

École Centrale de lille — Filière Recherche
Épreuve de “Systèmes Dynamiques”, 21 janvier 2011
J.-P. Richard (documents personnels autorisés)

Premier problème

Caractériser précisément les propriétés de stabilité pour les systèmes :

$$\dot{y} = -|y|, \quad (1)$$

$$\dot{y} = y - y^3, \quad (2)$$

$$\ddot{y} = 0, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= (1 + x_2)^3, \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 - 1. \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 - x_2^3, \\ \dot{x}_2 &= x_1^3 - x_2. \end{aligned} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 - x_1x_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1^2 - x_2. \end{aligned} \quad (6)$$

Deuxième problème

On considère le système (7) ci-dessous, d'entrée u et d'état x :

$$\dot{x} = f(x) + gu = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + 2x_2 - x_3 \\ x_3 \\ x_1x_2 + u \end{pmatrix}. \quad (7)$$

- 1) Montrer que pour $u = 0$, l'équilibre $x = 0$ est instable.
- 2) Proposer une loi $u = u(x_1, x_2, x_3)$ telle que $x = 0$ devienne globalement asymptotiquement stable.
- 3) Calculer les crochets de Lie $g_1 = [f, g], g_2 = [f, [f, g]], g_3 = [f, [f, [f, g]]]$, puis calculer le rang de (g, g_1, g_2, g_3) au point $x = 0$.
- 4) Tout cela vous semble-t-il cohérent et, si oui, pourquoi ?