

École Centrale de lille — Filière Recherche
Épreuve de “Systèmes Dynamiques”, 20 janvier 2012
J.-P. Richard (documents personnels autorisés)

Problème 1 (noté sur 7 points environ)

Caractériser précisément les propriétés de stabilité des systèmes suivants :

$$\dot{y} = 1 - y, \quad (1)$$

$$\dot{y} = y^2 - 1, \quad (2)$$

$$\dot{y} = -|y|, \quad (3)$$

$$\ddot{y} = 0, \quad (4)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^2 x_2, \\ \dot{x}_2 = 3x_1 - x_2. \end{cases} \quad (5)$$

Problème 2 (noté sur 7 points environ)

On considère le système suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1 + x_1 \sin x_1 + x_2 \cos^2 x_1, \\ \dot{x}_2 = \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{2}x_2. \end{cases} \quad (6)$$

- 1) Caractériser précisément les propriétés du point $x = 0$.
- 2) Etudier plus généralement les propriétés de stabilité du système (6).

Problème 3 (noté sur 7 points environ)

On considère le modèle suivant d'un pendule sans frottement :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -a \sin x_1. \end{cases} \quad (7)$$

- 1) Calculer le (ou les) point(s) d'équilibre.
- 2) Proposer une fonction candidate à Lyapunov (on peut se baser sur des considérations énergétiques, de type “énergie totale = potentielle + cinétique”). Etudier la stabilité.
- 3) Que se passe-t-il si on ajoute un couple de frottement fluide (proportionnel à la vitesse x_2) ?

Problème 4 (noté sur 7 points environ)

On considère le système à retard suivant, où k est une constante scalaire et h , une constante scalaire positive :

$$\frac{d}{dt}x(t) = \dot{x}(t) = -kx(t-h). \quad (8)$$

Etudier ses propriétés de stabilité (éventuellement, dans des cas particuliers).

Problème 5 (noté sur 4 points environ)

On considère le système non linéaire (9) de type $\dot{x} = f(x) + gu$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^2, \\ \dot{x}_2 = x_1^2 + u. \end{cases} \quad (9)$$

Calculer la suite des crochets de Lie $g, [f, g], [[f, g], g], [[[f, g], g], g], \dots$

Calculer sa valeur en $x = 0$.

Calculer son rang en $x = 0$ et en tout $x \in R^2$.