

EC Lille, Filière “Recherche”
Epreuve sur le module “Systèmes dynamiques”, 13 février 2004

J.-P. Richard (durée : 2 heures, documents personnels autorisés)

Premier problème (4pts)

Caractériser (précisément) les propriétés de $x = 0 \in \mathbb{R}$ pour les cinq systèmes suivants :

$$\dot{x} = -x, \quad (1)$$

$$\dot{x} = -|x|, \quad (2)$$

$$\dot{x} = x^2, \quad (3)$$

$$\dot{x} = -x^3. \quad (4)$$

Deuxième problème (4pts)

Un peu plus long mais pas plus difficile, caractériser les propriétés asymptotiques des deux systèmes suivants, où $x \in \mathbb{R}$:

$$\dot{x} = -\sin x, \quad (5)$$

$$\dot{x} = x(1-x). \quad (6)$$

Un résumé sous forme de dessin sur l'axe des $x \in \mathbb{R}$ est souhaité dans les deux cas.

Troisième problème (6pts)

Etudier les propriétés de convergence du système (7) :

$$\dot{x} = A(x)x, \quad A(x) = \begin{pmatrix} -1 & x_1 + x_2 \\ -0.5 & -1 + x_2 \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}. \quad (7)$$

Un dessin est également bienvenu si vous voulez vos 6 points.

Quatrième problème (4pts)

Etudier les propriétés de convergence du système (8) suivant, où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} \dot{x} = xy, \\ \dot{y} = -y - 2x^2. \end{cases} \quad (8)$$

Cinquième problème (4pts)

On rappelle tout d'abord le célèbre résultat : **(Théorème)** Si les champs de vecteurs f, g sont C^∞ , le système $\dot{x} = f(x) + g(x)u$, $x \in \mathbb{R}^n$ est localement faiblement commandable en x_1 si $\text{rang} \{g, [f, g], [[f, g], g], [[[f, g], g], g] \dots\}|_{x_1} = n$.

On considère le système non linéaire (9) sur \mathbb{R}^2 : en quels points x_1 est-il localement faiblement commandable ?

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2^2, \\ \dot{x}_2 = x_1^2 + u. \end{cases} \quad (9)$$