

EC Lille, Filière “Recherche”
Module “Systèmes dynamiques”, 19 janvier 2007

J.-P. Richard (durée : 2 heures, documents personnels autorisés)

Premier problème

Caractériser (précisément) les propriétés de stabilité pour les systèmes dynamiques suivants (où $x \in \mathbb{R}$) :

$$\dot{x} = -x^n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad (1)$$

$$\dot{x} = \cos x, \quad (2)$$

$$\dot{x} = (\cos x)^2, \quad (3)$$

$$\dot{x} = -x(1-x)(2+x). \quad (4)$$

Deuxième problème

Etudier les propriétés de convergence du système suivant, où $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ et $|f(t)| \leq 1$ pour tout t (un dessin de résumé dans le plan (x_1, x_2) est demandé):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -2x_1 + x_2^3, \\ \dot{x}_2 = f(t)x_1 - x_2. \end{cases} \quad (5)$$

Troisième problème

Etudier les propriétés de convergence de chacun des systèmes suivants :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -(x_1 + 1)^2 x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 - 2x_2 + 1. \end{cases} \quad (6)$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (x_1 + 1)^2 x_2, \\ \dot{x}_2 = x_1 + 2x_2 + 1. \end{cases} \quad (7)$$

Quatrième problème

On rappelle tout d'abord la définition : Soient les champs de vecteurs analytiques $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ et le système $\dot{x} = f(x) + g(x)u$, $x \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}$. L'algèbre d'accessibilité forte, notée $\mathcal{AF}(g)$, est la plus petite sous-algèbre de l'algèbre de Lie des champs de vecteurs analytiques définis sur \mathbb{R}^n qui contienne le champ de vecteur g et soit invariante par f . Pour un $x_0 \in \mathbb{R}^n$, on note $AF(x_0)$ l'espace vectoriel engendré par les $h(x_0)$ pour $h \in \mathcal{AF}(g)$. Le système est dit fortement accessible si $\dim AF(x_0) = n$ pour tout $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

A quelles conditions les systèmes (8) et (9) sont-ils fortement accessibles ?

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -ax_1 - bx_2 + \gamma(x)u. \end{cases} \quad (8)$$

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu, \\ x &\in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (9)$$

(on suppose ici $\gamma(x)$ analytique, a et b des scalaires constants, A une matrice constante de $\mathbb{R}^{n \times n}$ et B un vecteur constant de \mathbb{R}^n)