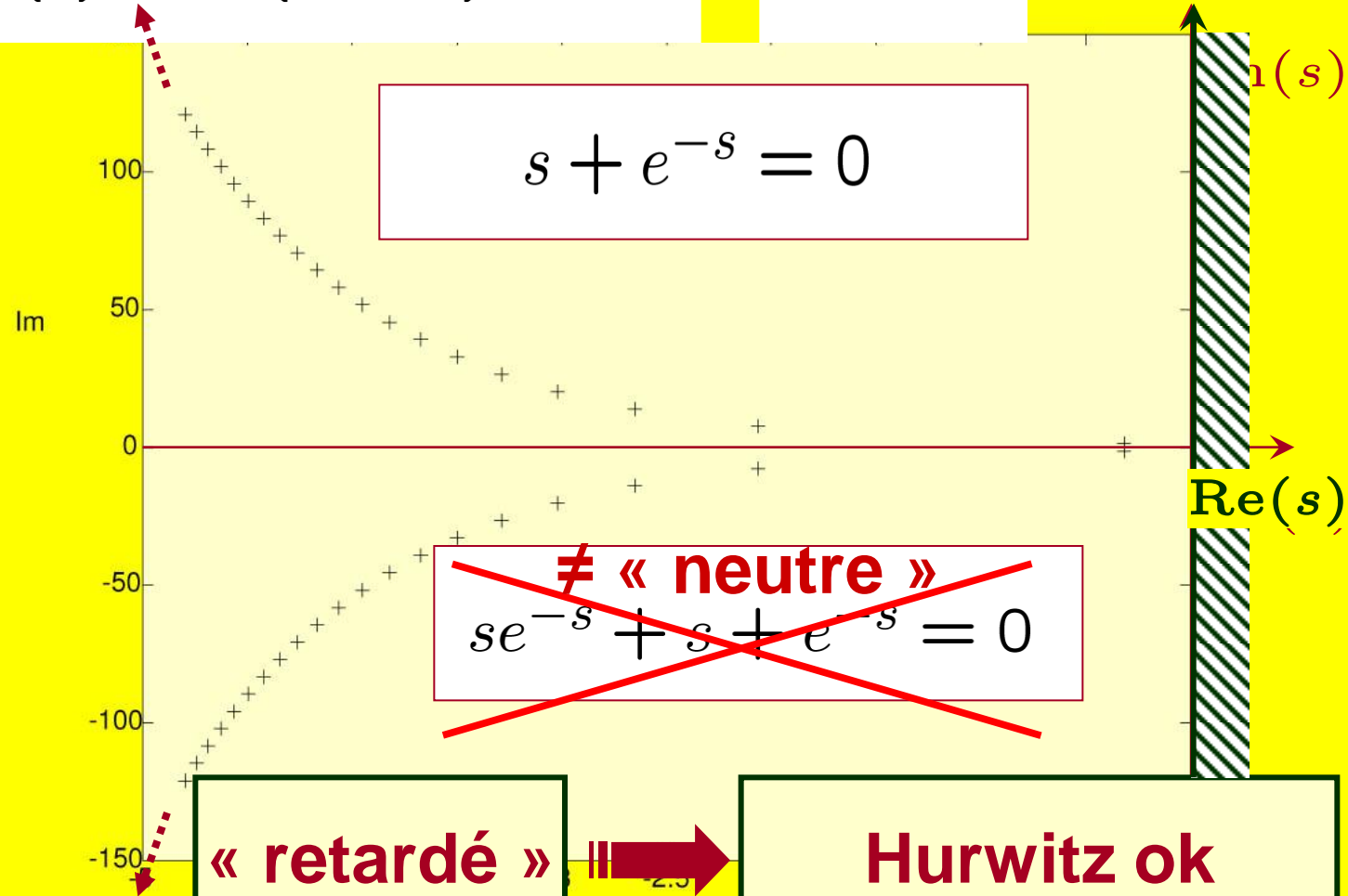
infinite dim. syst.



Un 1^{er} exemple simple (suite)

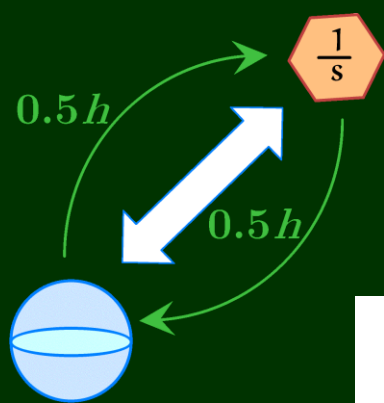
$$\dot{x}(t) + x(t - h) = 0 \quad h = 1$$

critère
de
stabilité
?



« retardé »

Hurwitz ok



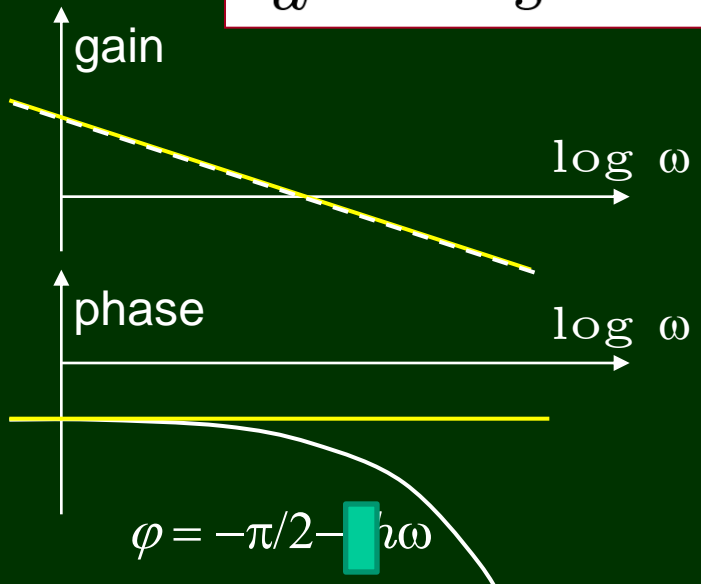
Un 1^{er} exemple simple (suite)

$$\dot{x}(t) + x(t - h) = 0$$

$$\frac{x}{u} = \frac{e^{-hs}}{s} \text{ (BO)}$$

comportement fréquentiel ?
(Bode, boucle ouv.)

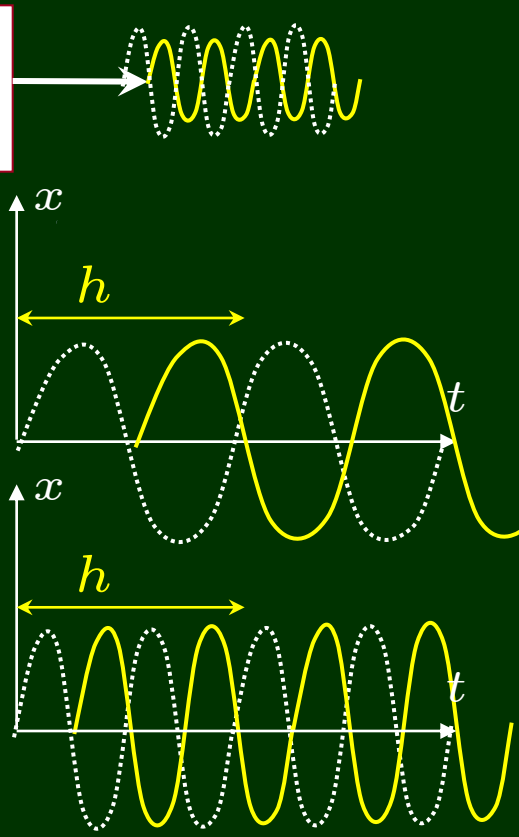
déphasage $\rightarrow \infty$

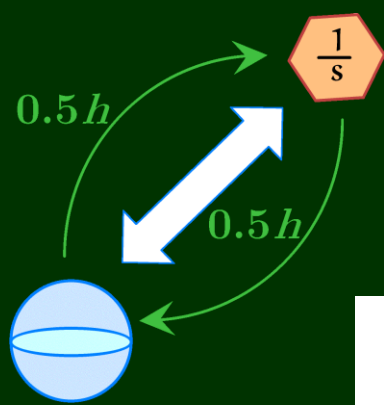


phase $-\infty$



dim. infinie...





Un 1^{er} exemple simple (fin!)

$$\dot{x}(t) + x(t - h) = 0$$

Résumons-nous...

retard \Rightarrow forte influence sur la stabilité
 état fonctionnel
 nombre de pôles infini (Hurwitz OK, Routh non)
 déphasage important ($\rightarrow -\infty$)

et, jusqu'ici, c'était assez simple

retard constant
 système linéaire « 1^{er} ordre »

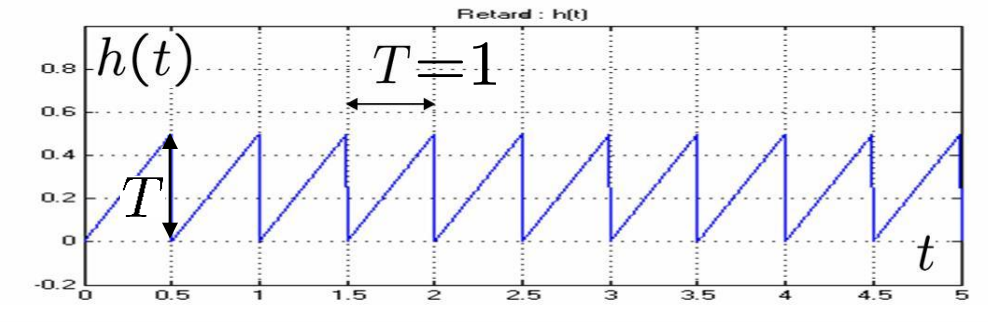
pareil pour retards variables $h(t)$?

un contre-exemple...

2^{ème} (contre-)exemple à retard variable

$$\dot{x}(t) = -ax(t) - bx(t - h(t)) \quad (1)$$

$$h(t) = t - kT \text{ pour } kT < t \leq (k + 1)T$$

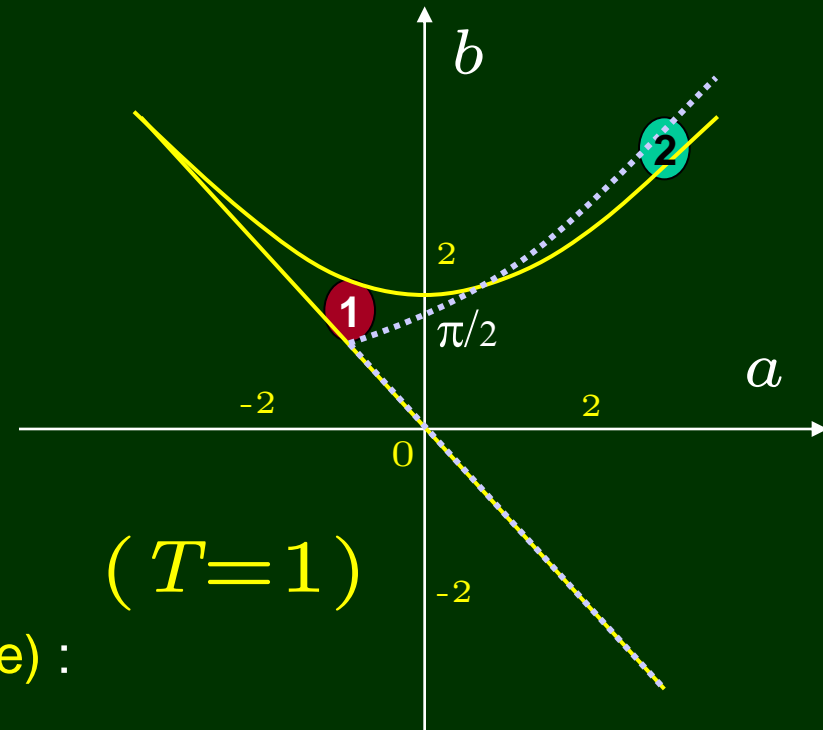


est asymptotiquement stable ssi (zone jaune) :

$$\left| \left(1 + \frac{b}{a}\right)e^{-aT} - \frac{b}{a} \right| < 1 \quad \text{si } a \neq 0$$

$$|1 - bT| < 1 \quad \text{si } a = 0$$

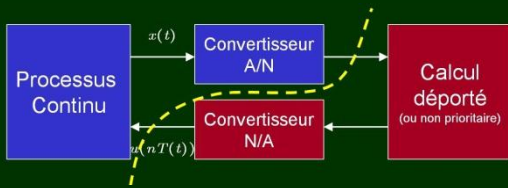
et, pour $h = \text{cste} \in [0,1]$ ssi (zone grise)



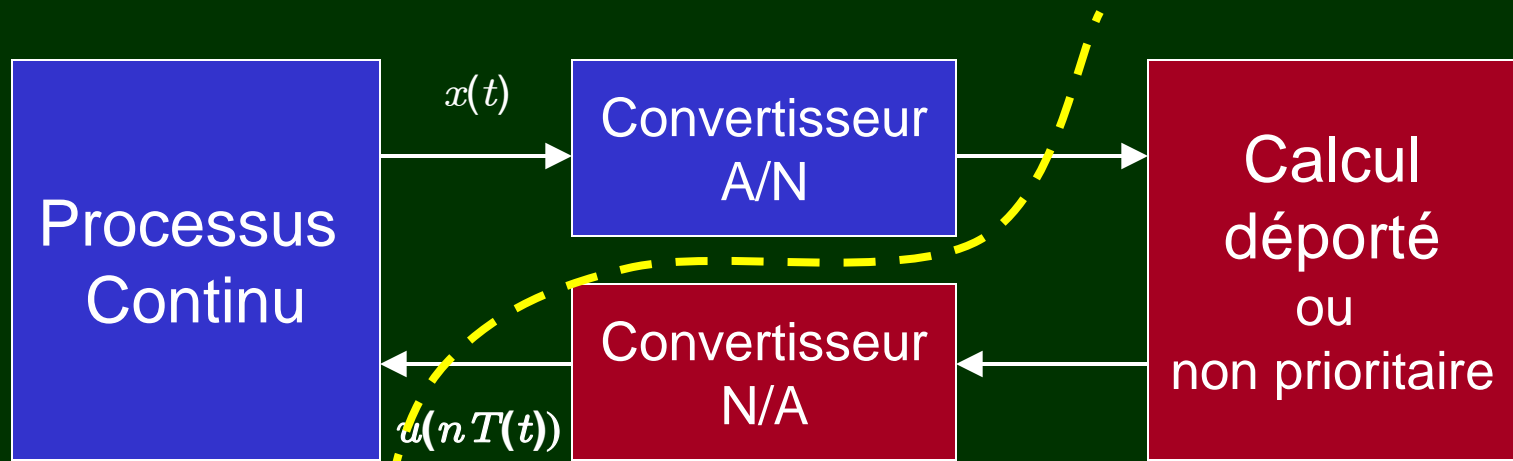
($T=1$)

- 1 stable $h(t) < 1$ - instable $h = \text{cte} < 1$
- 2 instable $h(t) < 1$ - stable $h = \text{cte} < 1$

OK, mais ce type de $h(t)$ est-il réaliste ? un autre exemple...

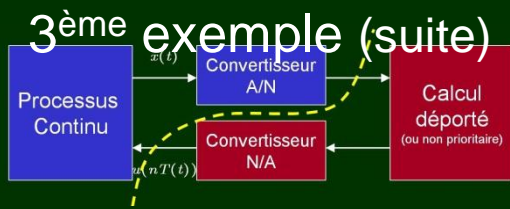


3^{ème} exemple : échantillonnage apériodique



ligne de transmission,
ordonnancement de tâches...
transformée en z , tout va bien, etc.

$$u(t) = g(x(nT(t)))$$



Position du problème

Stabilisation d'un système *via* une commande de la forme :

$$u(t) = u_d(t_k), \quad t \in [t_k, t_{k+1}]$$

où (t_k) est une suite strictement croissante : en général,

$$t_k \neq kT$$

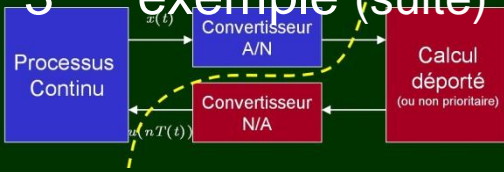
Types de systèmes considérés

Linéaires : $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu_d(t_k)$

Linéaires saturés : $\dot{x}(t) = Ax(t) + B \text{ sat}[u_d(t_k)]$

Retour d'état (+simple) : $u = Kx(t)$

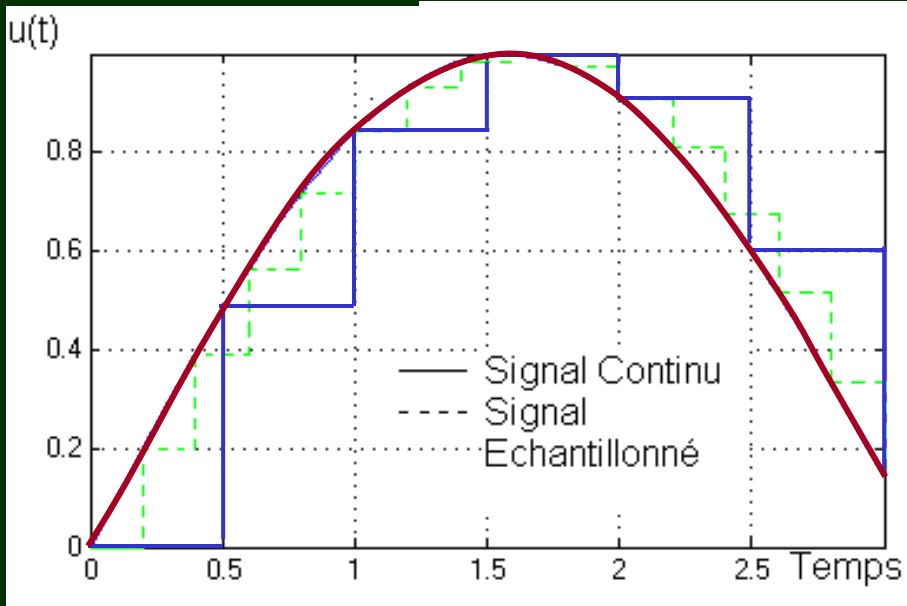
3ème exemple (suite)



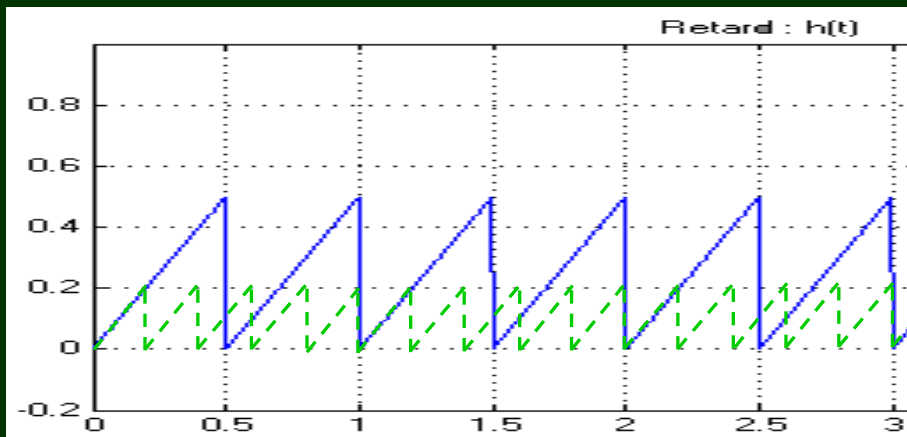
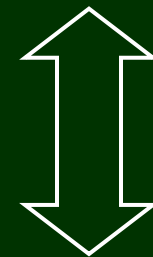
Une idée intéressante...

Mikheev et al. 88, Sobolev et al. 89. Aström et al. 92

Fridman, Seuret, Richard - *Automatica* 2004

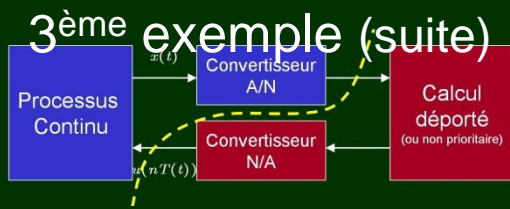


Signal échantillonné bloqué (ici, à période constante)

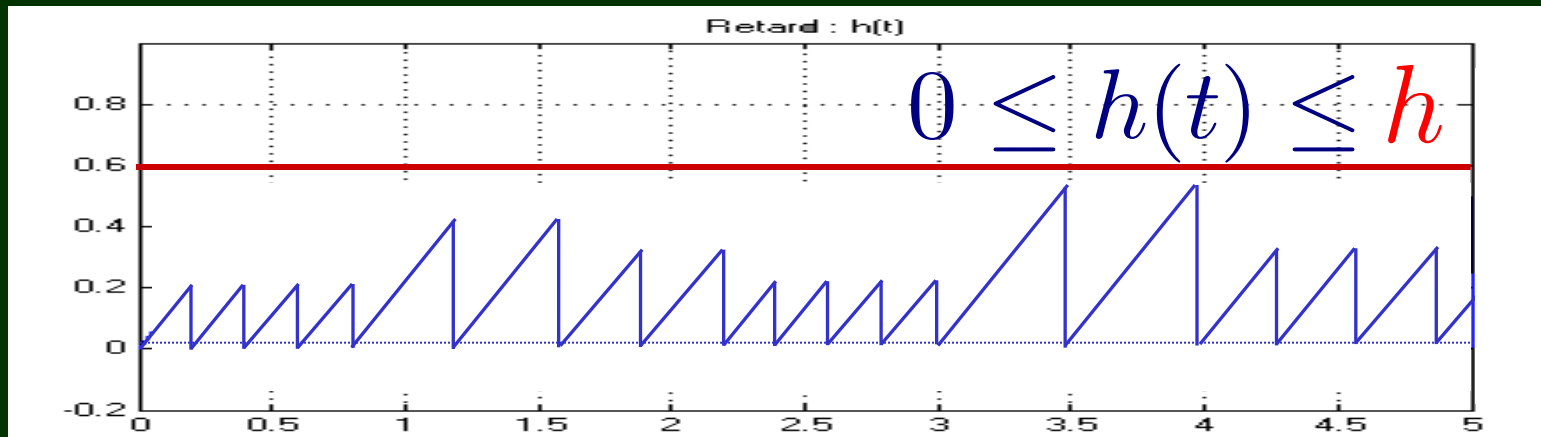


Signal retardé par $h(t)$ variable

$$u(t) = u_d(t_k) = u_d(t - [t - t_k]) = u(t - h(t))$$

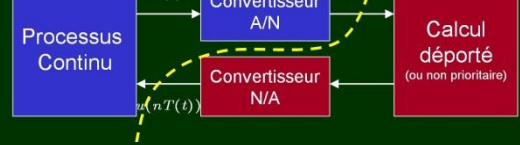


Re-formulation du problème



- influence de la période *maxi* d'échantillonnage h
- application du critère de E. Fridman $\dot{h}(t) \leq 1$

3ème exemple (suite)

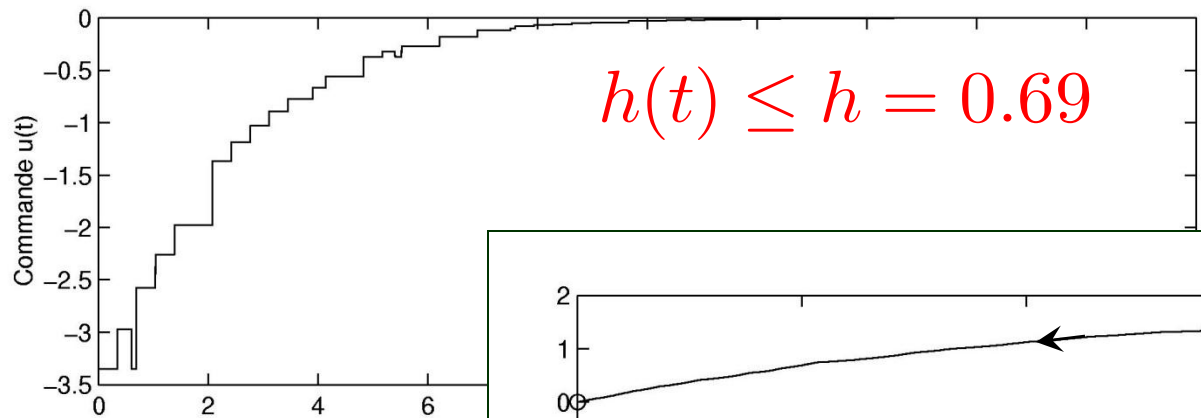


Cas 1 :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0,5 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

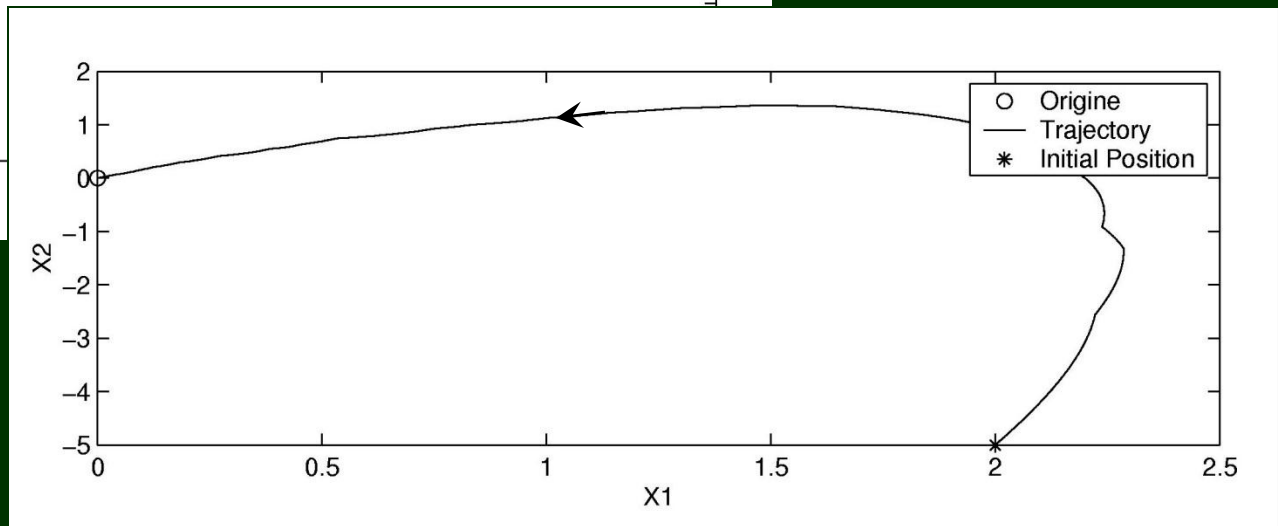
instable \rightarrow glob. asympt. stable

Le théorème montre que ce système est stabilisable par un retour d'état échantillonné dont la période maximale est inférieure à 0.69. Aussi pour $h = 0.69$ la matrice K du retour d'état est égale à $\begin{bmatrix} -1.043 & 0.2511 \end{bmatrix}$ pour $\epsilon = 0.34$. En simulation le système est stabilisé pour toute valeur de h inférieure à 0.7.

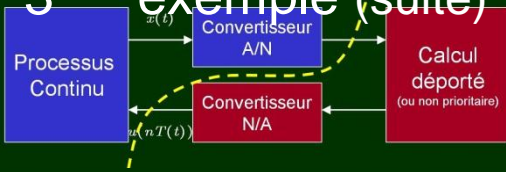


$$h(t) \leq h = 0.69$$

valeur limite en simu ($T=cte$) : 0.7



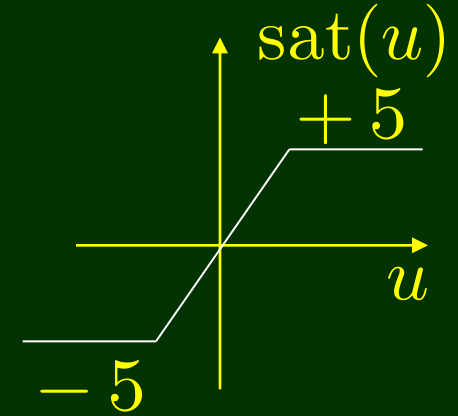
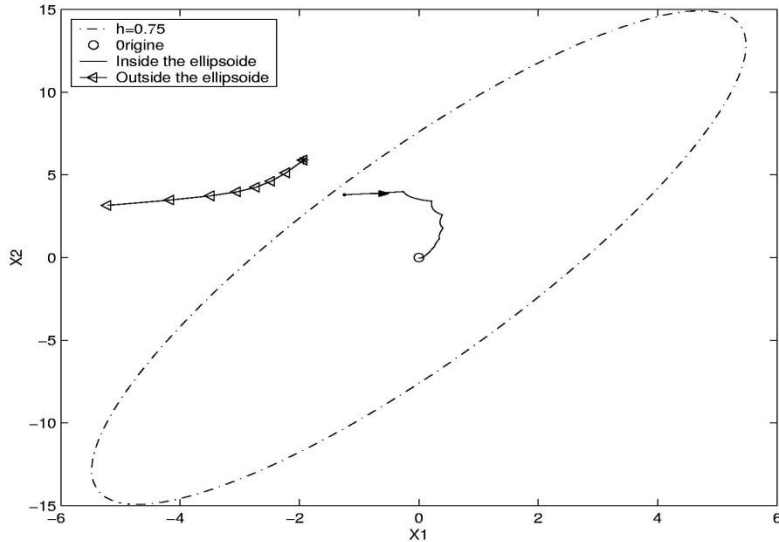
3ème exemple (suite)



Cas 2 : saturation (stab. locale)

instable \rightarrow local. as. stable

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 1.1 & -0.6 \\ 0.5 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{sat}(u(t_k))$$



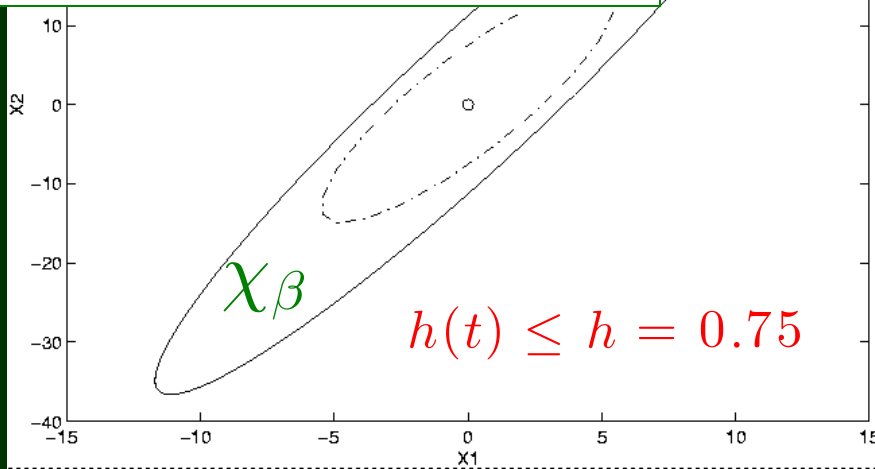
En appliquant le théorème, on

détermine un gain K qui stabilise le système pour tout échantillonnage de

période maximale $h < 0.75$.

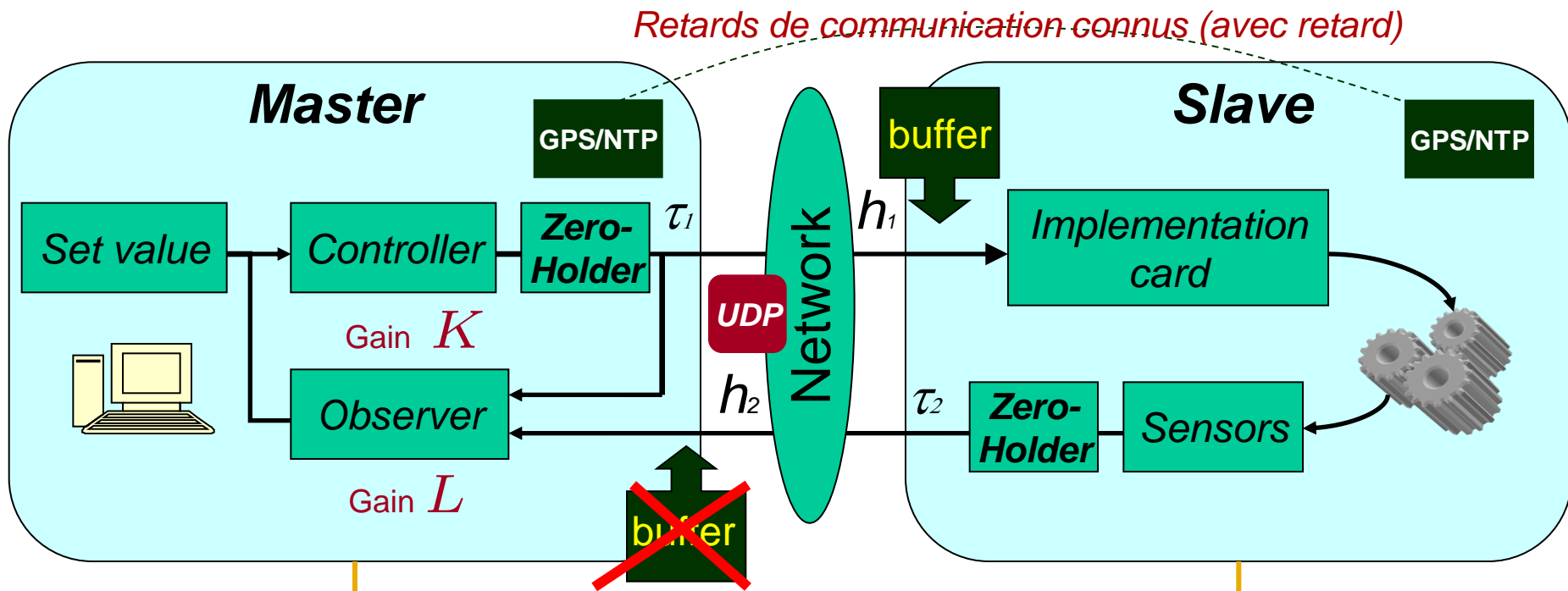
Le volume de l'ellipse augmente quand on diminue la valeur de h .

$$h=0.75 \Rightarrow K = [-1.7, 0.5]$$



4^{ème} exemple : Networked Control Systems

Thèses A. Seuret 2006 + Jiang 2009



$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t - \delta_1(t)) \\ \quad -L(y(t - \delta_2(t)) - \hat{y}(t - \delta_2(t))), \\ \hat{y}(t) = C\hat{x}(t), \end{cases}$$

→ connu grâce au buffer

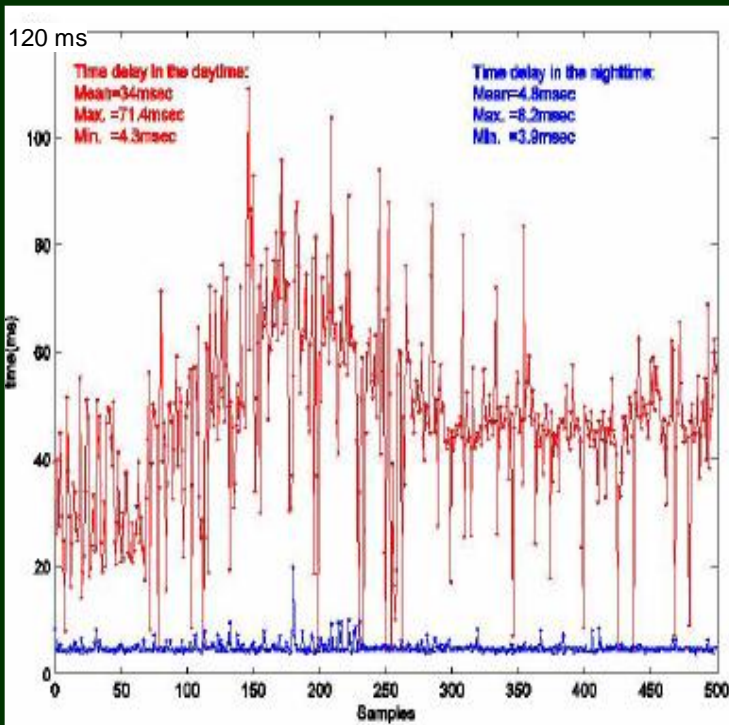
- fixe la consigne
- reçoit la sortie de Slave
- observe l'état de Slave
- calcule & envoie commande

- Puissance de calcul limitée

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - \delta_1(t)), \\ y(t) = Cx(t). \end{cases}$$

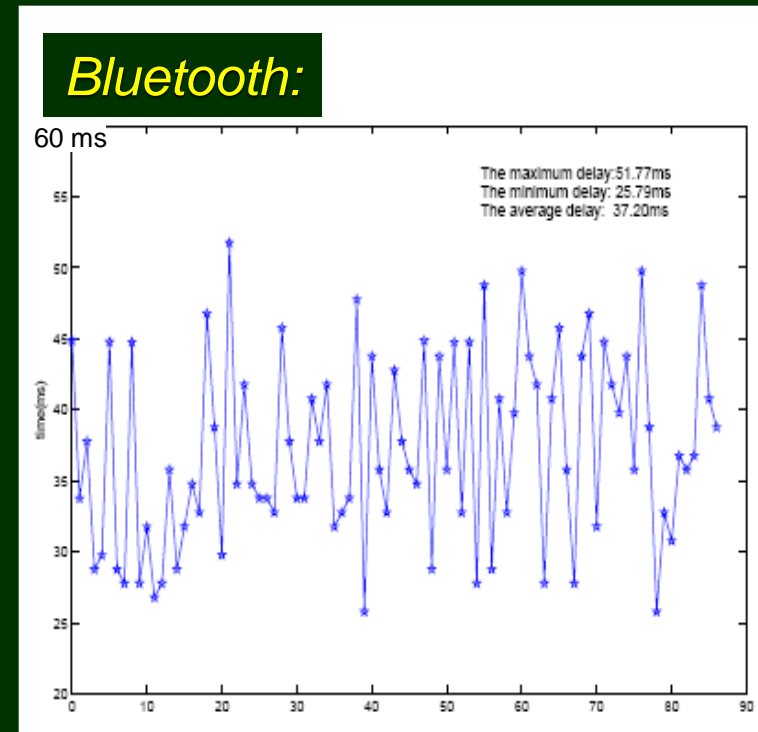
- reçoit & applique commande
- envoie la sortie mesurée

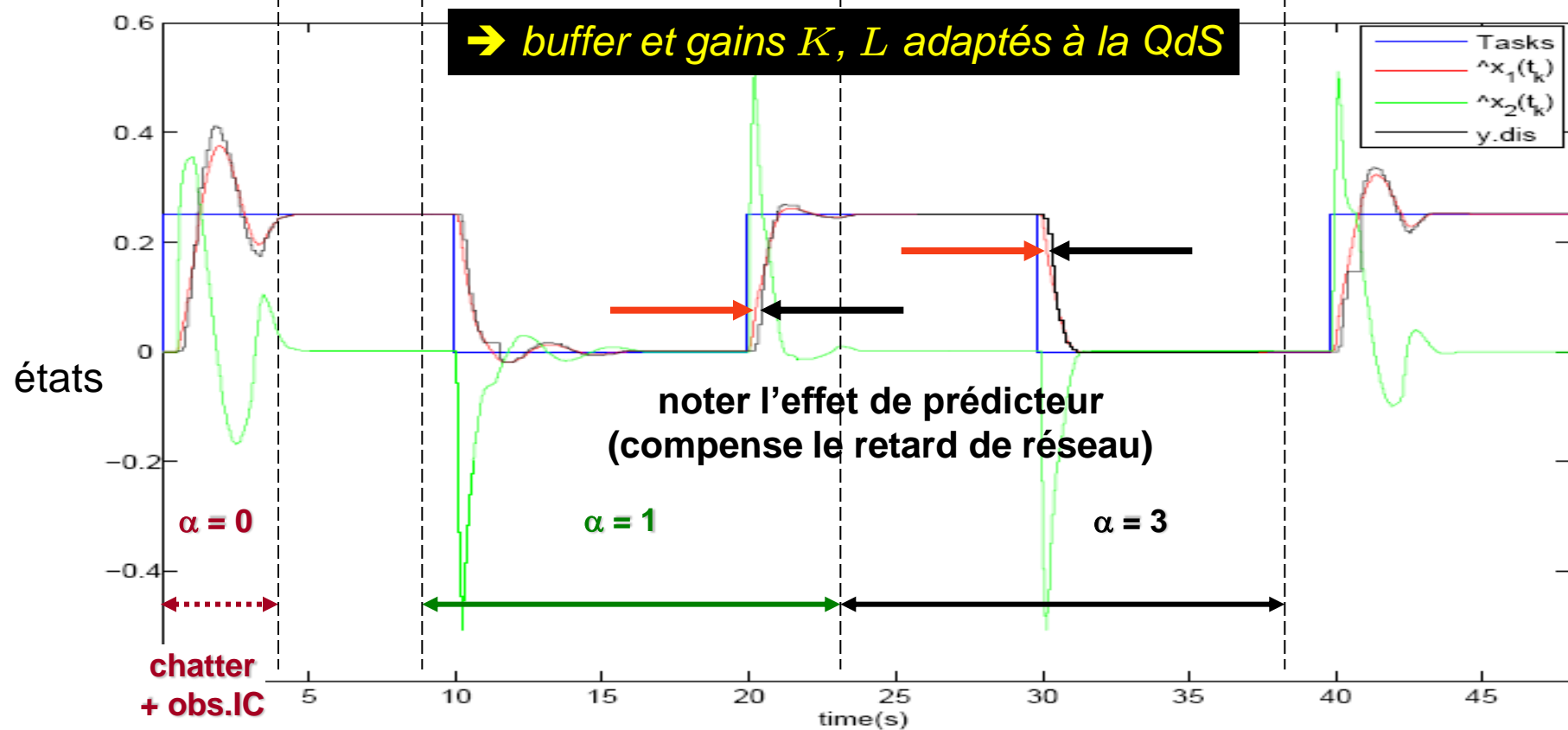
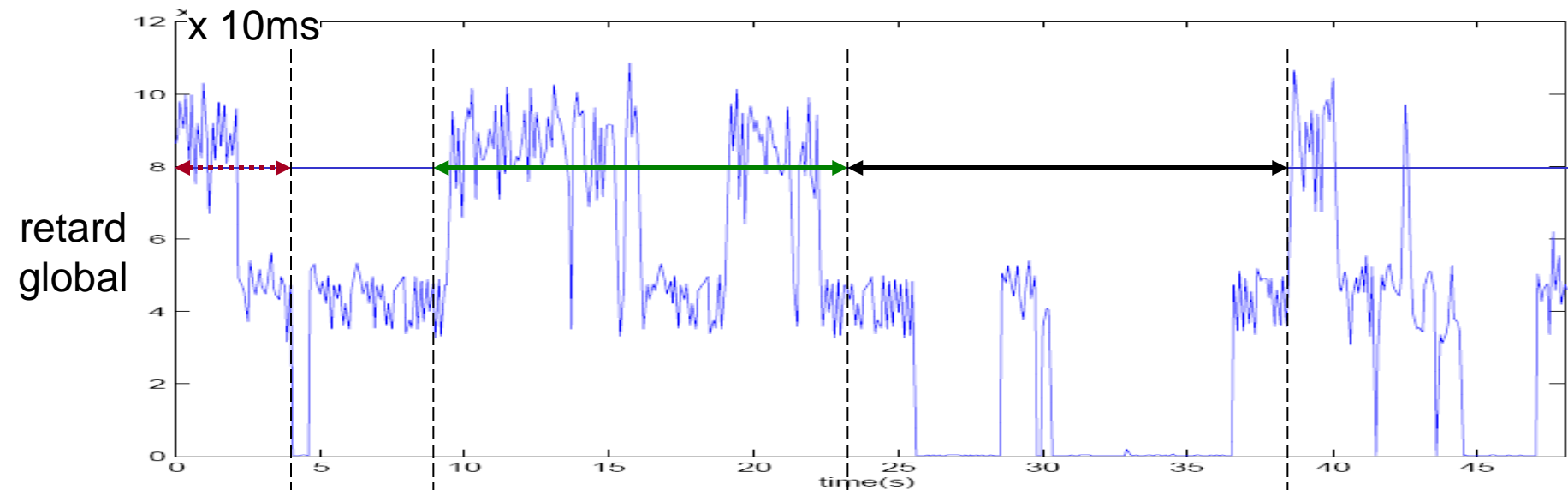
Passage à l'expérimental + adaptation à la QoS disponible



Internet:

**Nighttime
VS
Daytime**





Généralités

Classification

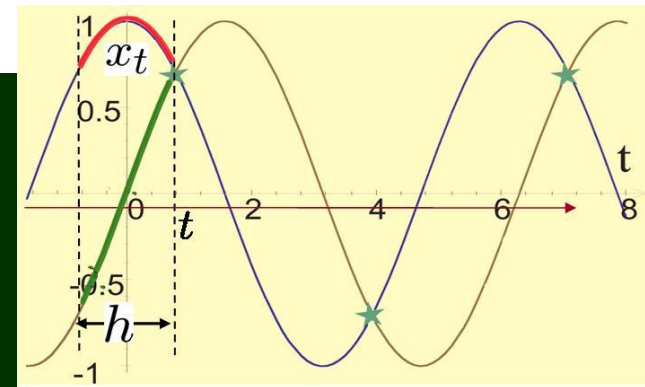
- systèmes de type retardé

$$\dot{x}(t) = f(x_t, t, u_t)$$

$$\begin{aligned} x_t(\theta) &= x(t + \theta), & -h \leq \theta \leq 0, \\ u_t(\theta) &= u(t + \theta), & -h \leq \theta \leq 0, \\ x(\theta) &= \varphi(\theta), & t_0 - h \leq \theta \leq t_0, \end{aligned}$$

- systèmes de type neutre

$$\dot{x}(t) = f(x_t, \dot{x}_t, t, u_t)$$



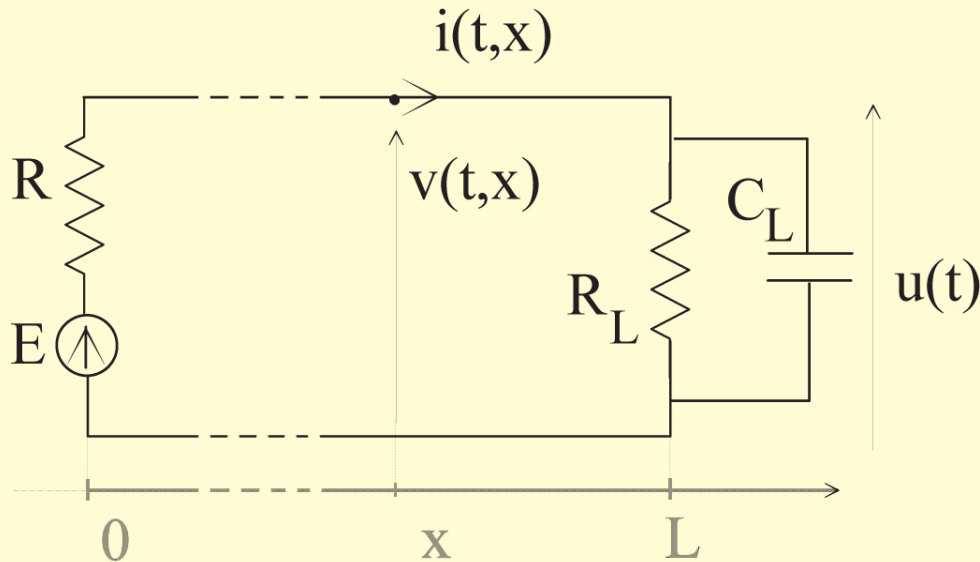
Classification

exemple 5

- système de type neutre :

ligne de transmission sans perte

$$\dot{x}(t) = f(x_t, \dot{x}_t, t, u_t)$$



$$\begin{cases} L \frac{\partial i}{\partial t} = -\frac{\partial v}{\partial x} , \\ C \frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{\partial i}{\partial x} , \end{cases}$$

+ conditions aux limites ($x=0, L$) :

$$\begin{cases} v(t, 0) = E - Ri(t, 0) , \\ i(t, L) = \frac{1}{R_L}u(t) + C_L \frac{du}{dt}(t) . \end{cases}$$

transformation de d'Alembert $(v, i) \rightarrow (\phi, \psi)$:

$$v(t, x) = \phi(x - ct) + \psi(x + ct)$$

$$Zi(t, x) = \phi(x - ct) - \psi(x + ct)$$

$$c = (LC)^{-1/2}, \quad Z = (L/C)^{1/2}$$

$$\tau = 2L/c, \quad \kappa = (Z - R)/(Z + R)$$

$$\dot{u}(t) - \kappa \dot{u}(t - \tau) + \alpha u(t) + \beta u(t - \tau) = \alpha E$$

Classification

exemple 6

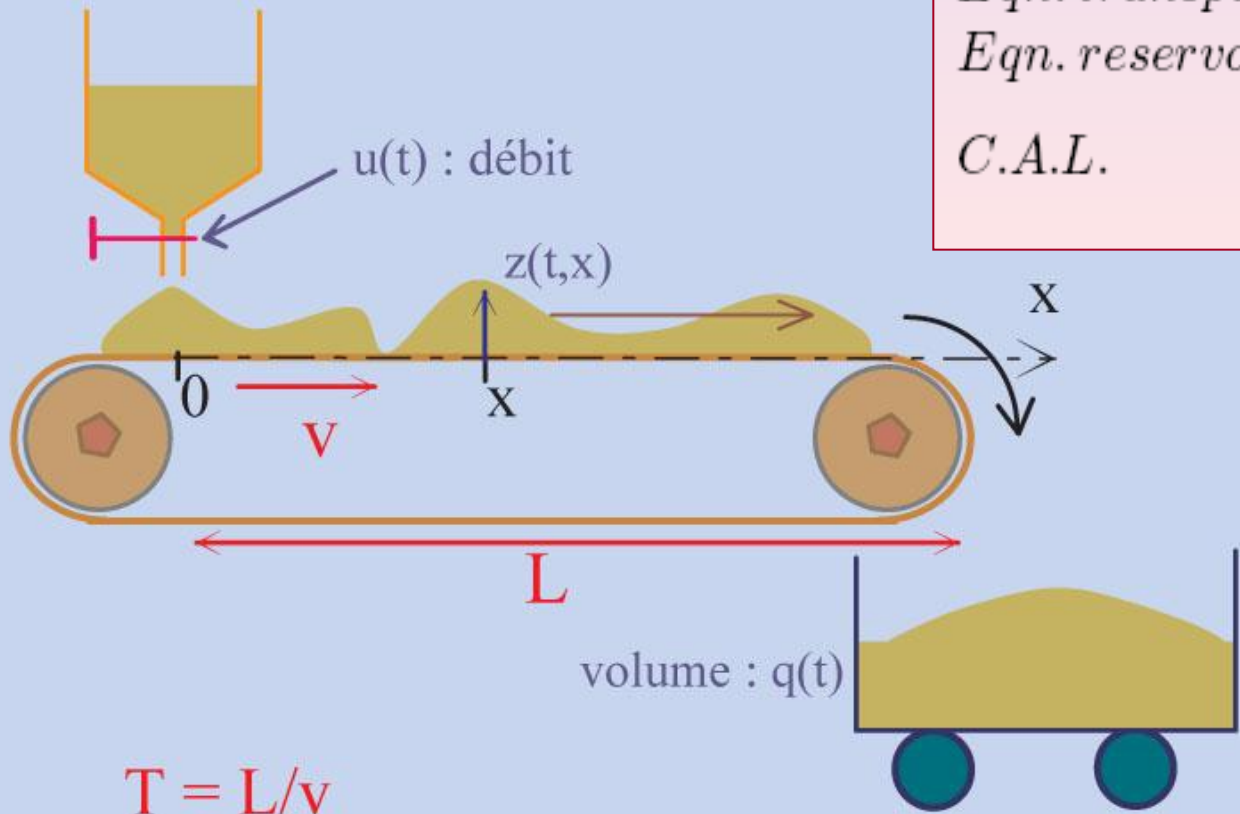
- système de type retardé :
équation de transport

$$\dot{x}(t) = f(x_t, t, u_t)$$

$$\text{Eqn. transport : } \frac{\partial z}{\partial t} + v \frac{\partial z}{\partial x} = 0$$

$$\text{Eqn. reservoir : } \dot{q}(t) = y(t)$$

$$\text{C.A.L. } \begin{cases} y(t) = H \frac{\partial z}{\partial t}(t, L) \\ H \frac{\partial z}{\partial t}(t, 0) = u(t) \end{cases}$$



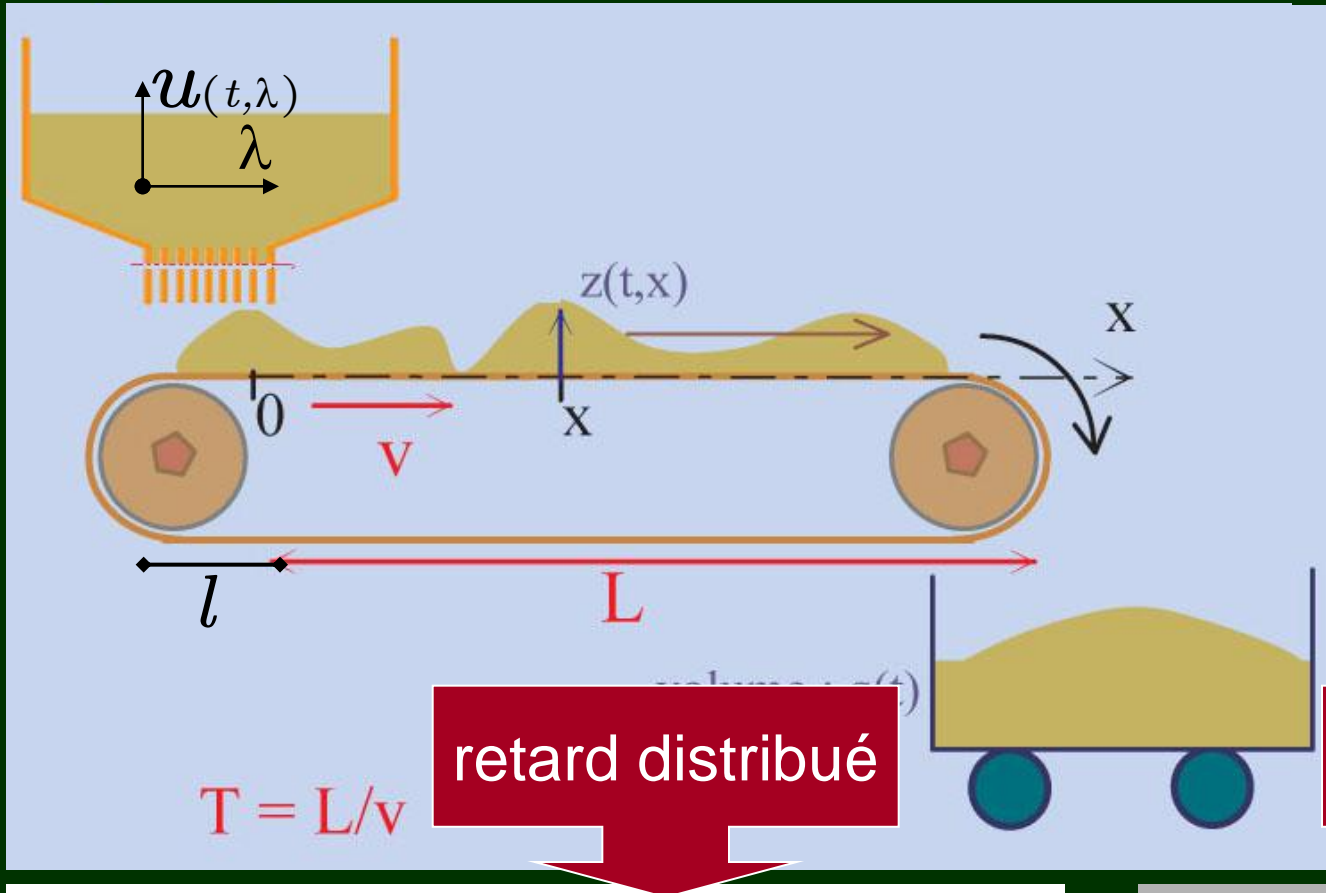
$$\dot{q}(t) = u\left(t - \frac{L}{v}\right)$$

Classification

exemple 6 bis

- système de type retardé :
équation de transport

$$\dot{x}(t) = f(x_t, t, u_t)$$

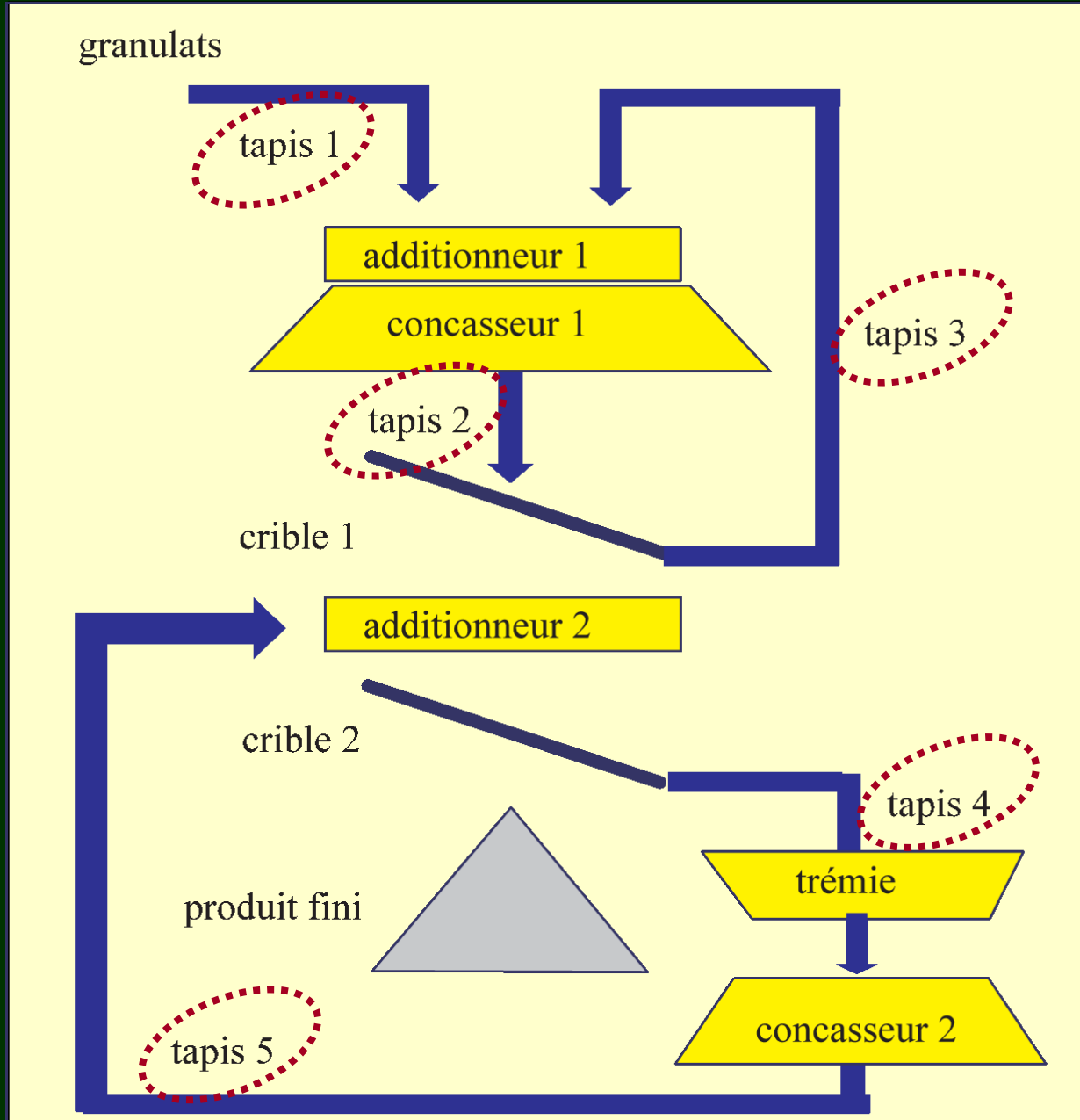


$$\dot{q}(t) = \int_{-l}^0 u\left(t - \frac{L}{v} + \frac{\lambda}{v}, \lambda\right) d\lambda$$

$$\dot{q}(t) = u\left(t - \frac{L}{v}\right)$$

Classification

NB : la réalité est un peu plus compliquée...



Exemple 7 : macro-modèle de réseau

- modèle « par session » (ATM, TCP)

[Mascolo 99] → contrôle de congestion par prédicteur de Smith

$$\dot{x}_j(t) = \sum_{i=1}^{n_j} u_{ij}(t - \tau_{ij}) - d_j$$

x_j niveau du tampon mémoire associé à la session l_j

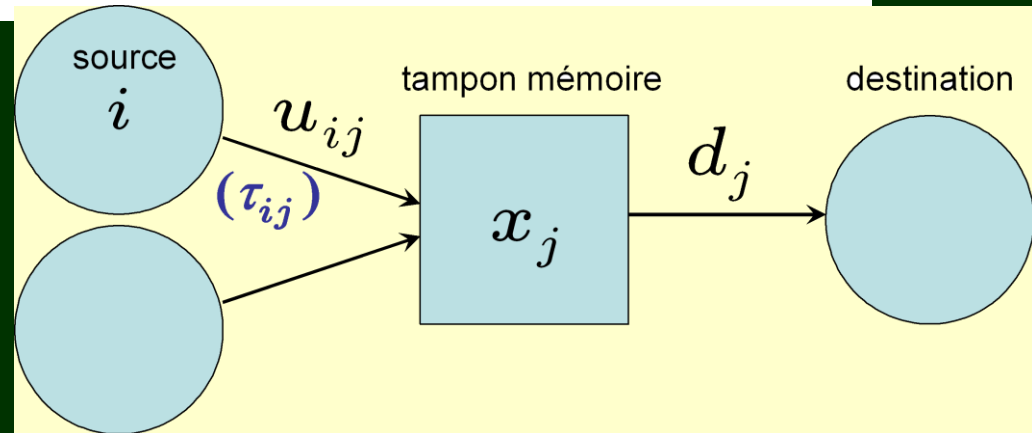
u_{ij} débit de la source i (commande)

n_j nombre de sessions partageant le tampon j

τ_{ij} retard de propagation de source i vers tampon j

d_j débit de service du tampon j (perturbation)

→ système de type retardé
à retards ponctuels



Problème de Cauchy

(existence de solution pour un SàR)

- Notion de solution
- Condition de type Lipschitz
- Cas où le retard peut s'annuler

direct
formal.

direct
commd.

direct
Lyap..

direct
biblio

2.3 Notion of solution

System (S) : $\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau(t)))$

with $x(t) \in \mathbb{R}^n$, and $0 \leq \tau(t) \leq \tau$

Let $\varphi : [-\tau, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n$ be an arbitrary map.

Definition: A map $x(t) : [t_0 - \tau, t_0 + b) \rightarrow \mathbb{R}^n$ s.t.

1) $x(t_0 + s) = \varphi(s)$, for all s in $[-\tau, 0]$;

2) x is continuous over $[t_0, t_0 + b)$;

3) x satisfies (S) over $[t_0, t_0 + b)$ (\dot{x} right-hand, Dini)

is called a **solution** of (S) with initial value φ at t_0 .

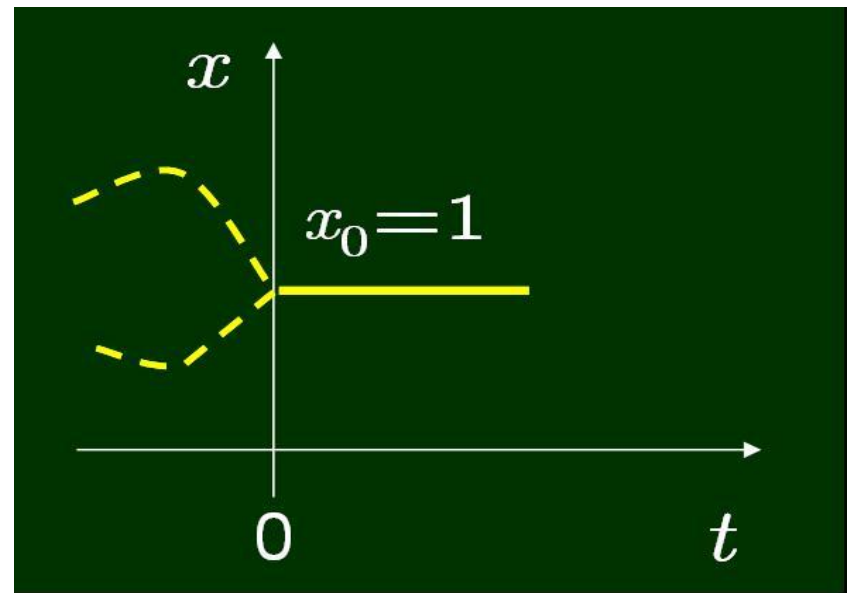
If only one map satisfies these 3 points, then the solution is **unique**.

Remark: There is a weaker notion of solution, where

2) $\rightarrow x$ absolutely continuous function over $[t_0, t_0 + b)$

3) $\rightarrow x$ satisfies (S) almost everywhere on $[t_0, t_0 + b)$

Remark



Even if unicity holds, *different solutions may coincide after a finite time*. For instance:

$$\dot{x}(t) = -x(t - \tau)[1 - x(t)],$$

$$x(t, \varphi) = 1 \quad (\forall t \geq 0)$$

for any $\varphi \in C([-\tau, 0], \mathbb{R})$ such that $\varphi(0) = 1$.

(donc, généralement, non-unicité de la réversion de trajectoire)

2.4 Existence and uniqueness of solutions

For system (S) with $0 < \delta \leq \tau(t) \leq \tau_m$:

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), x(t - \tau(t))).$$

Consequence of the step method:

Given a continuous map $\varphi \in \mathcal{C}$, if the ODE

$$\dot{x}(t) = f_\varphi(t, x(t)) \equiv f(t, x(t), \varphi(t - \tau(t)))$$

has a (unique) solution, then there exists a (unique) solution of (S) with initial condition φ

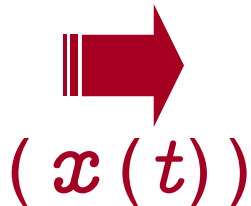
From there, using classical Cauchy-Lipschitz conditions:

→ Conditions of existence and uniqueness (I):

If f is a continuous map and satisfies a local Lipschitz condition in x ,

$$\|f(t, x_2, y) - f(t, x_1, y)\| \leq K \|x_2 - x_1\|,$$

then for any initial condition $\varphi \in \mathcal{C}$, (S) has a unique solution, depending continuously on f and φ .



Cauchy pb.

If the delay can become zero $0 \leq \tau(t) \leq \tau_m$, the step method does not apply anymore

⇒ need of a general framework: **FDEs** [Myshkis 49]

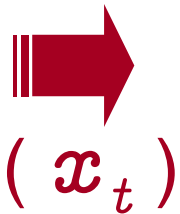
$$(RFDE) : \quad \dot{x}(t) = F_R(t, x_t) \quad (\text{retarded type})$$

Conditions of existence and uniqueness (II):

If F_R is a continuous map with local-Lipschitz cond. in its second (functional) argument, i.e.

$$\|F_R(t, \varphi_2) - F_R(t, \varphi_1)\| \leq K \|\varphi_2 - \varphi_1\|_C, \dots$$

then for any initial condition $\varphi \in C([-\tau, 0], \mathbb{R}^n)$, (RFDE) has a unique solution, depending continuously on F_R and φ .



Stabilité

- Equilibre
- Définition(s)
- Théorèmes

Stabilité : équilibre

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= f(t, x_t), \\ x_{t_0} &= \psi, \quad \psi \in \mathcal{C}[-h, 0]. \end{aligned} \tag{5.1}$$

Nous supposons que $f(t, \varphi)$ est continue, bornée pour φ bornée, localement lipschitzienne en φ . La solution de (5.1) est notée $x(t, t_0, \psi)$.

Définition 1. *La fonction $\varphi_e \in \mathcal{C}[-h, 0]$ est un état d'équilibre de (5.1) si pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, la solution $x(t, t_0, \varphi_e)$ existe et vérifie $x(t, t_0, \varphi_e) = \varphi_e$.*

Théorème 1. [19] *La fonction $\varphi_e \in \mathcal{C}[-h, 0]$ est un état d'équilibre de (5.1) si, et seulement si, les trois conditions suivantes sont vérifiées :*

- (i) $\forall t_0 \in \mathbb{R}$, $x(t, t_0, \varphi_e)$ existe et est unique;
- (ii) $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t, \varphi_e) = 0$;
- (iii) φ_e est une fonction constante de $\mathcal{C}[-h, 0]$: $\forall \theta \in [-h, 0], \varphi_e(\theta) = x_e$.

On parlera donc indifféremment d'état d'équilibre (φ_e) ou de *point d'équilibre* (x_e).

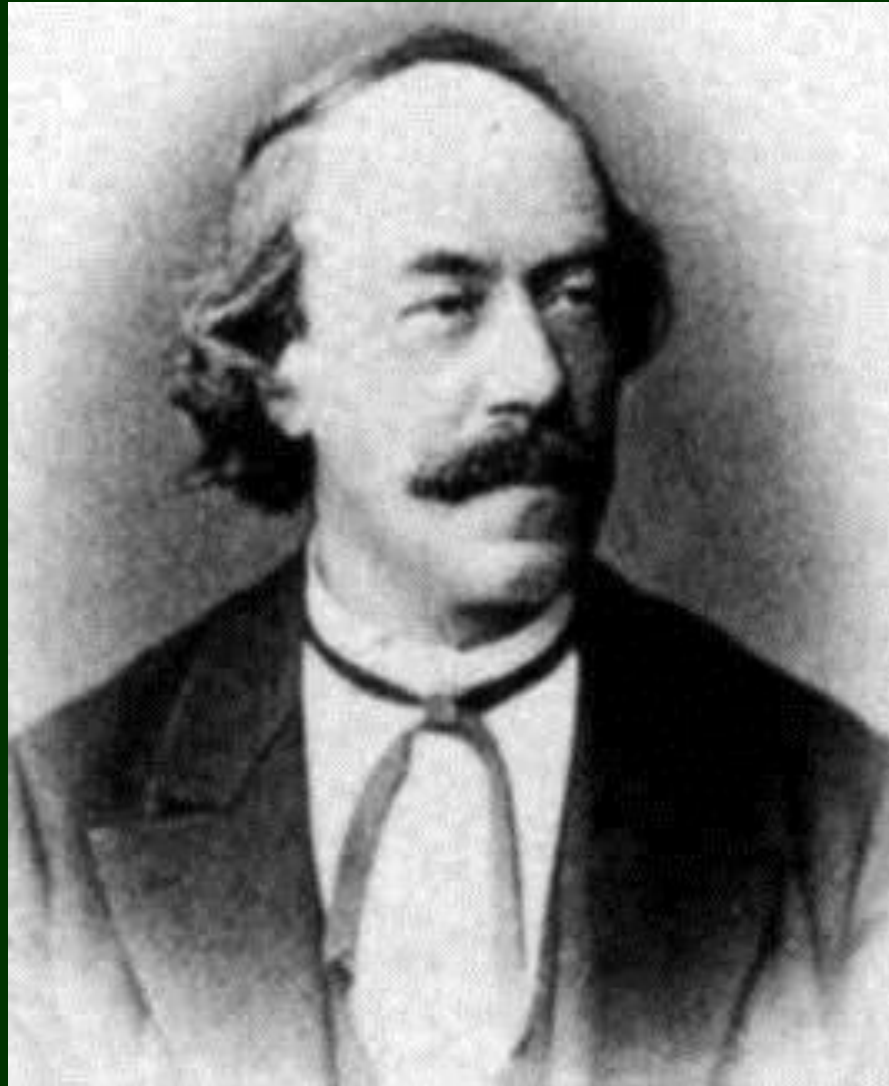
Stabilité : définitions

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t)$$

Définition 2. *L'équilibre $x = 0$ du système (5.1) est dit :*

1. *stable si $\forall \varepsilon > 0, \forall t_0, \exists \delta = \delta(t_0, \varepsilon) > 0, \psi \in \mathcal{B}_\delta \Rightarrow x(t, t_0, \psi) \in \mathcal{B}_\varepsilon$;*
2. *uniformément stable par rapport à t_0 si la propriété précédente est vérifiée avec $\delta = \delta(\varepsilon)$ (donc δ indépendant de t_0) ;*
3. *asymptotiquement stable s'il est stable et s'il existe $\eta = \eta(t_0) > 0$ tel que $[\psi \in \mathcal{B}_\eta] \Rightarrow [\lim_{t \rightarrow \infty} x(t, t_0, \psi) = 0]$;*
4. *uniformément asymptotiquement stable s'il est uniformément stable et si la limite de la propriété précédente est uniforme, c'est-à-dire si $\exists \eta > 0 : \forall \gamma > 0, \exists T(\gamma) > 0 : [\psi \in \mathcal{B}_\eta \text{ et } t \geq T(\gamma)] \Rightarrow [x(t, t_0, \psi) \in \mathcal{B}_\gamma] \forall t_0$;*
5. *globalement (uniformément) asymptotiquement stable s'il est (uniformément) asymptotiquement stable avec $\eta = +\infty$;*
6. *globalement exponentiellement stable s'il existe deux nombres strictement positifs α (appelé taux de convergence exponentielle) et k tels que :*

$$|x(t, t_0, \psi)| \leq k \|\psi\|_C e^{-\alpha(t-t_0)}. \quad (5.2)$$

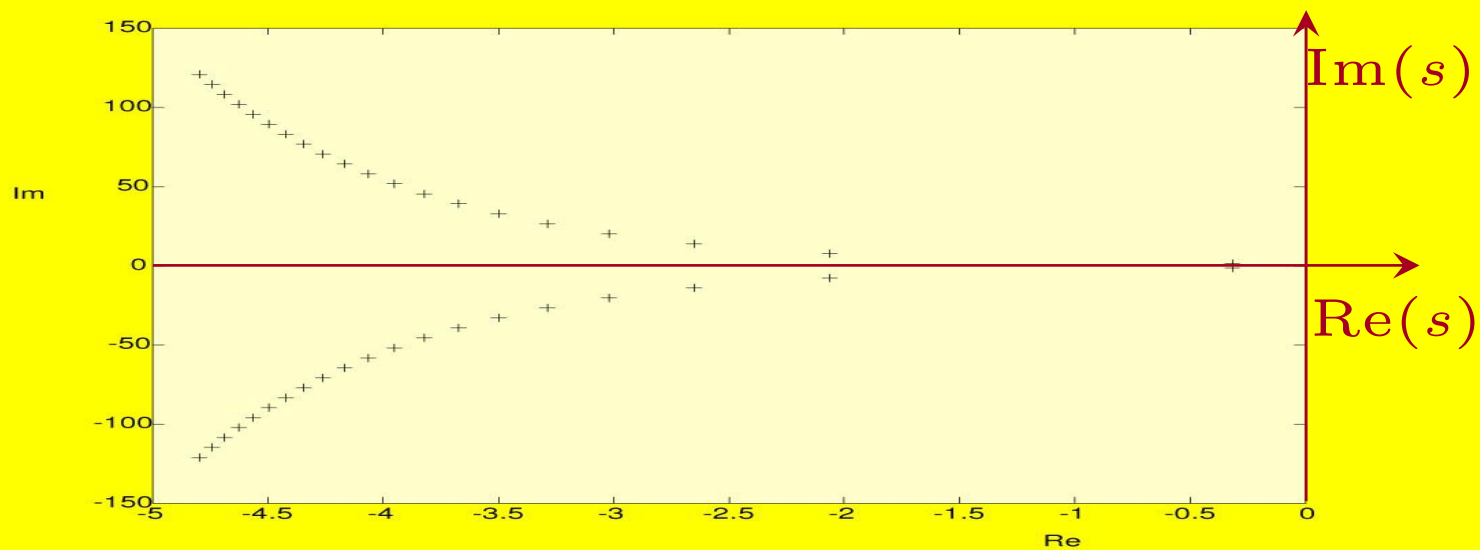


Rudolf Otto Sigismund Lipschitz
(1832-1903) Allemand, professeur à l'Université de Bonn

Stabilité : cas linéaire stationnaire

Théorème 2. *Un système linéaire stationnaire de type retardé est globalement asymptotiquement stable si, et seulement si, toutes ses racines caractéristiques sont dans le demi-plan complexe gauche (l'axe imaginaire étant exclu).*

Exemple 1: *Considérons l'équation $\dot{x}(t) = -x(t-1)$. Son équation caractéristique est $s + e^{-s} = 0$, dont les solutions $s = \alpha \pm j\beta$ sont en nombre infini. Le système n'est donc pas dégénéré. Ici, $s = -0.318 \pm 1.337j$ est une estimation de la paire de racines de plus grande partie réelle : il y a donc stabilité asymptotique².*



Méthode de Walton et Marshall (1987)

Extrait de Borne, Dauphin, Richard, Rotella, Zambettakis

Analyse et régulation des processus industriels - Régulation continue. 495 pages, Edt. Technip 1993

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau)$$

$$p(s, \tau) = \det[sI - A - Be^{-\tau s}] = 0.$$

$$p(s, \tau) = D(s) + N(s)e^{-\tau s} = 0, \quad (10.35)$$

où N et D sont deux polynômes réels.

Pour analyser la stabilité, l'idée est de chercher s'il existe des valeurs du retard τ_j pour lesquelles cette équation caractéristique admet des racines imaginaires pures, et c'est en ces points τ_j qu'un changement dans le comportement asymptotique du système (10.33) peut se produire. On est donc amené à calculer un lieu des racines paramétré en τ . La procédure est la suivante :

1. Déterminer la situation des racines du système non retardé ($p(s, 0) = 0$).
2. Calculer le polynôme $q(\omega^2) = D(j\omega)D(-j\omega) - N(j\omega)N(-j\omega)$, obtenu à partir de l'équation $p(s, \tau) = 0 = p(\bar{s}, \tau)$ pour les racines imaginaires pures $s = j\omega$.
3. Rechercher les éventuelles racines ω_j réelles positives de $q(\omega^2) = 0$, qui correspondent aussi à des racines de $p(s, \tau) = 0$.
4. Etudier le comportement du lieu des racines en ces points ω_j : si $q(\omega_j^2)$ traverse l'abscisse (axe des ω^2) de haut en bas, $p(s, \tau_j)$ traverse l'axe imaginaire de la droite vers la gauche, et on a donc stabilité à partir de $\tau > \tau_j$ (jusqu'à $\tau = \tau_{j+1}$ au moins).

Cette méthode donne en général de bons résultats, mais est difficilement applicable si le modèle est paramétré par d'autres coefficients que τ .

- Exemple 1

On considère le système de la figure 10.31, avec $D(s) = (s + 2)^2$, $N(s) = -1/4$.

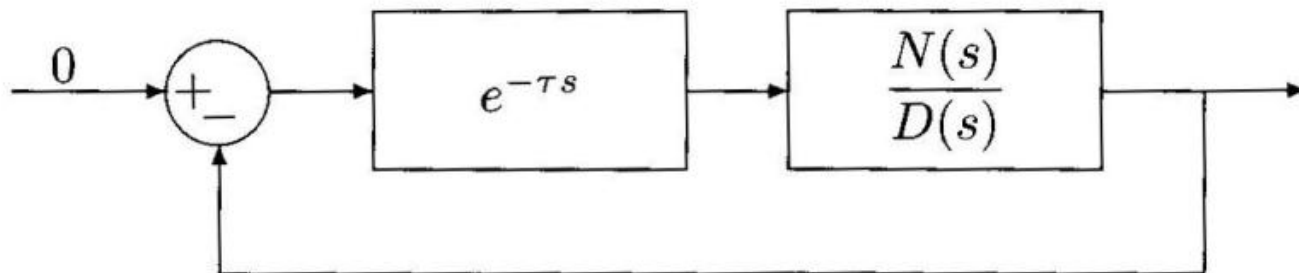


FIG. 10.31 : Système linéaire retardé.

1. Système non retardé :

$$p(s, 0) = s^2 + 4s + \frac{15}{4} = \left(s + \frac{5}{2}\right) \left(s + \frac{3}{2}\right), \quad (10.36)$$

en $\tau = 0$ les deux racines sont dans le demi-plan complexe gauche.

2. $q(\omega^2) = (4 + \omega^2)^2 - \frac{1}{16} = \left(\omega^2 + \frac{15}{4}\right) \left(\omega^2 + \frac{17}{4}\right)$.

3. $q(\omega^2) = 0$ n'a pas de racines réelles positives.

4. Le système est donc stable indépendamment du retard $\tau > 0$.

- *Exemple 2*

Soit un système d'équation caractéristique :

$$p(s, \tau) = s^3 + s^2 + 2s + 1 + e^{-\tau s} = 0. \quad (10.37)$$

1. $p(s, 0) = (s + 1)(s^2 + 2)$ est instable ;
2. $q(\omega^2) = \omega^2(\omega^2 - 1)(\omega^2 - 2)$;
3. $s = 0$ n'est pas racine de $p(s, \tau) = 0$, on l'écarte donc.

En $\omega = 1$, $p(j, \tau) = j + e^{-\tau j} = 0$, pour $\tau = \pi/2 + 2\pi n$, la courbe $q(\omega^2) \sim 1 - \omega^2$ traverse l'axe des ω^2 de haut en bas (pour ω^2 croissant) et $p(s, \tau)$ traverse l'axe imaginaire de droite à gauche. On a donc stabilité après $\tau > \pi/2 + 2\pi n$ (n entier positif).

En $\omega = \sqrt{2}$, $p(j\sqrt{2}, \tau) = -1 + e^{-\tau j\sqrt{2}} = 0$, pour $\tau = k\pi\sqrt{2}$, la courbe $q(\omega^2) \sim 2(\omega^2 - 2)$ traverse l'axe des ω^2 de bas en haut, et on a stabilité jusqu'à $\tau < k\pi\sqrt{2}$ (k entier positif).

Le système (10.37) est donc asymptotiquement stable pour :

$$\frac{\pi}{2} < \tau < \pi\sqrt{2}, \quad \text{ou} \quad \frac{5\pi}{2} < \tau < 2\pi\sqrt{2}, \quad (10.38)$$

ou $9\pi/2 < \tau < 4\pi\sqrt{2}$, etc...

- *Exemple 3*

Soit le système :

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} x(t - \tau). \quad (10.39)$$

Son équation caractéristique s'écrit :

$$p(s, \tau) = \begin{vmatrix} s & -1 \\ 1 & s + 1 + e^{-\tau s} \end{vmatrix} = s^2 + s + 1 + se^{-\tau s} = 0. \quad (10.40)$$

1. $p(s, 0) = (s + 1)^2$, asymptotiquement stable.
2. $q(\omega^2) = (1 - \omega^2)^2$.
3. $\omega = 1$ est une racine double de $q(\omega^2)$, donc le lieu de $p(s, \tau)$ touche l'axe imaginaire, sans le traverser, pour $\tau = (2n + 1)\pi$, n entier positif.
4. Le système (10.39) est asymptotiquement stable, pour tout $\tau \neq (2n + 1)\pi$.

Stabilité : 1ère méthode de Liapounov

« approximation des petits mouvements »



$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^k A_i x(t - h_i) + q(t, x_t) \quad (5.8)$$

$$q(t, x_t) = q(t, x(t), x(t - \tau_1(t)), \dots, x(t - \tau_k(t))),$$

$$h_0 = 0, \quad h_i = \text{constantes}, \quad \tau_j(t) \in [0, \tau_i] \text{ continues},$$

$$\|u_i\| \leq \varepsilon \Rightarrow \|q(t, u_0, \dots, u_k)\| \leq \beta_\varepsilon (\|u_0\| + \dots + \|u_k\|),$$

avec $\beta_\varepsilon = \text{constante}$ pour ε donné, β_ε uniformément décroissante vers 0 quand $\varepsilon \rightarrow 0$. L'approximation au premier ordre est définie par :

$$\dot{z}(t) = \sum_{i=0}^k A_i z(t - h_i). \quad (5.9)$$

Théorème 4. [26] *Si le système linéarisé (5.9) est asymptotiquement stable, alors $z = 0$ l'est aussi pour (5.8). Si (5.9) a au moins une racine caractéristique à partie réelle positive, alors $z = 0$ est instable pour (5.8).*

Stabilité : cas des retards faibles

« approximation des petits retards »

$$\dot{z}(t) = \sum_{i=0}^k A_i z(t - h_i). \quad (5.9)$$

$$\dot{x}(t) = \sum_{i=0}^k A_i x(t - h_i) + q(t, x_t) \quad (5.8)$$

Le résultat précédent peut être utilement complété par une *approximation des petits retards*, résultat de nature qualitative obtenu par continuité des racines caractéristiques de (5.9) vis-à-vis des retards h_i .

Théorème 5. [26] *Si $A = \sum_{i=0}^k A_i$ est de Hurwitz (respectivement, instable), alors pour des valeurs suffisamment faibles des retards h_i , la solution nulle $z = 0$ est asymptotiquement stable (respectivement, instable) pour (5.9) et donc (5.8). Si, sur les n valeurs propres de A , $n-1$ ont des parties réelles strictement négatives et la n -ième est nulle, alors, pour des valeurs suffisamment faibles des h_i , $z = 0$ est stable pour (5.9) et donc pour (5.8).*

Stabilité : cas mono-retard faible

quantification d'un retard « faible » admissible

$$\frac{dz(t)}{dt} = A_0 z(t) + A_1 z(t - \underline{h}), \quad (5.10)$$

qui, pour un retard nul, devient :

$$\frac{dz(t)}{dt} = (A_0 + A_1) z(t). \quad (5.11)$$

condition suffisante

Théorème 6. [40] *Si le système à retard nul (5.11) est asymptotiquement stable et si P est la matrice solution de l'équation de Liapounov (où Q est une matrice réelle définie positive [117]) :*

$$(A_0 + A_1)^T P + P (A_0 + A_1) = -Q^T Q, \quad (5.12)$$

alors (5.10) est asymptotiquement stable pour tout retard $h \in [0, h_{\max}]$:

$$h_{\max} = \frac{1}{2} [\lambda_{\max}(B^T B)]^{-\frac{1}{2}}, \quad \text{avec } B = Q^{-T} A_1^T P (A_0 + A_1) Q^{-1}. \quad (5.13)$$

Un autre résultat de V.B. Kolmanovskii (1999)

$$\dot{x}(t) = Ax(t - h)$$



$$V(x_t) = \|x(t)\| \text{ (some norm)}$$

$\|A\|$ = associated matrix norm,

$\gamma(A)$ = logarithmic norm (“measure”).

$$\gamma(A) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\|I + hA\| - 1}{h}$$

$$\gamma(A) < -h\|A\|^2 \implies \text{expon. stable, } e^{-\omega t}$$

$$\omega : \text{solution of } \omega = -\gamma(A) - h\|A\|^2 e^{2\omega h}$$

Stabilité : méthode directe de Liapounov ⁽¹⁾

ODE :

$$\dot{x}(t) = -ax(t)$$



$$V(x(t)) = x^2(t) > 0$$

$$\dot{V}(x(t)) = -2 ax^2(t) < 0 \dots \text{etc.}$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t) - x_1(t)x_2^2(t - \tau_1) \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) - x_2(t)x_1^2(t - \tau_2) \end{cases}$$

- Fonction de Lyapunov : $V(x) = x_1^2 + x_2^2$
- Dérivée le long des solutions :

$$\frac{dV}{dt}(x(t)) = -2 [x_1^2(t)x_2^2(t - \tau_1) + x_2^2(t)x_1^2(t - \tau_2)] \leq 0$$

$\Rightarrow x = 0$ est stable.

Cet exemple est un cas très particulier

Suite : Méthode « directe » de Liapounov

2) mais en général...

FDE :

$$\dot{x}(t) = -ax(t) - bx(t-h)$$

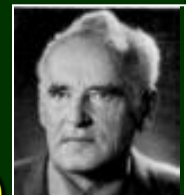
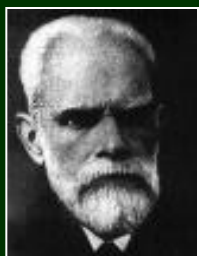
$$V(x(t)) = x^2(t) \quad (\text{quadratique « usuelle »})$$

$$\dot{V}(x(t)) = -2 [ax^2(t) + \underbrace{bx(t)x(t-h)}_{\text{termes croisés}}] \leq \dots ?$$

→ besoin de méthodes dédiées :

1) fonctions de Lyapunov-Razumikhin (pas ici)

2) fonctionnelles de Lyapunov-Krasovskii



une illustration simple de la méthode de Lyapunov-Krasovskii

$$\dot{x}(t) = -ax(t) - bx(t-h)$$

$$V(x_t) = x^2(t) + |b| \int_{-h}^0 x^2(t+s) ds \quad (\text{quad} + \text{intégrale})$$

$$\begin{aligned} \dot{V}(x_t) &= -2x(t)[ax(t) + bx(t-h)] \\ &\quad + |b| \underline{[x^2(t) - x^2(t-h)]} \\ &\leq -2(a - |b|)x^2(t) \quad \dots \dot{V}(x_t) < 0 \text{ if } |b| < a \end{aligned}$$

cas $b \geq 0$: $|b| = b$ et

$$-2bx(t)x(t-h) - |b|x^2(t-h) = -b[x(t) + x(t-h)]^2 + bx^2(t)$$

Stabilité : méthode directe de Liapounov ⁽¹⁾

1) définitions

Stabilité : méthode directe de Liapounov ⁽²⁾

Théorème 7. ^{*} *S'il existe une fonctionnelle $V(t, \varphi)$ vérifiant les propriétés (a) et (b) ci-dessus et, pour tout t_0 et tout $t \geq t_0$:*

$$\dot{V}(t, \varphi) \leq -\omega_3(\varphi(0)), \quad (5.15)$$

où ω_3 est définie positive, non décroissante, alors l'équilibre $x = 0$ de l'EDR (5.1) est uniformément asymptotiquement stable.

^{*} « Fonctionnelle de Liapounov – Krasovskii »

Exemple simple (rappel...)

$$\dot{x}(t) = -ax(t) - bx(t - \tau)$$

$$\Rightarrow \mathcal{V}(\varphi) = \varphi^2(0) + |b| \int_{-\tau}^0 \varphi^2(t + s) ds$$

Conditions 1) et 2) remplies :

$$\varphi^2(0) \leq \mathcal{V}(\varphi) \leq (1 + |b|\tau) \|\varphi\|^2$$

Expression de la dérivée $\dot{\mathcal{V}}$:

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{V}}(x_t) &= -2x(t) [ax(t) + bx(t - \tau)] \\ &\quad + |b| [x^2(t) - x^2(t - \tau)] \end{aligned}$$

$$\dot{\mathcal{V}}(x_t) \leq -2(a - |b|)x^2(t)$$

$\Rightarrow x = 0$ est U.A.S i.d.r. si $a > |b|$.

Stabilité : méthode directe de Liapounov ⁽³⁾

Fonctionnelles de Liapounov – Krasovskii particulières

$$\dot{x}(t) = A_0x(t) + A_1x(t - h), \quad (5.18)$$

$$V(x_t) = x(t)^T Px(t) + \int_{-h}^0 x(t + \theta)^T Sx(t + \theta)d\theta, \quad (5.19)$$

➔ on obtient des conditions suffisantes sous forme d'équations de Riccati : (5.18) est asymptotiquement stable pour tout $h \geq 0$ s'il existe des matrices P , S , R positives et symétriques telles que :

$$A_0^T P + PA_0 + PA_1 S^{-1} A_1^T P + S + R = 0. \quad (5.20)$$

Cette équation (5.20) est équivalente à la LMI suivante :

$$\begin{pmatrix} A_0^T P + PA_0 + S & PA_1 \\ A_1^T P & -S \end{pmatrix} < 0. \quad (5.21)$$

+Nombreuses LKFs plus générales

voir le livre *Mathématiques pour l'Ingénieur*

ISBN : 978-9973-0-0852-7 (Tunisie) 385 pages, 2009

pdf also available at http://hal.inria.fr/hal-00519555_v1/

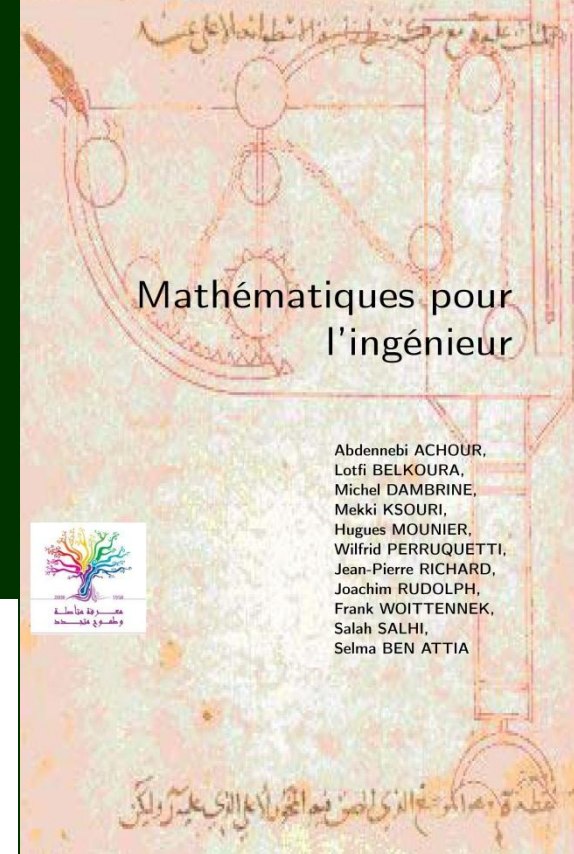
$$\dot{x}(t) = \sum_{i=1}^m A_i x(t - h_i). \quad (6.47)$$

$$A = \sum_{i=1}^m A_i, \quad A_{ij} = A_i A_j, \quad h_{ij} = h_i + h_j, \quad h = \sum_{i=1}^m h_i. \quad (6.48)$$

Théorème 6.5.8. *Le système (6.47) est asymptotiquement stable si, pour deux matrices symétriques et définies positives R, Q , il existe une matrice définie positive P solution de l'équation de Riccati :*

$$A^T P + P A + m R h + P \sum_{i,j=1}^m h_i A_{ij} R^{-1} A_{ij}^T P = -Q. \quad (6.49)$$

Démonstration : on choisit la fonctionnelle $V = V_1 + V_2$, $V_1 = x^T(t) P x(t)$, $V_2 = \sum_{i,j=1}^m \int_{h_j}^{h_{ij}} ds \int_{t-s}^t x^T(\tau) R x(\tau) d\tau$, conduisant à $\dot{V} = -x^T(t) Q x(t) - \sum_{i,j=1}^m \int_{t-h_j}^{t-h_{ij}} [R x(\theta) + A_{ij}^T P x(t)] R^{-1} [R x(\theta) + A_{ij}^T P x(t)]^T d\theta$. ■



Stabilité : méthode directe de Liapounov (4)

Bien sûr, pour $A_1 = 0$, (5.20) se réduit à l'équation de Liapounov $A_0^T P + PA_0 < 0$, CNS classique dans le cas ordinaire. Pourtant, dans le cas retardé, la condition suffisante (5.20)-(5.21) est loin d'être nécessaire. C'est pourquoi de très nombreuses généralisations de la fonctionnelle (5.19) ont été publiées dans les quinze dernières années. Elles mettent en jeu les termes variés suivants :

$$V_1(x(t)) = x^T(t)Px(t), \quad (5.22)$$

$$V_2(x_t) = x^T(t) \int_{-h_i}^0 Q_i x(t + \theta) d\theta,$$

$$V_3(x_t) = \int_{-h_i}^0 x^T(t + \theta) S_i x(t + \theta) d\theta,$$

$$V_4(x_t) = \int_{-\tau_i}^0 \int_{t+\theta}^t x^T(\theta) R_i x(\theta) d\theta ds,$$

$$V_5(x_t) = x(t)^T \int_{-h_i}^0 P_i(\eta) x(t + \eta) d\eta,$$

$$V_6(x_t) = \int_{-h_i}^0 \int_{-h_i}^0 x(t + \eta)^T P_i(\eta, \theta) x(t + \theta) d\eta d\theta.$$

Généralisation

$$(S) \quad \dot{x}(t) = Ax(t) + Bx(t - \tau), \text{ avec } x(t) \in \mathbb{R}^n.$$

Fonctionnelle : $V(\varphi) = \varphi^T(0)P\varphi(0) + \int_{-\tau}^0 \varphi^T(s)S\varphi(s) ds$
avec $P, S \succ 0$.

$$\Rightarrow \boxed{\dot{V}(x_t) = y^T(t)Qy(t)}$$

$$\text{avec } Q = \begin{bmatrix} A^T P + PA + S & PB \\ B^T P & -S \end{bmatrix} \text{ et } y(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ x(t - \tau) \end{bmatrix}$$

\Rightarrow Stabilité asymptotique i.d.r. si $Q \prec 0$ (LMI)

2^e généralisation : $V(t) = \bar{x}^T(t)E\bar{x}(t) + \int_{t-\tau_2}^t x^T(s)Sx(s)ds + \int_{-\tau_2}^0 \int_{t+\theta}^t z^T(s)Rz(s)dsd\theta$,
(descripteur)

$$\text{où } E = \begin{bmatrix} I_n & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ et où le vecteur } \bar{x}(t) \text{ est donné par } \text{col}\{x(t), z(t)\}.$$

Prise en compte de la valeur du retard

Hyp. : (S) asymp. stable pour $\tau = 0 \Rightarrow \mathcal{A} = A + B$ Hurwitz

Problème

Chercher une borne τ^* t.q. stab. asympt. $\forall \tau \leq \tau^*$.

Idée

Transformation du modèle à l'aide de la formule de Leibniz-Newton :

$$x(t) - x(t - \tau) = \int_{-\tau}^0 \dot{x}(t + s) ds$$

(S) \Rightarrow

$$\dot{x}(t) = (A + B)x(t) - B \int_{t-\tau}^t (Ax(s) + Bx(s - \tau)) ds$$

Cas des systèmes neutres ⁽¹⁾

$$\dot{x}(t) = f(x_t, t, \dot{x}_t, u_t), \quad (6.1)$$

On représente généralement les systèmes neutres sous la forme de Hale [48] :

$$F \dot{x}_t = \frac{dF x_t}{dt} = f(x_t, t, u_t), \quad (6.2)$$

où $F : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}^n$ est un opérateur régulier (ce qui évite les systèmes implicites) à argument différé. Dans le cas linéaire, stationnaire et à retards ponctuels, un système neutre s'écrit :

$$\dot{x}(t) - \sum_{j=1}^q D_j \dot{x}(t - \omega_j) = \sum_{i=0}^k [A_i x(t - h_i) + B_i u(t - h_i)], \quad (6.3)$$

équation à laquelle on associe l'équation linéaire aux différences :

$$F z_t = z(t) - \sum_{j=1}^q D_j z(t - \omega_j) = 0, \quad D_j \text{ matrices constantes.} \quad (6.4)$$

Cas (particulier) des systèmes neutres ⁽²⁾

On notera que, dans les publications concernant les applications aux sciences pour l'ingénieur, le cas mono-retard est quasiment le seul représenté, sous la forme particulière suivante :

$$\dot{x}(t) - D\dot{x}(t - h_1) = A_0x(t) + \sum_{i=1}^k [A_i x(t - h_i) + B_i u(t - h_i)], \quad (6.5)$$

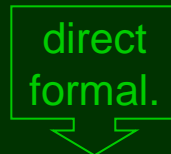
dont l'équation aux différences associée est :

$$z(t) - Dz(t - h_1) = 0. \quad (6.6)$$

si on fait l'hypothèse de la stabilité asymptotique de l'équation aux différences (6.4) (ce que l'on nomme « stabilité formelle » du système neutre [16]), alors le nombre de racines instables devient fini [26]. La stabilité formelle est également appelée « f -stabilité » dans le cas non linéaire [69].

Formalismes

- FDEs (déjà présenté)
- Semi-groupes (opérateurs en dim. infinie)
- Géométrie (sur anneaux)
- Algébrique
- 2D (systèmes neutres)



4.0 FDEs

(déjà vu)

$$\dot{x}(t) = f(x_t, t, u_t), \quad t \geq t_0$$

$$\begin{aligned} x_t(\theta) &= x(t + \theta), & -h \leq \theta \leq 0, \\ u_t(\theta) &= u(t + \theta), & -h \leq \theta \leq 0, \\ x(\theta) &= \varphi(\theta), & t_0 - h \leq \theta \leq t_0, \end{aligned}$$

- très général (retards qcques, lin./non lin., ...)
- commande par méthodes de type Lyapunov (en linéaire ou non lin. de type polytopique)

4.1 Operators in infinite dimension

Delfour72, Manitius78, Delfour-Karrakchou87, Bensoussan93...

$\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_2([-h, 0] \rightarrow \mathbb{R}^n)$ fncts with integrable square

$\mathcal{M}_2 = \mathbb{R}^n \times \mathcal{L}_2$ Hilbert space

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) &= A_0x(t) + A_1x(t-h) + B_0u(t), \\ y(t) &= C_0x(t).\end{aligned}$$

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}(t) = \tilde{A}\bar{x}(t) + \tilde{B}u(t), \\ y(t) = \tilde{C}\bar{x}(t) \end{cases}$$

$$\bar{x}(t) = [x(t), x_t] \in \mathcal{M}_2$$

\tilde{A} unbounded, closed, dense operator,

\tilde{B} and \tilde{C} bounded operators (if no input/output delay)

properties of semi-groups hold
general theory of infinite-dimensional, differential eqns

disadvantages:

- 1) abstract mathematics
- 2) yields controls in *distributed* form.

4.2 Geometric approach over polynomial rings

for linear systems with commensurate, constant delays

$\mathbb{R}[\nabla]$ *commut. ring of polynom. in delay operator* ∇
 absence of inverse on $\mathbb{R}[\nabla] \Leftrightarrow$ absence of advance
 ∇^{-1}

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=0}^k A_i x(t - i\delta) + \sum_{i=0}^k B_i u(t - i\delta) \\ y(t) = \sum_{i=1}^k C_i x(t - i\delta) \end{cases}$$

↓

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \mathbf{A}(\nabla)x(t) + \mathbf{B}(\nabla)u(t), \\ y(t) = \mathbf{C}(\nabla)x(t), \end{cases}$$

$$\mathbf{A}(\nabla) \in \mathbb{R}^{n \times n}[\nabla], \mathbf{B}(\nabla) \in \mathbb{R}^{n \times m}[\nabla], \mathbf{C}(\nabla) \in \mathbb{R}^{p \times n}[\nabla]$$

$\Rightarrow x$ belongs to the *state-module* $\mathbb{R}[\nabla]^n$

Control: *polynomial* feedback \Rightarrow polynomial system

$$\begin{aligned} u(t) &= -\mathbf{F}(\nabla)x(t) + v(t), \\ \mathbf{F}(\nabla) &\in \mathbb{R}[\nabla]^{m \times n} \end{aligned}$$

- *control assumptions:* *polynomial* control remains a limitation since realizability of concrete controllers needs:

\rightarrow *rational* fractions (precompensators, neutral syst)

\rightarrow *distributed* delays (finite spectrum assignment)

4.3 Systems over rational rings

ring $R[\nabla] \rightarrow$ field $R(\nabla)$ of rational fractions in ∇
 \rightarrow allows dynamic feedback, but realizability?

$\mathcal{R}_u(\nabla)$ = subring of the irreducible, rational fractions in ∇ , which denominator has a non-zero constant term:

$$\mathcal{R}_u(\nabla) = \left\{ \frac{p(\nabla)}{q(\nabla)} \in \mathbb{R}(\nabla), q(0) \neq 0 \right\}.$$

Examples:

$\frac{1}{1+\nabla}$ belongs to $\mathcal{R}_u(\nabla)$ $y(t) = -y(t - \delta) + u(t)$

$\frac{1}{\nabla}$ does not $y(t) = u(t + \delta)$ is anticipative

Theorem (causality) [Picard, Lafay, Kucera 96]

$$\frac{p(s, \nabla)}{q(s, \nabla)} = \frac{p_0(\nabla) + \dots + s^r p_r(\nabla)}{q_0(\nabla) + \dots + s^k q_k(\nabla)}, \quad r \leq k$$

is causal $\iff q_k(\nabla) \in \mathcal{R}_u(\nabla)$ (ring property).

Advantage of models over $\mathbb{R}_u(\nabla)$:

dynamic feedback law defined over $\mathcal{R}_u(\nabla)$

\Rightarrow resulting system remains in the same class

4.4 Algebraic formalism for distrib. delays

Manitius-Olbrot 79, Kamen-Khargonekar-Tannenbaum 85,
Watanabe 96

Example:

$$u \rightarrow y, \quad y(t) = \int_{h_1}^{h_2} f(\theta)u(t - \theta)d\theta,$$

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = F(s) = \int_{h_1}^{h_2} f(\theta)e^{-s\theta}d\theta$$

$ex \rightarrow$ zero-holder operator $\frac{1 - e^{-sh}}{s} = \int_0^h e^{-s\theta}d\theta.$

\rightarrow explicit consideration of the relation $s \rightleftharpoons \nabla \equiv e^{-s\delta}$

$$\mathcal{G} = \{ \mathcal{L}(\text{realizable, distributed delay}) \in \mathbb{R}(s, e^{-s\delta}) \}$$

$\rightarrow \mathcal{E} =$ ring of *pseudo-polynomials* (analytic fct)

$$\mathcal{E} = \mathbb{R}[e^{-s\delta}] \cup \mathcal{G} \quad [\text{Brethé, Loiseau}]$$

\mathcal{E} is isomorphic to the quasi-polynomials ring $\mathbb{R}[s, e^{-s\delta}]$

\mathcal{E} is a domain of Bezout (\rightarrow finite-spectrum assign^{mt})

4.5 Generalization to nonlinear systems

[Moog, Marquez-Martinez 00]

Non commutative polynomial ring $\mathcal{K}[\nabla]$,

\mathcal{K} field of meromorphic (ratio of analytic) functions:

$$\dot{x}_1(t) = x_1(t)x_2(t-1) \equiv x_{1,0}x_{2,1} = x_{1,0}\delta x_{2,0}$$

$$\dot{x}_2(t) = u_1(t) + x_2(t-2) \equiv u_{1,0} + x_{2,2}$$

non commutative :

$$x_{1,0}\delta x_{2,0} = x_{1,0}x_{2,1}$$

$$\neq$$

$$\delta x_{1,0}x_{2,0} = x_{1,1}x_{2,0}$$

$\mathcal{K}[\nabla]$ integer ring with Euclidean left-division.

4.6 2-D models and neutral systems

Roesser models [1975]:

s = derivation operator ω = h -advance operator.

$$\begin{cases} sX = A_0X + A_2Z + B_0U, \\ \omega Z = A_3X + DZ + B_3U, \end{cases}$$

$$Y = C_1X + C_2Z.$$

Example:

$$A_2 = I, \quad A_3 = A_1 + DA_0, \quad B_3 = B_1 + DB_0,$$

$$\dot{x}(t) - D \dot{x}(t-h) = A_0x(t) + A_1x(t-h) + B_0u(t) + B_1u(t-h)$$

⇒ allows connection with previous results

→ realization [Eising 78]

→ stabilization [Zak 86]

→ factorization & model matching [Loiseau, Brethé].

→ equivalence with the question of realization over

$\mathcal{R}_u(\nabla)$ [Picard].

Commande

- Conditions structurelles (existence)
- Limite des méthodes « dim. finie »
- Prédicteur de Smith, le principe
- Quelques parallèles avec la prédiction...

direct
formal.

direct
commd.

direct
Lyap..

direct
biblio

exemple

$$\dot{x}(t) = x(t) + u(t - 1)$$

n'est pas stabilisable avec $u(t) = -kx(t)$

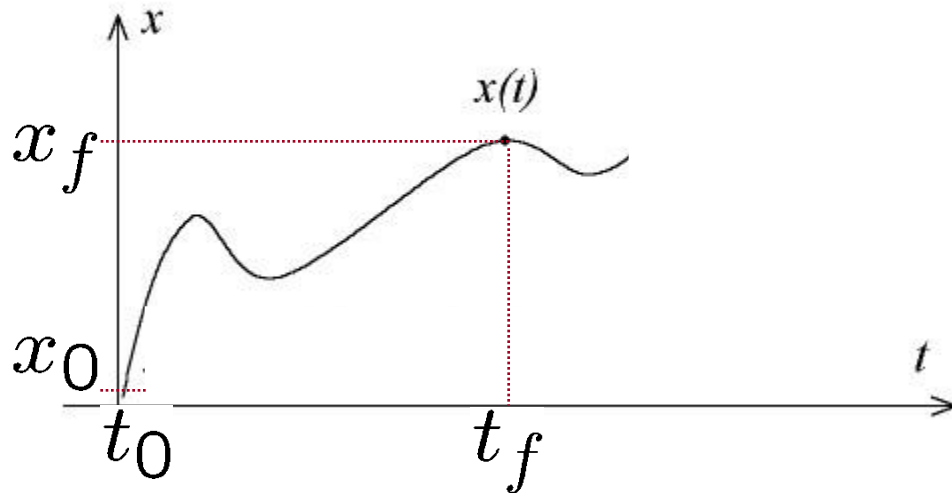
Structure de la commande ?

⇒ Besoin de connaître les propriétés structurelles du système.



Exemple de propriété structurelle : COMMANDABILITE

\exists ? commande u faisant passer l'état $x(t_0) = x_0$ en $x(t_f) = x_f$?



- 1) controllability: to reach a *function* instead of a point.
- 2) control delay \Rightarrow *minimum reaching time*.
 \Rightarrow the notion of reachable sets ("orders" of Kalman-like controllability chains) has to be completed by associating a "class" depending on the time needed to achieve the control.
- 3) realization of the control law: $u(t) = g(x_t)$
 \rightarrow one may prefer "memoryless" controls $u(t) = g(x(t))$
 or point-wise-delayed $u(t) = g(x(t), x(t - h_i))$.

\Rightarrow Several notions (controllability \downarrow)

Syst. dim. finie : état $x(t_0) = x_0$ à $x(t_f) = x_f$

En linéaire-stationnaire (principe de superposition OK) :

- si $\exists u$, indépendant de $t_f - t_0$ et : ce qui est possible en T l'est en $T/100$ (!)
- si passage possible de x_0 à x_f , alors possible de x_f à x_0

Ce n'est plus vrai non linéaire

Syst. dim. infinie : état = fonction x_{t_f}

Ce n'est plus vrai non plus, même en linéaire

Commande

	controlability	abridged def	restrict
functional	1 \mathcal{M}_2 -strict	$\exists u, \exists t_1,$ $x_{t_1} = \varphi_1$	-
	2 \mathcal{M}_2 -approx.	$\exists u_n, \exists t_1,$ $\lim[x_{t_1}]_{u_n} = \varphi_1$	-
	3 absolute	$\exists u, u_{t_1} = 0,$ $x_{t_1} = \varphi_1$	lin, ∇u
	4 (ψ, \mathbb{R}^n) -fct	$\exists u, \exists t_1,$ $x_{t_1} = \psi \in \mathcal{C}$	lin, ∇x
	5 spectral	$\exists u,$ $\sigma_{A(e^{-\delta s})} = \{\lambda_i\}$	lin, coms.
point-wise	6 \mathbb{R}^n -	$\exists u, \exists t_1,$ $x(t_1) = x_1$	lin, coms.
	7 strong \mathbb{R}^n -	$\exists u, \forall t_1,$ $x(t_1) = x_1$	lin, coms.
	8 \mathbb{R}^n -to 0	$\exists u, \exists t_1,$ $x(t_1) = 0$	lin, coms.
$u(t)$ type	9 (strong) over $\mathbb{R}[\nabla]$	polyn. $u(t)$ $= K(\nabla)x(t)$	lin, coms.
	10 (weak) over $\mathbb{R}(\nabla)$	rational $L(\nabla)u(t)$ $= K(\nabla)x(t)$	lin, coms.

for LTI with coms delays:



OK, c'est de l'existence...

mais **comment calculer cette commande ?**

$$(\Sigma) \quad \begin{cases} \dot{x}(t) = \sum_{i=0}^q A_i x(t - ih) + \sum_{i=0}^q B_i u(t - ih) \\ y(t) = \sum_{i=0}^q C_i x(t - ih) \end{cases}$$

Trouver un retour de sortie (dynamique) ou d'état $u(t)$ t.q. le système bouclé soit asympt. stable

2 méthodes :

- Approximation en dim. finie

$\exp(-hs) \rightarrow \frac{N(s)}{D(s)}$ ex. approximants de Padé

$$\frac{1 - \frac{h}{2}s}{1 + \frac{h}{2}s} = 1 - hs + \frac{h^2}{2}s^2 - \frac{h^3}{4}s^3 + O(s^4)$$

- conserver le système de dim. infinie

Première approche :

Problème :

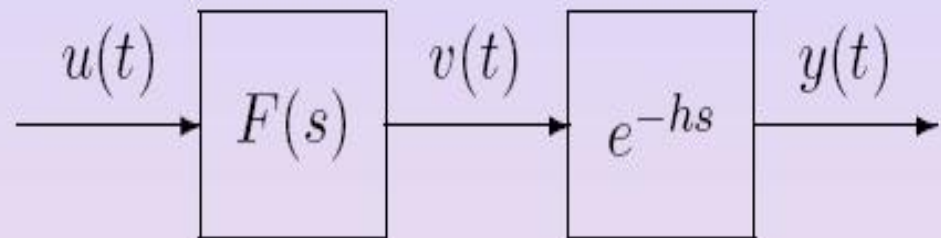
\Rightarrow syst. de grande dimension \Rightarrow contrôleurs complexes

Ordre de l'approximation, stabilité numérique des algorithmes ?

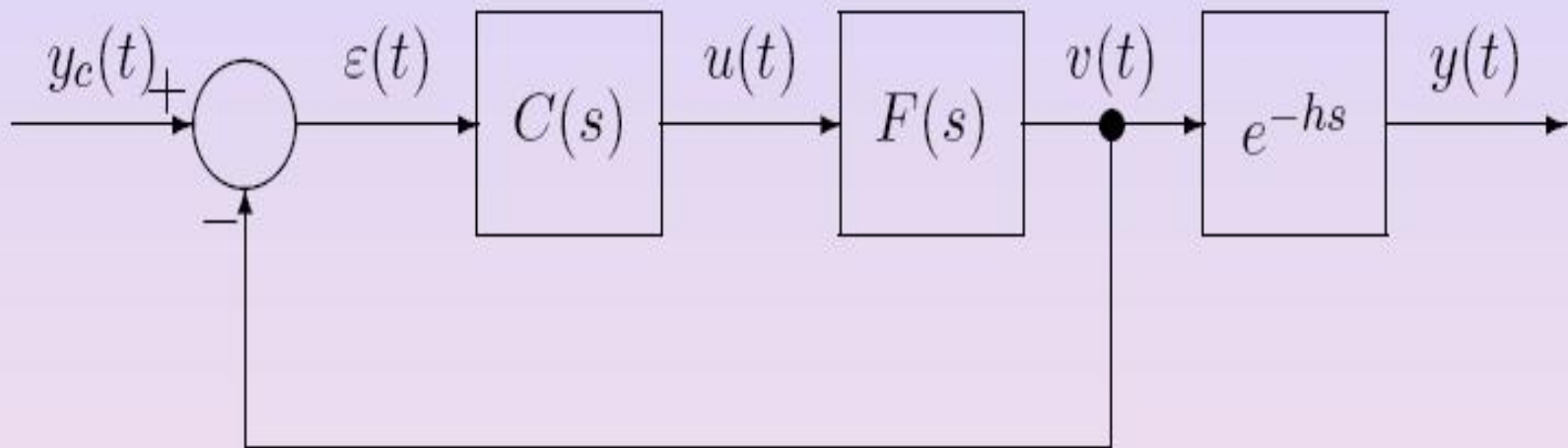
Seconde approche :

- Besoin d'outils spécifiques
- Régulateurs de dimension infinie
 \Rightarrow Implantation / approximation ?

Exemple : cas d'un système à retard sur le capteur

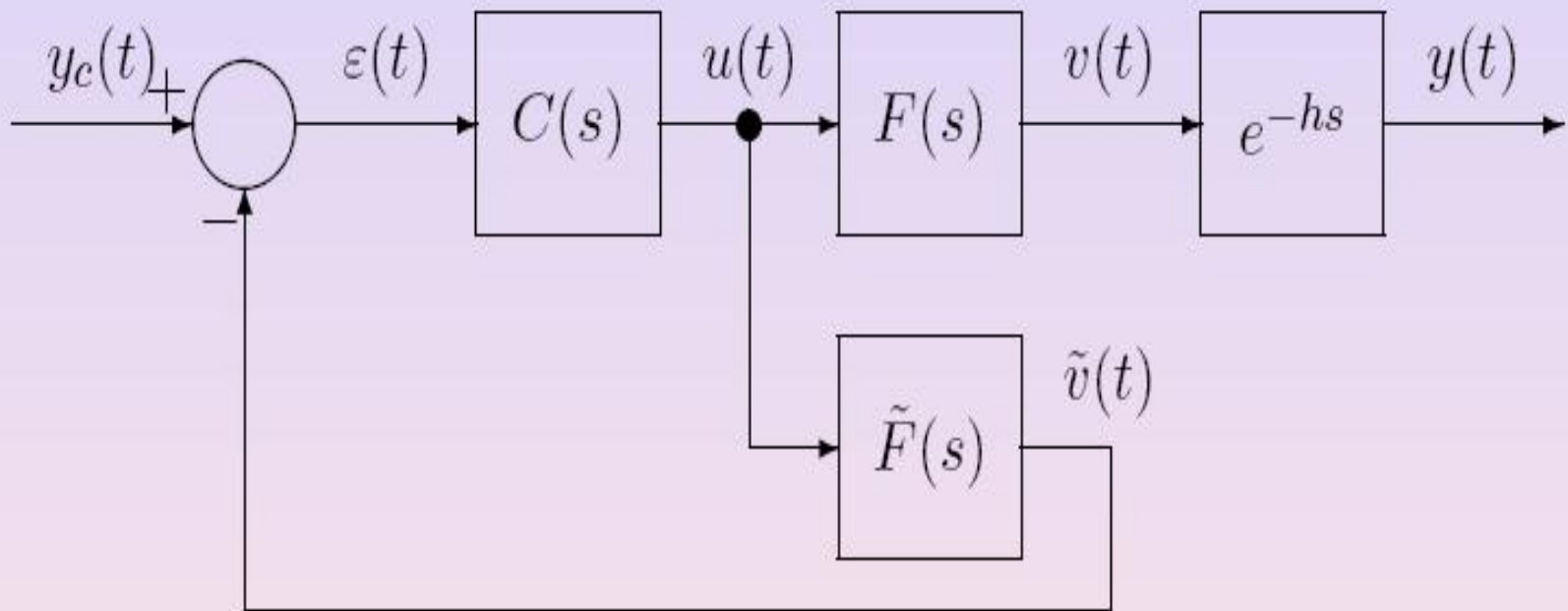


Exemple : cas d'un système à retard sur le capteur



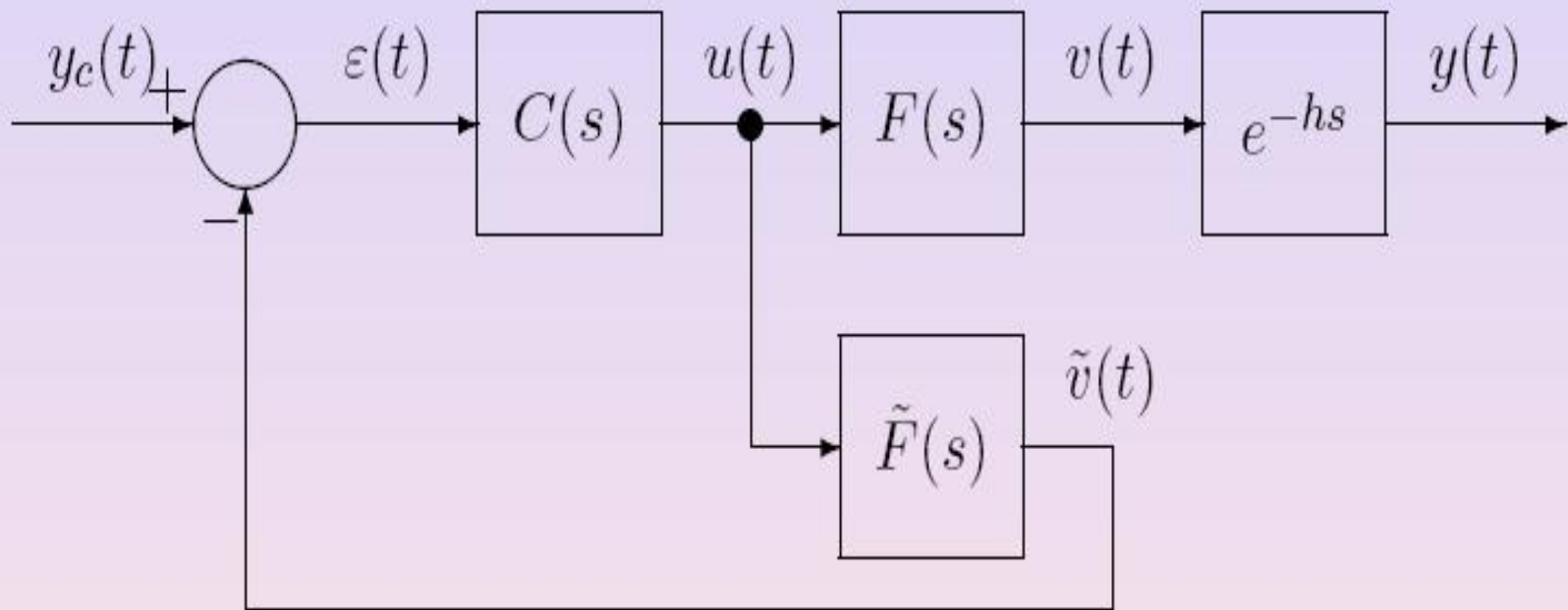
Si on dispose d'un autre capteur non retardé : commande classique

Exemple : cas d'un système à retard sur le capteur



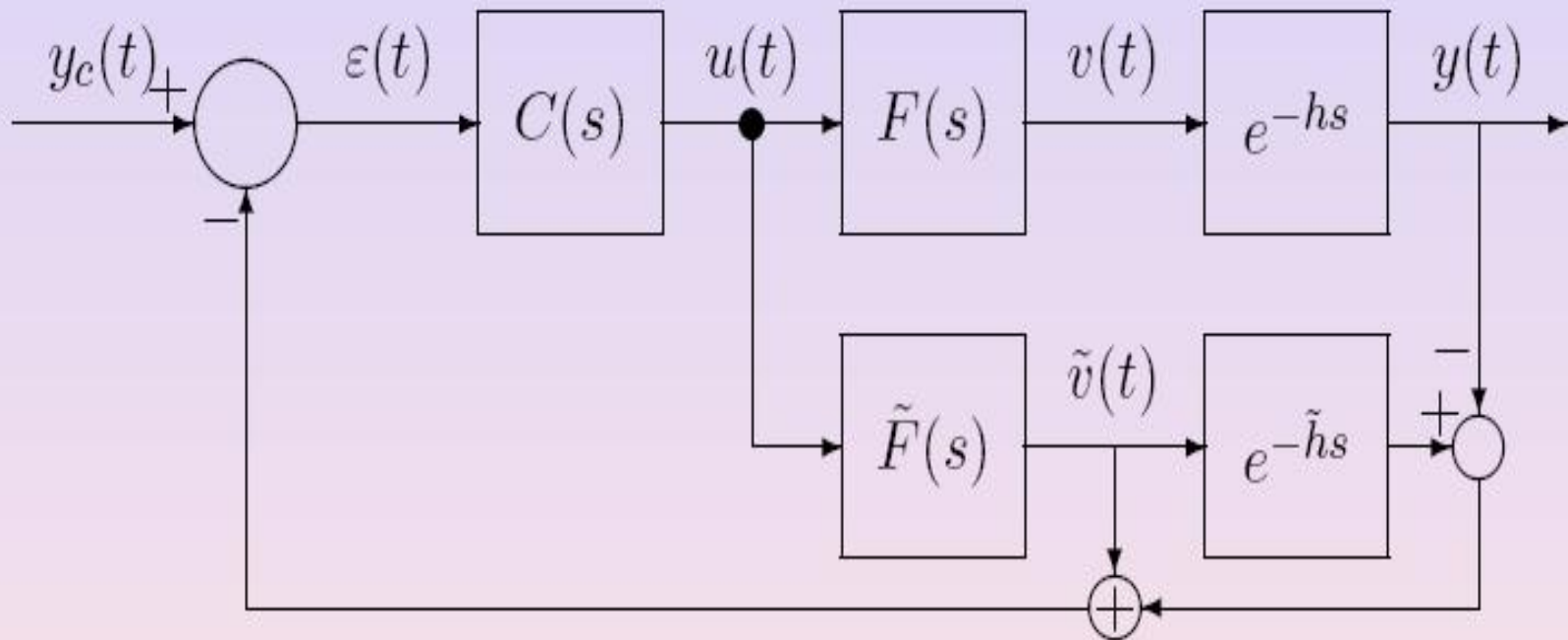
On estime $v(t)$ à l'aide de $u(t)$ et du modèle

Exemple : cas d'un système à retard sur le capteur



Problème ?

Exemple : cas d'un système à retard sur le capteur



→ avec rétroaction

→ **MAIS...**

Modèle parfait ($F = \tilde{F}$, $h = \tilde{h}$),

$$\frac{Y(s)}{Y_c(s)} = \frac{CF}{1 + CF} e^{-hs}$$

sinon :

$$\frac{Y(s)}{Y_c(s)} = \frac{CF}{1 + C\tilde{F} + C(Fe^{-hs} - \tilde{F}e^{-\tilde{h}s})} e^{-hs}$$

→ problème de la robustesse...

retard mal connu, non constant ?

F mal connue, instable ? (cf. exemple suivant)

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = ax(t) + u(t) \\ y(t) = x(t-1) \end{cases} \quad + \text{ régulateur P : } C(s) = K.$$

Equations syst. BF :

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= ax(t) + Kr(t) - Kx(t-1) - K\hat{v}(t) + K\hat{v}(t-1) \\ d\hat{v}/dt(t) &= a\hat{v}(t) + Kr(t) - Kx(t-1) - K\hat{v}(t) + K\hat{v}(t-1) \end{aligned}$$

Equation caractéristique :

$$\det \begin{bmatrix} s - a + Ke^{-s} & K - Ke^{-s} \\ Ke^{-s} & s - a + K - Ke^{-s} \end{bmatrix} = (s-a)(s-a+K) = 0.$$


instable pour un système instable en BO!

→ une autre façon de voir le prédicteur de Smith...

Systeme $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - \tau),$

Idée : $u(t) = -Kx(t + \tau) \Rightarrow \dot{x}(t) = (A - BK)x(t)$

mais commande non causale!



→ construire l'« avance » par l'intermédiaire du modèle ?

⇒ prédiction non dynamique de $x(t + \tau)$:

$$\begin{aligned}x(t + \tau) &= e^{A\tau} x(t) + \int_t^{t+\tau} e^{A(t+\tau-s)} B u(s - \tau) ds \\ &= e^{A\tau} x(t) + \int_{-\tau}^0 e^{-A\theta} B u(t + \theta) d\theta.\end{aligned}$$

$$\Rightarrow u(t) = -K e^{A\tau} x(t) - K \int_{-\tau}^0 e^{-A\theta} B u(t + \theta) d\theta.$$

pôles BF = valeurs propres de $A - BK$

→ plusieurs méthodes s'inspirant de ce principe

Transformations équivalentes

Cas des systèmes avec retard sur l'entrée

→ par exemple (... transformation « d'Artstein »)

Système :

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t - \tau),$$

Changement de variables :

$$z(t) = x(t) + \int_{t-\tau}^t e^{-A(s+\tau-t)} Bu(s) ds$$

$$\Rightarrow \dot{z}(t) = Az(t) + e^{-A\tau} Bu(t),$$

(Kwon & Pearson 80, Artstein 82)

placement de pôles $\iff (A, e^{-A\tau} B)$ commandable (équivalent ici à (A, B) commandable.)

Petite bibliographie



- **Richard *et al.* (2009)** ISBN : 978-9973-0-0852-7 (385 pages)
Mathématiques pour l'Ingénieur
- **Kolmanovski-Nosov (1986)**, Academic Press.
Stability of functional differential equations.
- **Niculescu (2001)**, Springer
Delay effects on stability. LNCIS Vol. 269.
- **Richard (2003)**, *Automatica* 39 (10), 1667-1694
TDS: An overview of some recent advances and open problems"
- **Fridman-Seuret-Richard (2004)** *Automatica* 40 (8)
Robust sampled data stabilization of lin. syst.: an input delay approach
- **Kruszewski-Jiang-Fridman-Richard-Toguyeni (2011)** *IEEE CST*
A switched system approach to exponential stabilization through communication network

*That's all Folks!*TM



A WARNER BROS. CARTOON